

- ① Efectuar: $\frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}}$. La solución se puede efectuar de, al menos, dos formas:

(I) Aplicando los procedimientos para multiplicar(dividir) radicales. El m.c.m. de los índices de todos los radicales es: m.c.m.(2, 3, 4, 15) = 60 y $\frac{60}{2} = 30$, $\frac{60}{3} = 20$, $\frac{60}{4} = 15$ y $\frac{60}{15} = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}} &= \frac{\sqrt[60]{(ab)^{30}} \cdot \sqrt[60]{(a^2)^{20}} \cdot \sqrt[60]{(a^2b^2)^{15}}}{\sqrt[60]{(a^{12}b^{14})^4}} \stackrel{(1)}{=} \sqrt[60]{\frac{a^{30}b^{30}a^{40}a^{30}b^{30}}{a^{48}b^{56}}} = \sqrt[60]{\frac{a^{100}b^{60}}{a^{48}b^{56}}} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sqrt[60]{a^{52}b^4} = \sqrt[15 \cdot 4]{(a^{13}b)^4} \stackrel{(3)}{=} \boxed{\boxed{\sqrt[15]{a^{13}b}}} \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Propiedades de las potencias y producto(cociente) de radicales del mismo índice.
- (2) Producto y cociente de potencias de la misma base.
- (3) Raíz de raíz.

(II) Propiedades de los radicales y racionalizar el denominador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}} &\stackrel{(1)}{=} \frac{\sqrt{ab} \sqrt[3]{a^2} \sqrt{ab}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}} \stackrel{(2)}{=} \frac{ab \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}} \stackrel{(3)}{=} \frac{ab \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}} \cdot \frac{\sqrt[15]{a^3b}}{\sqrt[15]{a^3b}} = \frac{\cancel{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[15]{a^3b}}{\cancel{ab}} \stackrel{(4)}{=} \\ &= \sqrt[15]{(a^2)^5} \sqrt[15]{a^3b} = \sqrt[15]{a^{10}a^3b} = \boxed{\boxed{\sqrt[15]{a^{13}b}}} \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) $\sqrt[4]{a^2b^2} = \sqrt[2 \cdot 2]{(ab)^2} = \sqrt{ab}$
- (2) En el numerador: $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} = ab$
- (3) Racionalizamos multiplicando numerador y denominador por: $\sqrt[15]{a^{15-12}b^{15-14}} = \sqrt[15]{a^3b}$
- (4) m.c.m. de los índices: m.c.m.(3, 15) = 15.

- ② Calcular: $3\sqrt{200} - \sqrt{2178} - 5\sqrt{\frac{32}{25}} + 3\sqrt{\frac{50}{9}}$. Para efectuar la suma algebraica de radicales deben ser semejantes: mismo índice y radicando, difieren en el coeficiente. Descomponemos factorialmente los radicandos:

$$\begin{array}{r|l} 200 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 200 = 2^3 \cdot 5^2; \quad \begin{array}{r|l} 2178 & 2 \\ 1089 & 3 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 2178 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2; \quad \begin{array}{r|l} 32 & 2^5 \\ 25 & 5^2 \\ 50 & 2^2 \cdot 5 \\ 9 & 3^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{200} - \sqrt{2178} - 5\sqrt{\frac{32}{25}} + 3\sqrt{\frac{50}{9}} &= 3\sqrt{2^3 \cdot 5^2} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 11^2} - 5\sqrt{\frac{2^5}{5^2}} + 3\sqrt{\frac{2 \cdot 5^2}{3^2}} \stackrel{(1)}{=} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{2} - 3 \cdot 11\sqrt{2} - \frac{\cancel{5} \cdot 2^2}{\cancel{5}}\sqrt{2} + \frac{\cancel{3} \cdot 5}{\cancel{3}}\sqrt{2} = 30\sqrt{2} - 33\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \stackrel{(2)}{=} \\ &= (30 - 33 - 4 + 5)\sqrt{2} = \boxed{\boxed{-2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Extraemos FACTORES de los radicales.
- (2) Los radicales son semejantes, se suman los coeficientes.

- ③ Calcular:

$$\sqrt[6]{\frac{0,0000032 \cdot 40000}{0,002}} = \sqrt[6]{\frac{32 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt[6]{\frac{32 \cdot 4 \cdot \cancel{10^{-3}}}{2 \cdot \cancel{10^{-3}}}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = \boxed{\boxed{\pm 2}}$$

④ Calcular: $\sqrt[3]{-128} - \sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{9}} + 2\sqrt[3]{\frac{125}{4}}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-128} - \sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{1}{9}} + 2\sqrt[3]{\frac{125}{4}} &\stackrel{(1)}{=} -\sqrt[3]{2^7} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + 3\sqrt[3]{-\frac{2}{27}} + 2\sqrt[3]{\frac{5^3}{2^2}} = \\ &= -2^2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \frac{3}{3}\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{\frac{2^3}{2^2}} = -4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} \stackrel{(2)}{=} \boxed{-3\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Raíz de índice impar y radicando negativo: $\sqrt[3]{-128} = -\sqrt[3]{128} = -\sqrt[3]{2^7}$.

(2) Los radicales son semejantes, se suman los coeficientes.

⑤ Expresar en forma de potencias de exponente racional y calcular: $\frac{\sqrt[3]{4ab} \cdot \sqrt[4]{9a^2b^2}}{\sqrt[6]{12a^5b^3}} : \sqrt[3]{6b}$

$$\frac{\sqrt[3]{4ab} \cdot \sqrt[4]{9a^2b^2}}{\sqrt[6]{12a^5b^3}} : \sqrt[3]{6b} \stackrel{(2)}{=} \frac{2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{6}}a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}} \stackrel{(2)}{=} \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}}} = \boxed{1}$$

Razonamientos

(1) Raíz de índice n en forma de potencia de exponente racional: $\sqrt[n]{A^p} = A^{\frac{p}{n}}$.

(2) Multiplicar (dividir) potencias de la misma base.

⑥ Racionalizar y simplificar: $\frac{2}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{5} - 2} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{5} - 2} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} &= \\ &= \frac{2(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})} - \frac{3 \cdot (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2)} + \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{2(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{20 - 18} - \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} + \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} - \frac{2\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{2(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{2} - 3(\sqrt{5} + 2) + \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3} - 2\sqrt{2} = \\ &= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 6 + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \boxed{-6} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Identidad notable: **suma por diferencia, diferencia de cuadrados.**

⑦ Resolver la inecuación y el sistema de inecuaciones. Representar gráficamente y por intervalos las soluciones

(a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{5} \geq 3 - \frac{3x-1}{10}$

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x+1}{5} \geq 3 - \frac{3x-1}{10} \stackrel{(1)}{\implies} 5(x-3) - 2(x+1) \geq 3 \cdot 10 - (3x-1) \implies 6x \geq 48 \implies \boxed{x \geq 8}$$

Solución: $x \in [8, +\infty)$



$$(b) \begin{cases} \frac{7-x}{4} - \frac{2x+3}{12} > \frac{x}{3} \\ x - \frac{5-x}{3} \geq \frac{x}{2} - 5 \end{cases}$$

$$\frac{7-x}{4} - \frac{2x+3}{12} > \frac{x}{3} \implies 3(7-x) - (2x+3) > 4x \implies 21 - 3x - 2x - 3 > 4x \implies -9x > -18 \xRightarrow{(2)}$$

$$\boxed{x < 2}$$

$$x - \frac{5-x}{3} \geq \frac{x}{2} - 5 \implies 6x - 2(5-x) \geq 3x - 30 \implies 5x \geq -20 \implies \boxed{x \geq -4}$$

Solución: $x \in (-\infty, 2) \cap [-4, +\infty) = [-4, 2)$



La solución del sistema de inecuaciones es la intersección de las soluciones de cada inecuación:



Razonamientos

- (1) M.c.m. de los denominadores es 10.
- (2) Si multiplicamos (dividimos) una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

- ⑧ El perímetro de un cuadrado es más grande que 18 cm y el doble de su lado menos tres es como máximo, 15. Hallar los cuadrados de lado un número natural que verifican las dos condiciones.



x

Sea $x \in \mathbb{N}$, en cm, el lado del cuadrado.

- El perímetro de un cuadrado es más grande que 18 cm: $4x > 18$.
- El doble de su lado menos tres es como máximo, 15: $2x - 3 \leq 15$

El sistema de inecuaciones es
$$\begin{cases} 4x > 18 \implies x > \frac{9}{2} \implies \boxed{x \in \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)} \\ 2x - 3 \leq 15 \implies 2x \leq 18 \implies x \leq 9 \implies \boxed{x \in (-\infty, 9]} \end{cases}$$

La solución algebraica del sistema es:
$$\boxed{x \in \left(\frac{9}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 9] = \left(\frac{9}{2}, 9\right]}$$

La condición del problema es que el lado sea un número natural, se pueden construir CINCO cuadrados de lados 5, 6, 7, 8, 9 cm que cumplen las condiciones del problema.