



Departament d'Ensenyament
INSTITUT JOAN RAMON BENAPRÈS
www.xtec.cat/iessitges
Tf: 93 894 37 12

Departament de matemàtiques
Teoria



Nombre real. 1r Batxillerat

Capítulo 1

El número real

1.1. Números irracionales

En el crédito común se estudia la necesidad de un conjunto mayor que el conjunto de los números racionales. Si queremos calcular la diagonal de un cuadrado de lado la unidad, fig(1.1), $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, no existe número racional tal que su cuadrado sea igual a 2, por lo tanto, deben existir números que no son racionales.

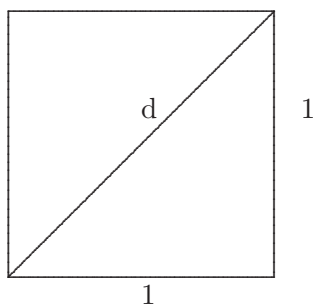


Figura 1.1: Diagonal de un cuadrado de lado la unidad

1.1.1. La irracionalidad de $\sqrt{2}$

La demostración que el número $\sqrt{2}$ es irracional se efectúa por el procedimiento matemático conocido por **reducción al absurdo**.

El método consiste en suponer que es falso lo que queremos demostrar y llegar a una contradicción.

Supongamos que el número $\sqrt{2}$ es racional, es decir, existen dos números enteros p y q , primos entre sí, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, la fracción es irreducible.

Despejando y elevando al cuadrado:

$$p = q \cdot \sqrt{2} \implies p^2 = 2 \cdot q^2$$

Si el cuadrado de un número entero (p) es par entonces dicho número entero p también es par, por lo tanto existirá un número entero m tal que $p = 2 \cdot m$ y elevando al cuadrado $p^2 = 4 \cdot m^2$ y sustituyendo:

$$4 \cdot m^2 = 2 \cdot q^2 \implies q^2 = 2 \cdot m^2$$

q^2 es par y repitiendo el razonamiento anterior q es par.

Conclusión los dos números enteros p y q son pares y hemos supuesto que eran primos entre sí, es una contradicción.

La contradicción viene de suponer que $\sqrt{2}$ era racional, por lo tanto, el número $\sqrt{2}$ es **no racional**, es decir, irracional. El número $\sqrt{2}$ no se puede expresar como cociente de dos números enteros ni como decimal exacto o periódico. Una expresión aproximada de $\sqrt{2}$ con 40 cifras decimales es:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488016887242096908078570$$

También son números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \pi, \dots$

Al conjunto formado por estos números no racionales recibe el nombre de conjunto de los irracionales y se representa por $\mathbb{I}$.

1.2. Números reales

El conjunto de los números reales es la la unión disjunta ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$) del conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ y de los irracionales $\mathbb{I}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Los conjuntos que conocemos son:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0 \right\}$	Conjunto de los números racionales.
$\mathbb{I}$	Conjunto de los números irracionales.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.

El conjunto de los reales es una ampliación de los racionales, esto implica una relación de inclusión, ($\subset$), entre los conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Gráficamente, fig(1.2), podemos representar las inclusiones con la ayuda de diagramas:

1.2.1. Construcción de números reales

Las raíces cuadradas de los números naturales se pueden construir con regla y compás, fig(1.3), basta aplicar reiteradas veces el teorema de Pitágoras:

Ejercicios

1. Completar la siguiente tabla con los símbolos $\in$ (pertenece) y $\notin$ (no pertenece):

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$3,58$					
$-\sqrt{49}$					
$\sqrt{17}$					
$\frac{\sqrt{3}}{3}$					
$\frac{121}{11}$					
$3,14114111411114\dots$					

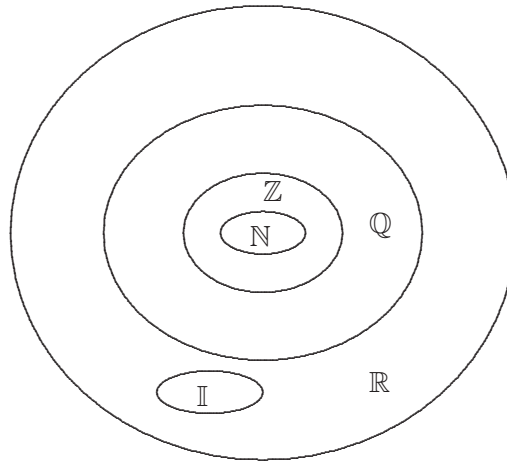


Figura 1.2: Conjuntos numéricos

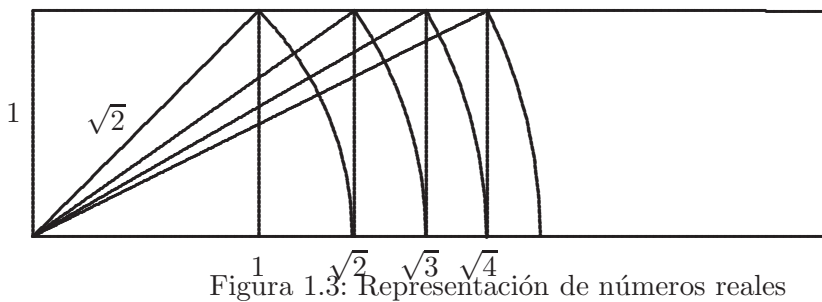


Figura 1.3: Representación de números reales

2. Escribir, si es posible, un número real no racional.
3. Escribir, si es posible, un número irracional no racional.
4. Escribir, si es posible, un número entero no natural.
5. Demostrar la no racionalidad del número $\sqrt{5}$.
6. Construir un rectángulo cuya diagonal mida $\sqrt{5}$.

1.3. Operaciones con números reales

En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones internas que reciben el nombre de suma (+) y producto ($\cdot$) de números reales.

Propiedades de la suma

- **Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$
- **Elemento neutro:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad a + 0 = 0 + a = a$
- **Elemento opuesto:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$
- **Conmutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a + b = b + a$

Propiedades del producto

- **Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- **Elemento unidad:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- **Elemento inverso:** $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
- **Conmutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \cdot b = b \cdot a$

Propiedad distributiva

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{se verifica} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

La igualdad anterior escrita de derecha a izquierda recibe el nombre de sacar factor común.

Las operaciones **sustracción** y **división** se definen, respectivamente, aplicando el opuesto y el inverso:

- **Sustracción:** $a - b = a + (-b)$
- **División:** $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ siendo $b \neq 0$

1.4. Orden en los números reales

Definición 1.1 *Dados dos números reales cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, diremos que a es **menor o igual** a b y se denota $a \leq b$, si se verifica que la diferencia entre el elemento b y a es **positiva o cero**.*

$$a \leq b \iff b - a \quad \text{positiva o cero}$$

Propiedades

El conjunto de los reales con la operación menor o igual, $(\mathbb{R}, \leq)$, verifica las siguientes propiedades

- **Reflexiva:** $a \leq a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- **Antisimétrica:** Si $\begin{cases} a \leq b \\ y \\ b \leq a \end{cases} \implies a = b$
- **Transitiva:** si $\begin{cases} a \leq b \\ y \\ b \leq c \end{cases} \implies a \leq c$

Diremos que los reales es un conjunto totalmente ordenado.

Lee y aprende

Símbolo	Notación	Cómo se lee
$\leq$	$a \leq b$	a es menor o igual que b o b es mayor o igual que a
$<$	$a < b$	a es menor estricto que b o b es mayor estricto que a
$\geq$	$a \geq b$	a es mayor o igual que b o b es menor o igual que a
$>$	$a > b$	a es mayor estricto que b o b es menor estricto que a

1.5. Densidad de $\mathbb{R}$

En los conjuntos de los números naturales y de los enteros, entre dos números consecutivos no existe ningún otro número ni natural ni entero.

En el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$, entre dos números racionales existen infinitos números racionales, por ejemplo, entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ podemos escribir infinitos números:

$$\frac{3}{5} = \frac{30}{50} < \frac{31}{50} < \frac{32}{50} < \frac{33}{50} < \dots < \frac{39}{50} < \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{300}{500} < \frac{301}{500} < \frac{302}{500} < \frac{303}{500} < \dots < \frac{399}{500} < \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$

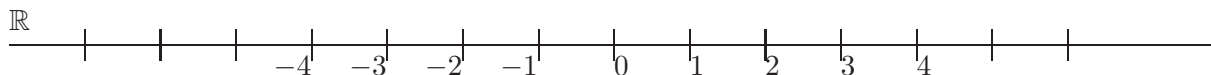
Y así podríamos construir infinitos números racionales.

La propiedad anterior se enuncia diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es denso. Pero no todos los números son racionales, es decir, en $\mathbb{Q}$, hay agujeros. En el conjunto de los reales $\mathbb{R}$, entre dos números reales existen infinitos números racionales e irracionales, es decir, no hay agujeros. El conjunto $\mathbb{R}$ además de ser denso es **completo**.

Representación de $\mathbb{R}$

Los números reales se representan sobre la recta real. El cero divide a la recta en dos semirectas:

- La semirecta de la derecha recibe el nombre de **semieje positivo**: $\mathbb{R}^+$.
- La semirecta de la izquierda recibe el nombre de **semieje negativo**: $\mathbb{R}^-$.



1.6. Intervalos

Algunos de los subconjuntos del conjunto de los reales reciben el nombre de intervalos.

1.6.1. Definiciones

- Se llama **intervalo abierto** de extremos a y b y se representa por $(a, b) =]a, b[$ al conjunto de todos los números reales x tales que $a < x < b$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- Se llama **intervalo cerrado** de extremos a y b y se representa por $[a, b]$ al conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$:

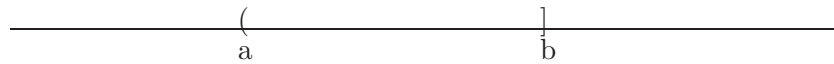
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- Se llama **intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha** de extremos a y b y se representa por $[a, b)$ al conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x < b$:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

- Se llama **intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha** de extremos a y b y se representa por $(a, b]$ al conjunto de todos los números reales x tales que $a < x \leq b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Se llama **longitud de un intervalo** (a, b) , $a < b$ a la diferencia entre sus extremos: $b - a$

El intervalo abierto de extremos $-\infty$ y $+\infty$ es el conjunto $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Ejercicios: Definir, representar y hallar su longitud, si es posible, de los siguientes intervalos:

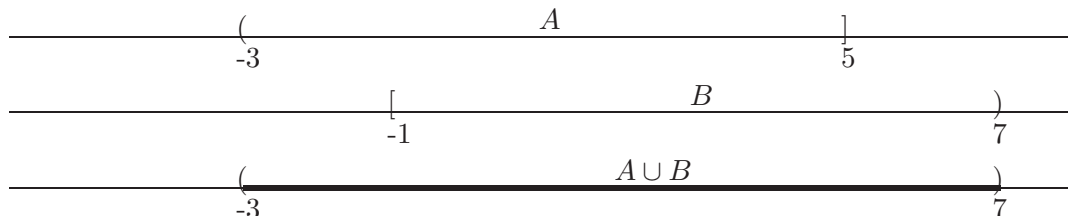
- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| 1. $(-2, 5)$ | 4. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$ | 7. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ |
| 2. $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ | 5. $[-2, -3)$ | 8. $(-16, 15]$ |
| 3. $[-\sqrt{2}, 3)$ | 6. $(-\infty, -1]$ | 9. $\left(-\frac{12}{5}, \frac{7}{2}\right)$ |

1.6.2. Operaciones con intervalos

Definición 1.2 (Unión de intervalos) Dados dos intervalos A y B de $\mathbb{R}$ se llama **unión** de A y B y se escribe $A \cup B$ al intervalo formado por los elementos de A o de B .

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbf{A} \text{ ó } x \in \mathbf{B}\}$$

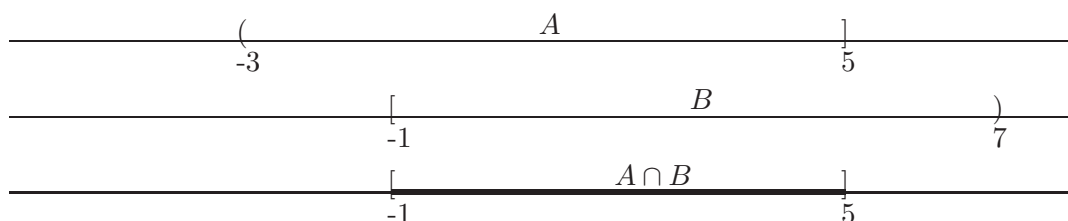
Ejemplo: Si $A = (-3, 5]$ y $B = [-1, 7)$ entonces $A \cup B = (-3, 7)$



Definición 1.3 (Intersección de intervalos) Dados dos intervalos A y B de $\mathbb{R}$ se llama **intersección** de A y B y se escribe $A \cap B$ al intervalo formado por los elementos comunes de A y de B .

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbf{A} \text{ y } x \in \mathbf{B}\}$$

Ejemplo: Si $A = (-3, 5]$ y $B = [-1, 7)$ entonces $A \cap B = [-1, 5]$



- La unión de dos intervalos, no vacíos, siempre será un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.
- La intersección de dos intervalos puede ser el conjunto vacío: $\emptyset$

Ejemplo: Si $A = (-3, 1]$ y $B = [1, 1, 7)$ entonces $A \cap B = \emptyset$, no hay ningún número real que pertenezca, simultáneamente, a los dos intervalos.

Propiedades

Propiedad	Operaciones	
	Unión	Intersección
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.7. Valor absoluto

Definición 1.4 (Valor absoluto) Sea x un número real. Se llama **valor absoluto** de x y se denota $|x|$ al número:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de un número es **siempre positivo o nulo**.

Ejemplos:

1. $|-3| = 3$

3. $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

5. $|\pi| = \pi$

2. $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

4. $-|-3| = -3$

6. $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Capítulo 2

Potencias

2.1. Potencias de base real y exponente entero

En los cursos anteriores se han estudiado las potencias de base un número racional, en este crédito estudiaremos las potencias de base cualquier número y de exponente un número entero.

Definición 2.1 (Potencias de exponente natural) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se llama potencia de base a y de exponente n y se denota por a^n al producto de la base (a) por sí misma n veces.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ factores}}$$

Ejemplos:

1. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

3. $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

2. $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

4. $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$

Definición 2.2 (Potencias de exponente entero) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se llama potencia de base a y de exponente n y se denota por a^n :

■ $a^0 = 1$

■ $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ factores}}$ si $n \in \mathbb{N}$

■ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ siendo $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$

Ejemplos:

1. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

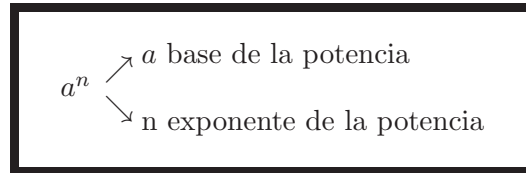
3. $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

2. $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{625}$

4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^4} = 4^4 = 16$

Lee y aprende

Es **muy importante** en una potencia distinguir la base y el exponente:



Ejemplos

Potencia	Base	Exponente
$(-2)^{-4}$	-2	-4
-2^{-4}	2	-4
$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{1}{3}$	3

2.1.1. Signos de las potencias

Aplicando la definición y la regla de los signos:

Base	Exponente	Signo	Ejemplo
Positiva	Par	Positivo	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
Positiva	Impar	Positivo	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
Negativa	Par	Positivo	$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
Negativa	Impar	Negativo	$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

Ejercicios

Completa el siguiente cuadro:

Potencia	Base	Exponente	Signo	Resultado
-5^{-3}				
$(-2)^{-3}$				
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$				
$-\left(\frac{1}{5}\right)^2$				
4^{-5}				
-3^0				
$-\sqrt{3}^2$				

2.2. Propiedades de las potencias

Propiedad 2.1 *El producto de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente **la suma de los exponentes**.*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Demostración:

La demostración de esta propiedad y de las posteriores, se basa en la definición de potencia. La demostraremos para exponentes naturales y después por extensión a exponentes enteros.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ factores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ factores}} = \\ &= \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{(n+m) \text{ factores}} = a^{n+m} \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -32 \quad x^2 \cdot x^4 = x^{2+4} = x^6$$

Ejercicio: Aplicando la propiedad anterior demostrar que $a^0 = 1$, .

Propiedad 2.2 *El cociente de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente **la diferencia de los exponentes**.*

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

La demostración se deja como ejercicio para el alumno.

Ejemplos:

$$\frac{5^{-3}}{5^{-4}} = 5^{-3-(-4)} = 5^{-3+4} = 5^1 = 5 \quad \frac{x^{-5}}{x^2} = x^{-5-2} = x^{-7} = \frac{1}{x^7}$$

Ejercicio: Aplicando la propiedad anterior demostrar que $a^0 = 1$, .

Propiedad 2.3 *El producto de dos potencias de distinta base y del mismo exponente es igual, a una potencia del mismo exponente y de base **el producto de las bases**.*

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Demostración:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ factores}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{n \text{ factores}} = \\ &= \overbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}^{n \text{ factores}} = (a \cdot b)^n \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36 \quad x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3$$

Propiedad 2.4 *El cociente de dos potencias de distinta base y del mismo exponente es igual, a una potencia del mismo exponente y de base **el cociente de las bases**.*

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ siendo } b \neq 0$$

La demostración se deja como ejercicio para el alumno.

Ejemplos:

$$\frac{(-3)^2}{(-6)^2} = \left(\frac{-3}{-6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Propiedad 2.5 *La potencia de una potencia es otra potencia de igual base y de exponente **el producto de los exponentes**.*

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Demostración:

Consideremos el caso de $n > 0$ y $m > 0$. Los restantes casos se dejan como ejercicio para el alumno.

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}^{m \text{ factores}} = a^{\overbrace{n + n + \dots + n}^{m \text{ sumandos}}} = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos:

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729 \qquad (x^2)^{-3} = x^{2 \cdot (-3)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$

Comprobar con ejemplos las siguientes propiedades de las potencias:

- Si $0 < a < 1$ y $n < m$ entonces $a^n > a^m$.
- Si $a > 1$ y $n < m$ entonces $a^n < a^m$.
- Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $a^n = a^m$ entonces $n = m$.

Capítulo 3

Radicales

3.1. Definición y notaciones

Definición 3.1 (Radical de índice n) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, no nulo, se llama raíz n -ésima de a , a un número $b \in \mathbb{R}$, si existe, tal que elevado a la potencia n nos dé el número a

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Nomenclatura de $\sqrt[n]{a}$
a : Radicando
n : Índice de la raíz ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$)
$\sqrt{}$: Símbolo del radical

Casos particulares

- Si el índice es 2, entonces $\sqrt{a}$ se lee **raíz cuadrada** de a .
- Si el índice es 3, entonces $\sqrt[3]{a}$ se lee **raíz cúbica** de a .

Ejemplos:

1. $\sqrt{4} = \pm 2$. Efectivamente: $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$.
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$. Efectivamente: $(-3)^3 = -27$.
3. $\sqrt[5]{32} = 2$. Efectivamente: $2^5 = 32$.
4. $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$. Efectivamente, no existe ningún número real tal que su cuadrado sea igual a un número negativo.

3.1.1. Relación entre potencia y radical

La potenciación y la radicación son operaciones inversas, lo mismo que la suma y la diferencia, la multiplicación y la división. Por ello las propiedades de una operación van estrechamente ligadas con las de la operación inversa.

Proposición 3.1 La potencia n -ésima de la raíz n -ésima es igual al radicando.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{a} = b \stackrel{\text{def}}{\iff} b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a} \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Proposición 3.2 La raíz n -ésima de la potencia n -ésima es igual a la base.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{b} = a \iff a^n = b \quad \text{sustituyendo el valor de } b \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplos:

$$1. \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

$$3. (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

$$2. \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$4. (\sqrt[5]{x+y})^5 = x+y$$

3.1.2. Número de raíces reales de un radical

Aplicando la definición :

Índice	Radicando	N.º de raíces en $\mathbb{R}$	Ejemplo
Par	Positivo	Dos raíces reales opuestas	$\sqrt[4]{16} = \pm 2$
Par	Negativo	No tiene raíces en $\mathbb{R}$	$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$
Impar	Positivo	Una raíz real positiva	$\sqrt[5]{243} = 3$
Impar	Negativo	Una raíz real negativa	$\sqrt[3]{-8} = -2$

Ejercicios

Completa el siguiente cuadro:

Radical	Índice	Signo del radicando	N.º de raíces en $\mathbb{R}$	Resultado
$\sqrt[4]{81}$				
$\sqrt[3]{343}$				
$\sqrt{\frac{1}{16}}$				
$\sqrt[5]{-32}$				
$\sqrt[6]{-1}$				
$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$				

3.2. Teorema fundamental. Radicales equivalentes

Teorema 3.1 Si el índice y el exponente del radicando de un radical se multiplican (dividen) por un mismo número, no nulo, el radical que se obtiene es **equivalente** al dado, teniendo en cuenta la siguiente tabla:

	'Índice	
Radicando	n Par	n Impar
$a^m > 0$	$\begin{cases} +\sqrt[n]{a^m} = +\sqrt[np]{a^{mp}} \\ -\sqrt[n]{a^m} = -\sqrt[np]{a^{mp}} \end{cases}$	$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[np]{a^{mp}} & \text{si } n \cdot p \text{ impar} \\ +\sqrt[np]{a^{mp}} & \text{si } n \cdot p \text{ par} \end{cases}$
$a^m < 0$	$\notin \mathbb{R}$	$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[np]{a^{mp}} & \text{si } n \cdot p \text{ impar} \\ -\sqrt[np]{a^{mp}} & \text{si } n \cdot p \text{ par} \end{cases}$

Ejemplos:

- $\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[12]{3^6} = \dots$
- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[9]{5^3} = \sqrt[27]{5^9} = \dots$
- $\sqrt[3]{2} = +\sqrt[6]{2^2} = +\sqrt[12]{2^4} = \dots$
- $\sqrt[5]{-3} = -\sqrt[10]{(-3)^2} = -\sqrt[40]{(-3)^8} = \dots$

Si aplicamos la propiedad fundamental de los radicales, **los signos de los radicales** se deben mantener.

3.2.1. Aplicaciones de la propiedad fundamental

3.2.1.1. Radicales irreducibles

El teorema fundamental nos permite transformar un radical en otro tal que el índice y el exponente del radicando sean primos entre sí. De esta manera obtendremos un radical **irreducible**.

Para encontrar el radical irreducible de $\sqrt[n]{a^m}$ se calcula el m.c.d.(n, m) = p y se divide el índice y el exponente por p .

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{2^2}$ el m.c.d.(4, 2) = 2 y el radical irreducible es $\sqrt[2]{2}$.
- $\sqrt[8]{3^6}$ el m.c.d.(8, 8) = 2 y el radical irreducible es $\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$.
- $\sqrt[54]{2^{81}}$ el m.c.d.(54, 81) = 27 se obtiene $\sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$.

3.2.1.2. Reducción de radicales a índice común

Reducir un conjunto de radicales a índice común es encontrar radicales **equivalentes** a los dados que tengan todos el mismo índice.

El procedimiento es similar a la de reducción de fracciones a denominador común:

- Se calcula el **m.c.m.** de todos los índices, que será el índice común.
- Se divide el índice común por cada uno de los índices y el cociente se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplos:

- Reducir a índice común los siguientes radicales: $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{3}$

El m.c.m.(2, 4, 6) = 12 por lo tanto el índice común de los tres radicales es 12:

- $12 : 2 = 6 \quad \sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$
- $12 : 4 = 3 \quad \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$
- $12 : 6 = 2 \quad \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$

2. Reducir a índice común: $\sqrt{5ax}$, $\sqrt[5]{3a^2x^3}$, $\sqrt[6]{2x^5}$ El m.c.m.(2, 5, 6) = 30 por lo tanto el índice común de los tres radicales es 30:

$$\begin{aligned} \blacksquare 30 : 2 = 15 \quad \sqrt{5ax} &= \sqrt[30]{(5ax)^{15}} = \sqrt[30]{5^{15}a^{15}x^{15}} \\ \blacksquare 30 : 5 = 6 \quad \sqrt[5]{3a^2x^3} &= \sqrt[30]{(3a^2x^3)^6} = \sqrt[30]{3^6a^{12}x^{18}} \\ \blacksquare 30 : 6 = 5 \quad \sqrt[6]{2x^5} &= \sqrt[30]{(2x^5)^5} = \sqrt[30]{2^5x^{25}} \end{aligned}$$

3.3. Operaciones con radicales

3.3.1. Producto de radicales

3.3.1.1. Los radicales tienen el mismo índice

Propiedad 3.1 *El producto de dos radicales del mismo índice es igual a un radical de índice el común y de radicando el producto de los radicandos.*

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Demostración:

La demostración se basa en la definición de radical y en las propiedades de las potencias:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{a} = x &\iff a = x^n \\ \sqrt[n]{b} = y &\iff b = y^n \end{aligned} \right\} \implies a \cdot b = x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$$

aplicando la definición de radical: $x \cdot y = \sqrt[n]{a \cdot b}$

sustituyendo los valores de x e y : $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{20}$
- $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2 \cdot 6 \cdot 5} = \sqrt[4]{60}$
- $\sqrt{2xy} \cdot \sqrt{3x} = \sqrt{6x^2y}$

3.3.1.2. Los radicales tienen distinto índice

Para multiplicar radicales de distinto índice debemos aplicar el apartado anterior:

- Transformar los radicales dados en radicales equivalentes que tengan todos el mismo índice.
- Efectuar el producto de los radicales con el mismo índice.

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{432}$
- $\sqrt{2x} \cdot \sqrt[4]{3y} \cdot \sqrt[6]{xy} = \sqrt[12]{(2x)^6} \cdot \sqrt[12]{(3y)^3} \cdot \sqrt[12]{(xy)^2} = \sqrt[12]{2^6 x^6 3^3 y^3 x^2 y^2} = \sqrt[12]{2^6 3^3 x^8 y^5}$

3.3.2. Aplicaciones del producto de radicales

3.3.2.1. Extracción de factores de un radical

La propiedad de multiplicar radicales del mismo índice se puede leer de derecha a izquierda:

Propiedad 3.2 *La raíz n -ésima de un producto es igual al producto de las raíces n -ésimas de cada uno de los factores.*

Este resultado permite extraer factores de un radical.

Ejemplos:

$$1. \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

En general, para extraer factores de un radical, $\sqrt[n]{a^m \cdot b^n \cdot c^p}$, se sigue el siguiente procedimiento:

- Si los exponentes de las potencias son menores que el índice del radical, **no** se pueden extraer factores.
- Se divide cada exponente, mayor o igual, que el índice por él. El cociente de la división será el exponente al cual estará elevada la base fuera del radical y el resto, es el exponente con el cual queda en el interior del radical.

Ejemplos:

1. Extraer los factores del radical: $\sqrt[4]{81a^6b^{23}c^{19}}$ El número lo descomponemos en sus factores primos: $81 = 3^4$.

- $4 : 4 = 1$ por lo tanto extraemos fuera del radical 3^1 .
- $6 : 4$ de cociente 1 y de resto 2: Fuera del radical: a^1 en el radicando a^2 .
- $23 : 4$ de cociente 5 y de resto 3: Fuera del radical: b^5 en el radicando b^3 .
- $19 : 4$ de cociente 4 y de resto 3: Fuera del radical: c^4 en el radicando c^3 .

$$\sqrt[4]{81a^6b^{23}c^{19}} = 3ab^5c^4\sqrt[4]{a^2b^3c^3}$$

2. Simplificar el radical: $\sqrt{9x^2 + 9y^2}$

$$\sqrt{9x^2 + 9y^2} = \sqrt{9(x^2 + y^2)} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Atención no se pueden extraer ni x^2 ni y^2 son sumandos.

3.3.2.2. Introducir factores en un radical

Es la operación inversa de introducirlos. El procedimiento es el inverso. Para introducir un factor en un radical elevamos dicho factor al índice del radical.

Ejemplos:

$$1. 3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{162}$$

$$2. 2a^3\sqrt[5]{2a^2b} = \sqrt[5]{2 \cdot a^2 \cdot b \cdot 2^5 \cdot a^{3 \cdot 5}} = \sqrt[5]{64a^{17}b^2}$$

3.3.3. Cociente de radicales

3.3.3.1. Los radicales tienen el mismo índice

Propiedad 3.3 *El cociente de dos radicales del mismo índice es igual a un radical de índice el común y de radicando el cociente de los radicandos.*

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

La demostración se basa en la definición de radical y en las propiedades de las potencias y se deja como ejercicio para el alumno.

Ejemplos:

1. $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{x}{2}}$
2. $\frac{\sqrt[5]{12}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{12}{4}} = \sqrt[3]{3}$
3. $\frac{\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{xy}} = \sqrt[4]{\frac{4x^3y}{xy}} = \sqrt[4]{4x^2} = \sqrt[4]{2^2x^2} = \sqrt{2x}$

3.3.3.2. Los radicales tienen distinto índice

Para dividir radicales de distinto índice debemos aplicar el apartado anterior:

1. Transformar los radicales dados en radicales equivalentes que tengan todos el mismo índice.
2. Efectuar el cociente de los radicales con el mismo índice.

Ejemplos:

1. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{27}}$
2. $\frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[12]{(2x^2)^4}}{\sqrt[12]{x^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4x^8}{x^3}} = \sqrt[12]{16x^5}$

3.3.4. Potencia de una raíz

Propiedad 3.4 *La potencia m-ésima de una raíz de índice n es igual a la raíz de índice n de la potencia m-ésima del radicando.*

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

Aplicando la definición y el producto de potencias:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^m &= \overbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}^{m \text{ factores}} = \\ &= \sqrt[n]{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ factores}}} = \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

Ejemplos:

1. $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$
2. $(\sqrt[5]{3x^2y})^3 = \sqrt[5]{(3x^2y)^3} = \sqrt[5]{3^3x^6y^3} = x\sqrt[5]{27xy^3}$

3.3.5. Raíz de una raíz

Propiedad 3.5 La raíz m -ésima de una raíz de índice n es igual a la raíz de índice $m \cdot n$ del radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Demostración:

Aplicando la definición de raíz y las propiedades:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = b \iff \sqrt[n]{a} = b^m \iff a = (b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

aplicando la definición de raíz

$$b = \sqrt[m \cdot n]{a} \text{ igualando el valor de } b$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6}$
2. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}} = \sqrt[12]{x^3} = \sqrt[4]{x}$
3. $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x-y}}} = \sqrt[30]{x-y}$

Todas las propiedades anteriores se pueden aplicar también leyéndolas de derecha a izquierda y por lo tanto nos sirven para trabajar con los radicales.

Ejemplos:

1. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2 \cdot 3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt{2}$
2. $\sqrt{a^5} = (\sqrt{a})^5$

3.3.6. Suma y diferencia de radicales

Definición 3.2 (Radicales semejantes) Dos radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferir en el coeficiente que los multiplica.

Para saber si dos o más radicales son semejantes debemos aplicar las propiedades anteriores: extraer factores, introducir factores, etc.

Ejemplos:

Estudiar si son semejantes los siguientes radicales:

1. $\sqrt{x-y}$, $3 \cdot \sqrt{x-y}$, $-2\sqrt{x-y}$, Efectivamente todos tienen de índice 2 y de radicando $x-y$, por definición son semejantes.
2. $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{3x^2}$. Descomponiendo los radicandos y extrayendo los factores:
 - $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
 - $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$
 - $\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

Todos tienen de índice 2 y de radicando 3. Son semejantes.

3. $\sqrt[4]{144}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{108}$. Descomponiendo los radicandos y extrayendo los factores:

- $\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$
- $\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
- $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Son, efectivamente, semejantes.

Suma algebraica de radicales

- La suma algebraica de radicales **sólo** se puede efectuar si los radicales son **semejantes**.

En dicho caso se extrae factor común el radical semejante y se suman los coeficientes.

- Si los radicales **no son semejantes** la suma se deja indicada.

Ejemplos:

1. Efectuar, si es posible, las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125} + \sqrt{50} = \\
 &= 2\sqrt{2^2 \cdot 5} + 4\sqrt{2^4 \cdot 5} - 5\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + 3\sqrt{5^3} + \sqrt{5^2 \cdot 2} = \\
 &= 4\sqrt{5} + 16\sqrt{5} - 30\sqrt{5} + 15\sqrt{5} + 5\sqrt{2} = (4 + 16 - 30 + 15) \cdot \sqrt{5} + 5\sqrt{2} = \\
 &= 5\sqrt{5} + 5\sqrt{2} = 5(\sqrt{5} + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

2. Efectuar, si es posible, las siguientes operaciones:

$$\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{3^4} = 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = (2 - 3)\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{3}$$

3.4. Racionalizar

En las fracciones aparecen radicales en el denominador, la operación de encontrar una fracción equivalente a la dada que no tenga radicales en el denominador, se le llama **racionalizar la fracción** o simplemente, **racionalizar** denominadores. En este crédito estudiaremos dos tipos de denominadores:

3.4.1. El denominador es un radical de índice n

3.4.1.1. Caso general

Se multiplica numerador y denominador por la raíz de índice n y de radicando cada uno de los factores elevados a la **diferencia** entre el índice y el exponente respectivo.

Sea la fracción: $\frac{M}{\sqrt[n]{a^p \cdot b^q}}$ siendo $p, q < n$:

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{\sqrt[n]{a^p \cdot b^q}} &= \frac{M \cdot \sqrt[n]{a^{n-p} \cdot b^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^p \cdot b^q} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p} \cdot b^{n-q}}} = \frac{M \cdot \sqrt[n]{a^{n-p} \cdot b^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^p \cdot a^{n-p} \cdot b^q \cdot b^{n-q}}} = \\
 &= \frac{M \cdot \sqrt[n]{a^{n-p} \cdot b^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^n \cdot b^n}} = \frac{M \cdot \sqrt[n]{a^{n-p} \cdot b^{n-q}}}{a \cdot b}
 \end{aligned}$$

3.4.1.2. Caso particular: Radicales cuadráticos

Si el denominador es una radical cuadrático se multiplica numerador y denominador por dicha raíz cuadrada.

$$\frac{M}{\sqrt{a}} = \frac{M \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{M \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{M \cdot \sqrt{a}}{a}$$

Ejemplos: Racionalizar las fracciones:

1. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
3. $\frac{ab}{\sqrt[3]{a^4b^2}} = \frac{ab}{a\sqrt[3]{ab^2}} = \frac{ab\sqrt[3]{a^2b}}{a \cdot \sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b}} = \frac{b\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^3b^3}} = \frac{b\sqrt[3]{a^2b}}{ab} = \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{a}$

3.4.2. El denominador es una suma algebraica de dos radicales cuadráticos

Definición 3.3 (Conjugado de un binomio) *El conjugado de una suma de dos sumandos es igual a la suma de uno de ellos con el opuesto del otro.*

Ejemplos: Calcular los conjugados de:

1. $a + b$ sus conjugados son $\begin{cases} -a + b \\ \text{ó} \\ a - b \end{cases}$
2. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ sus conjugados son $\begin{cases} \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \text{ó} \\ -\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{cases}$
3. $-\sqrt{5} - \sqrt{3}$ sus conjugados son $\begin{cases} -\sqrt{5} + \sqrt{3} \\ \text{ó} \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{cases}$

Para racionalizar una fracción tal que su denominador sea la suma algebraica de dos radicales cuadráticos, se multiplican numerador y denominador por el **conjugado del denominador**.

En el denominador siempre aparecerá el producto de una suma por una diferencia de radicales cuadráticos que es igual a la diferencia de cuadrados y aplicando la propiedad fundamental de los radicales, ($\sqrt{a^2} = a$), se racionalizará la fracción.

Ejemplos: Racionalizar y simplificar:

1.

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{-1} = \\ &= -3(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{a-b}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} &= \frac{(a-b)(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})}{(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}) \cdot (a\sqrt{b}+b\sqrt{a})} = \frac{(a-b)(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})}{(a\sqrt{b})^2 - (b\sqrt{a})^2} = \\
 &= \frac{(a-b)(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})}{a^2b - b^2a} = \frac{(a-b)(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})}{ab(a-b)} = \\
 &= \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{ab}
 \end{aligned}$$

3.5. Potencias de exponente fraccionario

Definición 3.4 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$ entonces se llama potencia de base a y de exponente $\frac{p}{n}$ al radical de índice n y de radicando a^p .

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Ejemplos: Escribir como potencia de exponente fraccionario los siguientes radicales:

1. $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$

3. $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{3/4}$

2. $\sqrt[5]{a^3} = a^{3/5}$

4. $\sqrt{a^3 \cdot b} = (a^3 \cdot b)^{1/2} = a^{3/2} \cdot b^{1/2}$

Las propiedades de las potencias de números reales con exponente racional son las mismas que las de las potencias con exponente entero. Y su demostración se basa en las propiedades de los radicales.

Las operaciones de multiplicar, dividir, potencia y radicación de radicales se pueden efectuar mediante potencias de exponente fraccionario.

En particular:

La raíz de índice n de a es igual a la potencia de base a y de exponente $\frac{1}{n}$.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Demostración:

Consideramos $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$ entonces $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Podemos deducir: $a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1 = a$ Aplicando las propiedades de las potencias: $(a^{1/n})^n = a$ y por la definición de raíz de índice n : $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$