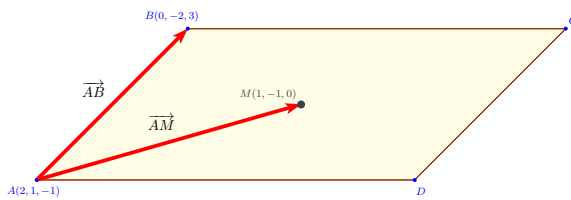


5.2. Geometría euclídea

① El punto $M(1, -1, 0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2, 1, -1)$ y $B(0, -2, 3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.

- a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.



Plano determinado por tres puntos **NO** alineados:

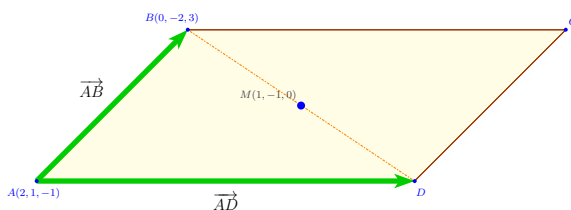
$$\pi \equiv \begin{cases} \text{Un punto: } A \\ \text{Dos vectores directores: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, -3, 4) \\ \overrightarrow{AM} = (-1, -2, 1) \end{cases} \end{cases}$$

- Vector normal del plano: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -2, 1)$
- Ecuación del plano: $5(x - 2) - 2(y - 1) + 1 \cdot (z + 1) = 0$

La ecuación del plano que contiene al paralelogramo es $\pi \equiv 5x - 2y + z - 7 = 0$

b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.



El vértice $D(x, y, z)$ y M es el punto medio del segmento $\overline{BD}$:

$$\begin{cases} \frac{x+0}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \\ \frac{y-2}{2} = -1 \Rightarrow y = 0 \\ \frac{z+3}{2} = 0 \Rightarrow z = -3 \end{cases}$$

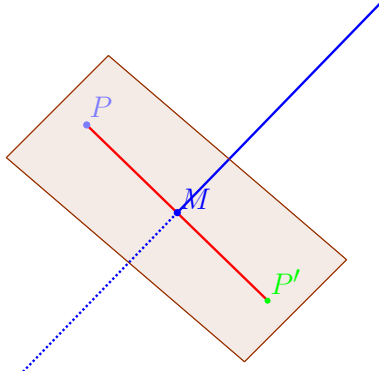
Las coordenadas de un vértice son $D(2, 0, -3)$

La superficie del paralelogramo se obtiene por la interpretación geométrica del módulo del producto vectorial:

$$S = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \|(10, -4, 2)\| = 2\sqrt{25 + 4 + 1} = 2\sqrt{30}$$

La superficie del paralelogramo es $S = 2\sqrt{30} \text{ u}^2$

② Halla el punto simétrico de $P(2, 1, -5)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$.



- Plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P : La recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

$$\text{Forma paramétrica: } r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\pi \perp r \iff \vec{n} \parallel \vec{u}_r = (1, -1, 1)$. La ecuación del plano es:

$$\pi \equiv 1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 5) = 0 \implies x - y + z + 4 = 0$$

- El punto M es el punto de intersección de la recta r y el plano π :

$$M \in r \implies M(\alpha, -2 - \alpha, \alpha)$$

$$M \in \pi \implies \alpha - (-2 - \alpha) + \alpha + 4 = 0 \implies \alpha = -2 \text{ entonces } M(-2, 0, -2)$$

- El punto M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, sea $P'(x, y, z)$ el simétrico de $P(2, 1, -5)$:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -2 \implies x = -6 \\ \frac{y+1}{2} = 0 \implies y = -1 \\ \frac{z-5}{2} = -2 \implies z = 1 \end{cases}$$

Las coordenadas del simétrico del punto P son $P'(-6, -1, 1)$

③ Los puntos $P(2, 0, 0)$ y $Q(-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta $r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

- Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S .
- ¿El triángulo PQS es rectángulo? Razonar la respuesta.

a) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S .

$$\text{La recta } r \text{ en forma paramétrica } r \equiv \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 0 \\ z = 11 + 4\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

El vértice $S \in r$ entonces $S(-3\alpha, 0, 11 + 4\alpha)$.

Condición de perpendicularidad: $\vec{u}_r \perp \vec{PS} \iff \vec{u}_r \cdot \vec{PS} = 0$ (vectores perpendiculares su producto escalar es igual a cero).

Las componentes del vector $\vec{PS} = (-3\alpha - 2, 0, 11 + 4\alpha)$:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{PS} = (-3, 0, 4) \cdot (-3\alpha - 2, 0, 11 + 4\alpha) = 25\alpha + 50 = 0 \implies \alpha = -2$$

Sustituyendo el valor de α en el vértice S :

Las coordenadas del vértice S son $S(6, 0, 3)$

b) ¿El triángulo PQS es rectángulo? Razonar la respuesta.

Si el triángulo es rectángulo en uno de los vértices dos de sus lados son perpendiculares (vectores perpendiculares):

$$\begin{cases} \vec{PQ} = (-3, 12, 4) \\ \vec{PS} = (4, 0, 3) \\ \vec{QS} = (7, -12, -1) \end{cases} \quad \text{y el producto escalar: } \vec{PQ} \cdot \vec{PS} = (-3, 12, 4) \cdot (4, 0, 3) = -12 + 12 = 0$$

El triángulo PQS es rectángulo en el vértice P

④ Sean los puntos $A(-1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$: Determinar:

- a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por los puntos A y B .
- b) La ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta r .

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por los puntos A y B .

La recta viene determinada por un punto y un vector, no nulo, $\vec{u}_r = \vec{AB} = (1, 0, 1)$.

- Ecuación vectorial: $r \equiv \vec{x} = (-1, 1, 0) + \alpha(1, 0, 1) \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- Ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

b) La ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta r .

- Condición de perpendicularidad entre recta y plano:

$$r \perp \pi \iff \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi \iff \text{rang}(\vec{u}, \vec{n}) = 1$$

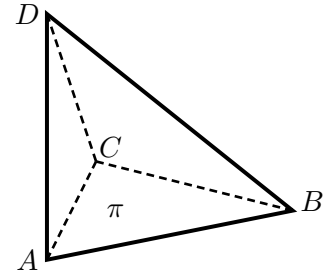
los vectores son linealmente dependientes. Un vector normal del plano es $\vec{n}_\pi = (1, 0, 1)$.

- El haz de planos que pasan por el punto A : $A(x + 1) + B(y - 1) + C(z - 0) = 0$.
- La ecuación general del plano es:

$$1 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot z = 0 \implies x + z + 1 = 0$$

⑤ Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(\alpha, 3, 1)$. Calcular:

- El área del triángulo limitado por los puntos A , B y C .
- La ecuación del plano π que pasa por los puntos A , B y C .
- El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior.
- Para el valor de α encontrado, hallar el volumen del tetraedro.
- Si $\alpha = 3$, hallar la ecuación de la altura trazada desde el vértice A .



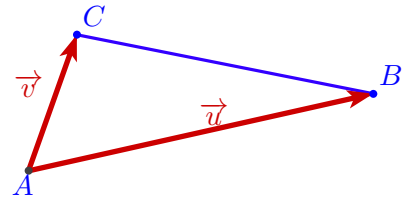
a) Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial de dos vectores: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (12, 18, 6) = 6(2, 3, 1)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 6\sqrt{4 + 9 + 1} = 6\sqrt{14}$$

$$\text{Área del triángulo: } S = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$



b) El plano viene determinado por un punto, A , y el vector normal del plano:

$$\vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (12, 18, 6) \parallel (2, 3, 1)$$

$$\pi \equiv 2(x - 3) + 3y + z = 0 \implies \pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$$

c) El vector $\overrightarrow{AD} = (\alpha - 3, 3, 1)$ y $\overrightarrow{AD} \perp \pi \iff \text{rang}(\overrightarrow{AB}, \vec{n}) = 1 \iff \frac{\alpha - 3}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{2} \iff \alpha = 5$

d) El volumen del tetraedro se puede calcular de dos formas diferentes:

- Aplicando la interpretación del valor absoluto del producto mixto de tres vectores no coplanarios:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |(12, 18, 6) \cdot (\alpha - 3, 3, 1)| = \frac{1}{6} |24 + 54 + 6| = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14 \text{ u}^3$$

- Volumen de una pirámide: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{base}} \cdot h$

$$\begin{cases} \text{El área de la base está calculada en el apartado (a)} \quad S_{\text{base}} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2 \\ \text{La altura, teniendo en cuenta el apartado (c): } h = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{14} \\ \text{El volumen es: } V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = 14 \text{ u}^3 \end{cases}$$

e) La altura h_A es la recta perpendicular al plano σ determinado por los puntos B , C y D y que pasa por el vértice A .

- Condición de perpendicularidad: $h_A \perp \sigma \iff \vec{u}_{h_A} \parallel \vec{n}_\sigma$.

$$\text{Vector característico del plano sigma: } \vec{n}_\sigma = \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8, -18, -6) \parallel (4, -9, -3).$$

■ Ecuación continua de la recta: $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-9} = \frac{z}{-3}$

⑥ Dados el punto $A(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$. Calcular:

- Un vector $\vec{u}$ director de la recta r .
- El plano π que contiene a la recta r y al punto A .
- La recta s que pasa por el punto A , está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r .

a) Un vector $\vec{u}$ director de la recta r .

El vector director de la recta es perpendicular a los vectores normales de los planos cuya intersección es la recta, entonces es paralelo al producto vectorial de los dos vectores normales:

$$\vec{u}_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A .

Haz de planos de arista la recta r : $\begin{cases} x-y+1+\lambda(y-z-1) = 0 \\ y-z-1 = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

El punto $A(1,1,1) \in$ al plano $\implies 1-1+1+\lambda(1-1-1) = 0 \implies \lambda = -1$, sustituyendo en el haz:

$$\pi \equiv x - 2y + z + 2 = 0$$

c) La recta s que pasa por el punto A , está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r .

$$\begin{cases} \text{La recta } s \text{ está contenida en el plano } \pi \text{ anterior: } \iff \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \\ \text{Su dirección es perpendicular a la de la recta } r: \iff \vec{v}_s \perp \vec{u}_r \end{cases} \iff \boxed{\vec{v}_s \parallel \vec{n}_\pi \wedge \vec{u}_r}$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3) \parallel (-1, 0, 1)$$

Ecuación continua de la recta s :

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$$

⑦ Considera los puntos $A(-1, k, 3)$, $B(k+1, 0, 2)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(2, 0, 1)$.

- a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?
- b) Calcula los valores de k para los que los puntos A , B , C y D forman un tetraedro de volumen 1 u³.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ serán linealmente dependientes si $\text{rang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) \neq 3$, equivale a que el $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

$$\overrightarrow{AB} = (k+2, -k, -1), \quad \overrightarrow{BC} = (-k, 2, -2), \quad \overrightarrow{CD} = (1, -2, 1)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} f_1 = f_1 + f_3 \\ f_2 = f_2 + 2 \cdot f_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} k+3 & -(2+k) & 0 \\ 2-k & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right| = -2(k+3) + (4-k^2) = -k^2 - 2k - 2 \quad (5.3)$$

$$-k^2 - 2k - 2 = 0 \implies k^2 + 2k + 2 = 0$$

La ecuación de segundo grado NO tiene soluciones reales, su discriminante $\Delta = 4 - 8 < 0$ es negativo.

No existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual los vectores sean linealmente dependientes

b) Calcula los valores de k para los que los puntos A , B , C y D forman un tetraedro de volumen 1 u³.

Por el apartado anterior, los cuatro puntos A, B, C y D NUNCA son coplanarios, los puntos forman un TETRAEDRO de vértices A, B, C y D .

El volumen del tetraedro es $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \right| = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$ (interpretación del valor absoluto del producto mixto).

$$\frac{1}{6} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pm 1 \iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pm 6$$

El vector $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$, por las propiedades de los determinantes (fila combinación lineal de las otras filas):

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) \stackrel{(5.3)}{=} -k^2 - 2k - 2$$

$$-k^2 - 2k - 2 = 6 \implies k^2 + 2k + 8 = 0. \text{ No hay solución real}$$

$$-k^2 - 2k - 2 = -6 \implies k^2 + 2k - 4 = 0 \implies k = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} k_1 = -1 + \sqrt{5} \\ k_2 = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

El volumen del tetraedro es 1 si $k = -1 \pm \sqrt{5}$

⑧ Considera las rectas $r \equiv x - 1 = y = 1 - z$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

- a) Demostrar que las rectas son secantes.
 b) Hallar el ángulo que forman las rectas.
 c) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y a s .

a) Demostrar que las rectas son secantes.

Un vector director de la recta r es $\vec{u}_r = (1, 1, -1)$ y un punto de la recta es $P(1, 0, 1)$.

Un vector director de la recta s es $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$ y un punto de la recta es $Q(-1, 0, 1)$ (considerando $y = 0$ y sustituyendo).

Las rectas son secantes si $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$ y $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 2$. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales entonces son linealmente independientes ($\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$).

$$\vec{PQ} = (-2, 0, 0) \parallel (-1, 0, 0) \text{ y } \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 2$.

Las rectas r y s son secantes

b) Hallar el ángulo que forman las rectas.

El ángulo, α , que forman las rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$):

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (-2, -1, 1)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) = 19^\circ 28' 16,39''$$

El ángulo que forman las rectas r y s mide $\alpha = 19^\circ 28' 16,39''$

c) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y a s .

Las rectas son secantes (apartado (a)) determinan un plano $\pi \equiv (P; \vec{u}_r, \vec{v}_s)$, siendo P un punto de cualquiera de las rectas.

- Vector característico del plano $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, 1)$
- Radiación de planos de vértice el punto $P(1, 0, 1) \in r$: $A(x - 1) + B(y - 0) + C(z - 1) = 0$
- Ecuación del plano: $0 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0$

La ecuación del plano es $\pi \equiv y + z - 1 = 0$

⑨ Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3 \Rightarrow \begin{cases} \text{vector director: } \vec{u}_r = (3, 2, -1) \\ \text{Punto de la recta: } P(1, -1, 3) \in r \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=1 \\ 2y-z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{vector director: } \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, 2) \\ \text{Punto de la recta: si } y=0 \text{ entonces } Q(1, 0, 2) \in s \end{cases}$$

El plano π viene determinado por un punto, origen de coordenadas, y dos vectores linealmente independientes. La recta $r \subset \pi$ entonces un vector director del plano es $\vec{u}_r$ y el otro vector director es $\vec{OP} = (1, -1, 3)$, vector determinado por los puntos O y P que pertenecen a la recta.

El vector característico del plano $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -10, -5) \parallel (1, -2, -1)$

Ecuación del plano: $1 \cdot (x-0) - 2 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-0) = 0$

La ecuación del plano es $\pi \equiv x - 2y - z = 0$

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

Plano σ tal que $s \subset \sigma$ y $\sigma \parallel r$ entonces:

- Si $s \subset \sigma$ el vector director de la recta $\vec{s}$ es perpendicular al vector característico del plano $\vec{n}_\sigma$ y $Q \in \sigma$ (punto de la recta s).
- Si $\sigma \parallel r$ el vector director de la recta $\vec{r}$ es perpendicular al vector característico del plano $\vec{n}_\sigma$.
- Si $\vec{n} \perp \vec{u}$ y $\vec{n} \perp \vec{v}$ entonces $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5, -6, 3)$
- $\sigma \equiv 5(x-1) - 6(y-0) + 3(z-2) = 0 \Rightarrow 5x - 6y + 3z - 11 = 0$

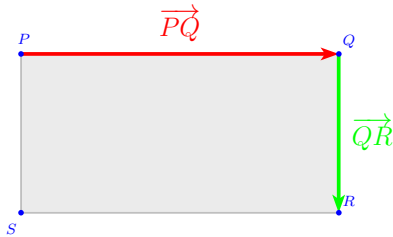
La ecuación del plano es $\sigma \equiv 5x - 6y + 3z - 11 = 0$

⑩ Los puntos $P(1,1,5)$ y $Q(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $PQRS$. El vértice R , consecutivo a Q , está en la recta $r \equiv x = \frac{6-y}{2} = \frac{z+1}{2}$.

a) Hallar las coordenadas de los vértices R y S .

b) Calcular el área del rectángulo.

a) Hallar las coordenadas de los vértices R y S .



$$\text{El vértice } R \in r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 6 - 2\alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases}, \text{ entonces}$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } R(\alpha, 6 - 2\alpha, -1 + 2\alpha)$$

Por ser rectángulo los vectores $\overrightarrow{PQ}(0,0,-3)$ y $\overrightarrow{QR} = (\alpha - 1, 5 - 2\alpha, -3 + 2\alpha)$ son ortogonales, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = (0, 0, -3) \cdot (\alpha - 1, 5 - 2\alpha, -3 + 2\alpha) = -3(-3 + 2\alpha) = 0 \implies \alpha = \frac{3}{2}$$

El vértice R tiene de coordenadas $R\left(\frac{3}{2}, 3, 2\right)$



Los vectores $\overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{QR}$ son equipolentes entonces tienen las mismas componentes. Sea $S(x, y, z)$:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = (x - 1, y - 1, z - 5) \\ \overrightarrow{QR} = (\frac{1}{2}, 2, 0) \end{array} \right\} \implies \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{3}{2} \\ y - 1 = 2 \implies y = 3 \\ z - 5 = 0 \implies z = 5 \end{cases}$$

El vértice S tiene de coordenadas $S = \left(\frac{3}{2}, 3, 5\right)$

b) Calcular el área del rectángulo.

Interpretación geométrica de la norma (módulo) del producto vectorial de dos vectores, $S_{\square} = \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}\|$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(6, -\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}(4, -1, 0) \text{ entonces } S_{\square} = \frac{3}{2}\sqrt{16+1} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

La superficie del rectángulo $PQRS$ es $S = \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ u}^2$

- ⑪ Hallar los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ es igual a cuatro unidades.

La recta en forma paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Si $P \in r$ entonces $P(1+4\alpha, 2-2\alpha, 3+\alpha)$ y $d(P, \pi) = 4$.

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 + 4\alpha - 2(2 - 2\alpha) + 2(3 + \alpha) - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 4$$

$$|1 + 4\alpha - 4 + 4\alpha + 6 + 2\alpha - 1| = 12 \implies |10\alpha + 2| = 12 \implies \begin{cases} 10\alpha + 2 = 12 & \implies \alpha = 1 \\ 10\alpha + 2 = -12 & \implies \alpha = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Sustituyendo:

Los puntos son $P(5, 0, 4)$ y $P'(-\frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5})$

- ⑫ Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$.

a) Hallar la ecuación general del plano π_1 que es paralelo π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$.

b) Hallar la ecuación general del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta $r \equiv$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}.$$

a) Hallar la ecuación general del plano π_1 que es paralelo π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$.

Radiación de planos de vértice el punto $P(1, -2, 2)$: $A(x-1) + B(y+2) + C(z-2) = 0$.

$$\pi_1 \parallel \pi \iff \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi} = (3, -1, 2).$$

$$\text{Ecuación del plano } 3(x-1) - 1 \cdot (y+2) + 2(z-2) = 0 \implies 3x - y + 2z - 9 = 0$$

La ecuación general del plano es $3x - y + 2z - 9 = 0$

b) Hallar la ecuación general del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta $r \equiv$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \perp \pi \iff \vec{n}_{\pi_2} \perp \vec{n}_{\pi} \\ r \subset \pi_2 \iff \vec{n}_{\pi_2} \perp \vec{u}_r \end{array} \right\} \iff \vec{n}_{\pi_2} \parallel \vec{u}_r \times \vec{n}_{\pi}$$

$$\text{Vector director de la recta } r: \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (3, 6, 3) \parallel (1, 2, 1).$$

$$\text{Vector normal del plano } \pi_2: \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5, 1, -7).$$

Un punto de la recta r que pertenece al plano π_2 . Si $z = 0$ en la ecuación de la recta: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

y un punto es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$.

Ecuación del plano π_2 : $5\left(x - \frac{2}{3}\right) + 1 \cdot \left(y + \frac{1}{3}\right) - 7(z - 0) = 0$

La ecuación general del plano π_2 es $5x + y - 7z - 3 = 0$

- ⑬ Dados los vectores $\vec{u} = (a, b, 1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, c)$ determina el valor de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$, donde $\times$ denota el producto vectorial. ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

Condición de perpendicularidad de vectores:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \implies \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 4, 1) \cdot (1, 2, c) = -3 + 8 + c = 5 + c; \quad 5 + c = 0 \implies c = -5$$

Producto vectorial de vectores:

$$\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-5b - 2, 1 + 5a, 2a - b) = (-3, 4, 1) \implies \begin{cases} -5b - 2 = -3 \\ 1 + 5a = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{1}{5} \text{ y } c = -5$$

Por las propiedades del producto vectorial los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ORTOGONALES ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 90°

- ⑭ Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1 + \lambda, 2, 1 - \lambda)$ y $C(1 + \lambda; 1 + \lambda; 2 + \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Probar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90° , independientemente del valor de λ .
- Determinar los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3.
- Para el valor de λ obtenido, hallar la superficie del triángulo.

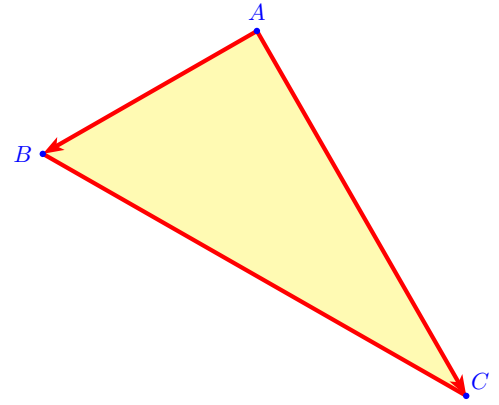
- a) Probar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90° , independientemente del valor de λ .

Si forman un ángulo de 90° :

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (\lambda, 1, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (\lambda, \lambda, 1 + \lambda) \end{array} \right\} \implies \boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} = (\lambda, 1, -\lambda) \cdot (\lambda, \lambda, 1 + \lambda) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = \boxed{0, \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$



b) Determinar los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3.

Por el apartado anterior, los puntos A, B y C determinan, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, un triángulo rectángulo de hipotenusa el lado $\overline{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = (0, \lambda - 1, 2\lambda + 1) \implies \|\overrightarrow{BC}\| = +\sqrt{(\lambda - 1)^2 + (2\lambda + 1)^2} = 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 9 \implies 5\lambda^2 + 2\lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{10} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

El triángulo rectángulo tiene de hipotenusa un segmento de longitud tres unidades si $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{7}{5} \end{cases}$

c) Para un valor de λ obtenido, hallar la superficie del triángulo.

$\lambda = 1$ entonces por la interpretación geométrica del MÓDULO del producto vectorial de dos vectores: $S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 0) \implies S = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 9} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

Para $\lambda = 1$ la superficie del triángulo rectángulo es $S = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2$

⑮ Dado el punto $P(1, 0, 2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$:

- Hallar la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta r .
- Hallar el punto simétrico de P respecto de la recta r .

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta r .

$$\text{Ecuación paramétrica de la recta } r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

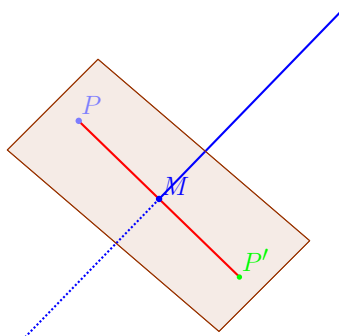
$P \in \pi \Rightarrow$ radiación de planos de vértice $P: A(x-1) + B(y-0) + C(z-2) = 0, \forall \vec{n} = (A, B, C)$

$$\pi \perp r \iff \vec{n}_\pi \parallel \vec{u}_r = (1, 2, -1)$$

$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-2) = 0 \implies x + 2y - z + 1 = 0$$

La ecuación del plano perpendicular es $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$

b) Hallar el punto simétrico de P respecto de la recta r .



El plano π es perpendicular a la recta, la intersección del plano y la recta, $r \cap \pi = M$, punto medio del segmento de extremos el punto P y su simétrico, P' .

$$M \in r \implies M(2 + \lambda, 2\lambda, 4 - \lambda)$$

$$M \in \pi \implies 2 + \lambda + 4\lambda - 4 + \lambda + 1 = 0 \implies 6\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{6}$$

sustituyendo en el punto $M \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6} \right)$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la media aritmética de las coordenadas de los extremos. Sea $P'(x, y, z)$ entonces:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{13}{6} \implies x = \frac{10}{3} \\ \frac{y+0}{2} = \frac{1}{3} \implies y = \frac{2}{3} \\ \frac{z+2}{2} = \frac{23}{6} \implies z = \frac{17}{3} \end{cases}$$

El punto simétrico es $P' \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{17}{3} \right)$

- ⑩ Se consideran las rectas, r_1 determinada por los puntos $P(0, 1, -1)$ y $Q(1, 1, 0)$, y $r_2 \equiv$
- $$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar la distancia entre las dos rectas.

a) Estudiar su posición relativa.

Posición relativa de dos rectas en forma vectorial:

$$r_1 \equiv \begin{cases} P(0, 1, -1) \\ \vec{u}_{r_1} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 1) \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} R(0, 1, 0) \in r_2 \\ \vec{v}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, -1, 3) \end{cases}$$

- $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ (componentes NO proporcionales), entonces $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, las rectas se cortan o se cruzan.
- Vector $\overrightarrow{PR} = (0, 0, 1)$ y el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es TRES entonces $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PR}) = 3$.

Las rectas r_1 y r_2 se cruzan.

b) Hallar la distancia entre las dos rectas.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (-1, 1, 1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La distancia entre las dos rectas es $d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ud.

- ⑪ Estudiar, y determinar en caso de existir, el plano que contiene a los puntos $P(1, 2, 1)$ y $Q(7, 0, 0)$ y que es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

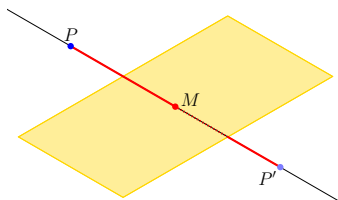
- Los puntos $p, Q \in \pi$ entonces el vector $\overrightarrow{PQ} = (6, -2, -1)$ es UN vector director del plano.
- El plano π es perpendicular a la recta r entonces $\vec{n}_\pi \parallel \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 6, -5)$
- Todos los vectores que sean directores del plano **son perpendiculares** al vector característico $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \text{ y } (1, 6, -5) \cdot (6, -2, -1) = 6 - 12 + 5 \neq 0$$

No existe ningún plano que cumpla las condiciones del problema

- ⑫ Dados el punto $P(1, 1, -1)$, la recta $r \equiv x = \frac{y+6}{4} = z-3$, y el plano $\pi \equiv 6x + 6z - 12 = 0$, se pide:
- Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π .
 - Hallar los puntos Q de la recta r que distan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidades del plano π .

a) Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π .



La recta s es perpendicular al plano π , la intersección del plano y la recta, $s \cap \pi = M$, punto medio del segmento de extremos el punto P y su simétrico P' .

Ecuaciones paramétricas de la recta s :

$$\begin{aligned} \text{Punto de la recta } P \in s. \\ s \perp \pi \iff \vec{v}_s \parallel \vec{n}_\pi = (1, 0, 1) \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

El punto medio $M \in s$ entonces $M(1 + \lambda, 1, -1 + \lambda)$ y $M \in \pi$, las coordenadas del punto verifican la ecuación del plano π :

$$1 + \lambda - 1 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = 1$$

el punto medio del segmento es $M(2, 1, 0)$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la media aritmética de las coordenadas de los extremos. Sea $P'(x, y, z)$ entonces:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = 2 \implies x = 3 \\ \frac{y+1}{2} = 1 \implies y = 1 \\ \frac{z-1}{2} = 0 \implies z = 1 \end{cases}$$

El punto simétrico es $P'(3, 1, 1)$

b) Hallar los puntos Q de la recta r que distan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidades del plano π .

$Q \in r$ entonces $Q(\alpha, -6 + 4\alpha, 3 + \alpha)$.

$$\text{Distancia de un punto a un plano: } d(Q, \pi) = \frac{|\alpha + 3 + \alpha - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2\alpha + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Resolviendo la ecuación en valor absoluto: } |2\alpha + 1| = 1 \implies \begin{cases} 2\alpha + 1 = 1 \implies \alpha = 0 \\ 2\alpha + 1 = -1 \implies \alpha = -1 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

Los puntos son $Q_1(0, -6, 3)$ y $Q_2(-1, -10, 2)$

⑲ Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto $P(-7, 2, -3)$ y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta $r \equiv (x, y, z) = (0, 4, 1) + t(1, 0, 0)$.

Radiación de planos de vértice el punto P : $A(x + 7) + B(y - 2) + C(z + 3) = 0, \forall \vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$

Sea O' el punto proyección del origen de coordenadas sobre un plano de la radiación, entonces:

- El punto O' pertenece a la recta r , $O' = (t, 4, 1)$ y al plano. Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$A(t + 7) + 2B + 4C = 0$$

- Por ser proyección ortogonal, el vector $\overrightarrow{OO'} = (t, 4, 1)$ es paralelo al vector $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$\overrightarrow{OO'} \parallel \vec{n} \iff \frac{A}{t} = \frac{B}{4} = \frac{C}{1}$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} At + 2b + 4C + 7A = 0 \\ B = 4C \\ A = t \cdot C \end{cases}$ por sustitución:

$$Ct^2 + 12C + 7tC = 0 \xrightarrow{C \neq 0} t^2 + 7t + 12 = 0 \implies t = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{Si } t_1 = -3 \implies -3(x + 7) + 4(y - 2) + z + 3 = 0 \implies 3x - 4y - z + 26 = 0$$

$$\text{Si } t_2 = -4 \implies -4(x + 7) + 4(y - 2) + z + 3 = 0 \implies 4x - 4y - z + 33 = 0$$

Los planos son $\pi_1 \equiv 3x - 4y - z + 26 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x - 4y - z + 33 = 0$