

CAPÍTULO 2 POLINOMIOS

① Completar la siguiente tabla:

	¿Polinomio?	Grado	Coef. principal	Término indep.	Monomio de grado 2	Completo
$2x^2 - 3x^4 + 5x - 7$	Sí	Cuatro	-3	-7	$2x^2$	No
$\sqrt{3}x^3 - 5x^2 + 7$	Sí	tres	$\sqrt{3}$	7	$-5x^2$	No
$3x^3 - 5x^2 + \boxed{2x^{-1}} + 3$	No es un polinomio. El exponente debe ser siempre un número natural					
$3x - 5x^2 + 7 - x^4$	Sí	Cuatro	-1	7	$-5x^2$	No
$2x + 5 - \frac{3}{5}x^2$	Sí	Dos	$-\frac{3}{5}$	5	$-\frac{3}{5}x^2$	Sí
$\sqrt[3]{12}x^4 - 2x^2 + 3$	Sí	Cuatro	$\sqrt[3]{12}$	3	$-2x^2$	No

② Hallar las raíces y descomponer factorialmente los polinomios:

(a) $P(x) = 8x^4 - 26x^2 - 4x^3 + x + 6$

- Polinomio de grado CUATRO con coeficientes reales. Ordenando $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 26x^2 + x + 6$.
- Teorema fundamental del álgebra: el polinomio tiene CUATRO raíces reales o complejas. El número de raíces reales debe ser PAR o CERO.
- Los candidatos a raíces enteras, divisores del término independiente: $6 = 2 \cdot 3 \implies \begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 2 \\ \pm 3 & \pm 6 \end{Bmatrix}$

Teorema de Ruffini:

8	-4	-26	1	6	
2	16	24	-4	-6	
8	12	-2	-3	0	

Los candidatos a raíces enteras, divisores del término independiente: $3 \implies \begin{Bmatrix} \pm 1 & \pm 3 \end{Bmatrix}$. El polinomio NO tiene más raíces enteras (comprobar efectuando Ruffini).

- Candidatos a raíces racionales,

divisores del término independiente ENTRE divisores del coeficiente principal: $\left\{ \begin{array}{cc} \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{4} \\ \pm \frac{3}{2} & \pm \frac{3}{4} \\ \pm \frac{3}{8} & \pm \frac{3}{8} \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} & 8 & 12 & -2 & -3 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 8 & 3 \\ \hline & 8 & 16 & 6 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & -4 & -6 \\ \hline & 8 & 12 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} -\frac{3}{2} & -12 \\ \hline & 8 & 0 \end{array} \end{array}$$

Raíces $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$ Descomposición factorial $P(x) = 8(x - 2) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

(b) $P(x) = 2x^5 - 8x^4 - 6x^3 + 36x^2$

- Polinomio de grado CINCO con coeficientes reales, el número de raíces reales IMPAR.
- Polinomio homogéneo: $Q(x) = 2x^5 - 8x^4 - 6x^3 + 36x^2 = 2x^2(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$.
- $x = 0$ es raíz DOBLE del polinomio.
- Los candidatos a raíces enteras, divisores del término independiente:

$$18 = 2 \cdot 3^2 \implies \left\{ \begin{array}{ccc} \pm 1 & \pm 3 & \pm 9 \\ \pm 2 & \pm 6 & \pm 18 \end{array} \right\}$$

- Teorema de Ruffini:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} 1 & -4 & -36 & 18 \\ -2 & & -2 & 12 & -18 \\ \hline 1 & -6 & 9 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 3 & 3 & -9 \\ \hline 1 & -3 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

divisores del término independiente:

$$9 = 3^2 \implies \{\pm 1 \pm 3 \pm 9\}$$

Raíces $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ DOBLE} \\ x = -2 \\ x = 3 \text{ DOBLE} \end{array} \right.$. Descomposición factorial $P(x) = 2x^2(x + 2)(x - 3)^2$

- ③ a) Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = 6x^4 - 14x^2 + 5x^3 + x + 2$.
 b) Resolver la ecuación $6x^4 - 14x^2 + 5x^3 + x + 2 = 0$

a) Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = 6x^4 - 14x^2 + 5x^3 + x + 2$.

El polinomio es completo. Ordenando el polinomio: $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2$. Para el cálculo de las raíces aplicando la regla de Ruffini.

☞ Los valores enteros candidatos a raíces reales son los divisores del término independiente:

$$2 \Rightarrow \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \end{cases}$$

1	6	5	-14	1	2
		6	11	-3	-2
	6	11	-3	-2	0
-2		-12	2	2	
	6	-1	-1		0

☞ Candidatos a raíces racionales no enteras: divisores del término independiente entre divisores del coeficiente principal.

$$\begin{cases} \text{término independiente: } 1 \\ \text{coeficiente principal: } 6 = 2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \text{candidatos } \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{3} \\ \pm \frac{1}{6} \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}$	6	-1	-1
		-3	1
	6	-2	0
$\frac{1}{3}$		2	
	6	0	

Raíces $\begin{cases} x = 1; & x = -2 \\ x = -\frac{1}{2}; & x = \frac{1}{3} \end{cases}$. Descomposición factorial $P(x) = 6(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

El último cociente es 6 y es factor de la descomposición.

b) Resolver la ecuación $P(x) = 0$

La ecuación es: $6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2 = 0$, sus soluciones son las **raíces** del polinomio del apartado anterior:

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = 1; & x = -2 \\ x = -\frac{1}{2}; & x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- ④ Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

Descomposición factorial de los polinomios.

$$P(x) \stackrel{(1)}{=} x^2(x-2)$$

$$Q(x) \stackrel{(1)}{=} x(x^2-4) \stackrel{(2)}{=} x(x+2)(x-2)$$

$$\text{mcd}(P(x), Q(x)) = x(x-2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x+2)(x-2)$$

Razonamientos

- (1) Extraer factor común.
- (2) Identidad notable.

b) $P_1(x) = x^3 + 3x^2 - 4$; $P_2(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ y $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Descomposición factorial de los polinomios.

$$P_1(x) \stackrel{(1)}{=} (x-1)(x^2-4x+4) \stackrel{(2)}{=} (x-1)(x+2)^2$$

$$P_2(x) \stackrel{(1)}{=} (x-1)^2(x+2)(x-3)$$

$$P_3(x) \stackrel{(1)}{=} (x-1)(x+2)(x-3)$$

$$\text{mcd}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = (x-1)(x+2)$$

$$\text{mcm}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = (x-1)^2(x+2)^2(x-3)$$

Razonamientos

- (1) Regla de Ruffini.
- (2) Identidad notable.

⑤ Hallar el valor que debe tener a si el polinomio $P(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 - ax + a - 1$ es divisible por $x + 2$.

Si el polinomio $P(x)$ es divisible por el binomio $x + 2$ entonces el resto de la división es CERO y por el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x = -2$ es CERO.

$$R = 0 = P(x = -2) = 3(-2)^4 - (-2)^3 - 3(-2)^2 - a(-2) + a - 1, \text{ despejando } a$$

$$48 + 8 - 12 + 2a + a - 1 = 0 \implies 3a = -43 \implies a = -\frac{43}{3}$$

$$a = -\frac{43}{3}$$

⑥ El polinomio $x^2 + ax + b$ es múltiplo de $x + 1$. Además, al dividirlo por $x - 1$ y por $x - 3$ se obtiene el mismo resto. Hallar a y b .

El polinomio $x^2 + ax + b$ es múltiplo de $x + 1$: es equivalente a decir que $x = -1$ es una raíz del polinomio. Por definición de raíz, el valor numérico del polinomio para $x = -1$ es CERO:

$$P(x = -1) = 1 - a + b = 0 \quad (*)$$

Al dividirlo por $x - 1$ y por $x - 3$ se obtiene el mismo resto: Teorema del resto nos permite afirmar que los valores numéricos del polinomio para $x = 1$ y $x = 3$ son IGUALES:

$$P(x = 1) = P(x = 3) \implies 1 + a + b = 9 + 3a + b \implies a = -4$$

Sustituyendo en (*): $b = -5$.

$$\text{El polinomio es } P(x) = x^2 - 4x - 5$$

⑦ Opera y simplifica la siguiente expresión: $\frac{x^2 - 1}{1 - x} : \left[\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{1 - x} : \left[\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} \right] &\stackrel{(1)}{=} \frac{(x + 1)(\cancel{x - 1})}{\cancel{1 - x}} : \frac{(x + 1) \cdot \overset{(-1)}{(1 - x)} \cdot (1 + x)}{x \cdot \cancel{(1 - x)}} \stackrel{(2)}{=} \\ &= -(\cancel{x + 1}) \cdot \frac{x}{(\cancel{x + 1}) \cdot (x + 1)} = \boxed{\boxed{-\frac{x}{x + 1}}} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Identidad notable: *Suma por diferencia, diferencia de cuadrados.*

Producto de fracciones algebraicas.

El cociente entre los binomios $(x - 1) : (1 - x)$ es igual a -1 por ser opuestos.

(2) Dividir fracciones es multiplicar por el inverso del divisor.

⑧ Opera y simplifica: $\left[\frac{x - \frac{x}{x - 2}}{x + \frac{x}{x - 2}} - \frac{10 - 2x}{3 - 2x - x^2} \right] : \frac{1}{x + 3}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x - \frac{x}{x - 2}}{x + \frac{x}{x - 2}} - \frac{10 - 2x}{3 - 2x - x^2} \right] : \frac{1}{x + 3} &\stackrel{(1)}{=} \left[\frac{\frac{x(x - 2) - x}{\cancel{x - 2}}}{\frac{x(x - 2) + x}{\cancel{x - 2}}} - \frac{10 - 2x}{3 - 2x - x^2} \right] \cdot (x + 3) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \left[\frac{\cancel{x}(x - 3)}{\cancel{x}(x - 1)} - \frac{10 - 2x}{-(x - 1)(x + 3)} \right] \cdot (x + 3) \stackrel{(3)}{=} \frac{(x - 3)(x + 3) + 10 - 2x}{(x - 1)(\cancel{x + 3})} \cdot (\cancel{x + 3}) \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{x^2 - 9 + 10 - 2x}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \boxed{\boxed{x - 1}} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Sumar fracciones algebraicas. El denominador común es $x - 2$.

Dividir fracciones es multiplicar por el inverso del divisor.

(2) Extraer factor común y descomponer factorialmente el polinomio: $3 - 2x - x^2 = -(x - 1)(x + 3)$.

(3) En la segunda fracción: $\boxed{- \cdot - = +}$

Sumar fracciones algebraicas. El denominador común es $(x - 1)(x + 3)$.

(4) Identidades notables y simplificar.