

① Efectuar las siguientes operaciones:

(a) $\sqrt[5]{a^3x^5 + 3x^6} - \sqrt[5]{32a^3 + 96x} + \sqrt[5]{a^8 + 3a^5x}$

Los radicales no son semejantes y no se pueden sumar. En los radicandos se extrae factor común:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{a^3x^5 + 3x^6} - \sqrt[5]{32a^3 + 96x} + \sqrt[5]{a^8 + 3a^5x} &= \sqrt[5]{x^5(a^3 + 3x)} - \sqrt[5]{32(a^3 + 3x)} + \sqrt[5]{a^5(a^3 + 3x)} = \\ &\stackrel{(1)}{=} x\sqrt[5]{a^3 + 3x} - 2\sqrt[5]{a^3 + 3x} + a\sqrt[5]{a^3 + 3x} \stackrel{(2)}{=} \boxed{(x - 2 + a)\sqrt[5]{a^3 + 3x}} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) $32 = 2^5$

(2) Los radicales son semejantes y se suman extrayendo factor común el radical.

(b) $\sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{2a^5b^5} \cdot \sqrt[3]{2a^3b} \cdot \sqrt[3]{32a^7b^4}$

El producto de radicales del mismo índice es igual al radical de índice el común y radicando el producto de los radicandos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{2a^5b^5} \cdot \sqrt[3]{2a^3b} \cdot \sqrt[3]{32a^7b^4} &= \sqrt[3]{2^2a^2b \cdot 2ab \cdot 2a^5b^5 \cdot 2a^3b \cdot 2^5a^7b^4} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \sqrt[3]{2^{2+1+1+5}a^{2+1+5+3+7}b^{1+1+5+1+4}} = \sqrt[3]{2^{10}a^{18}b^{12}} \stackrel{(2)}{=} 2^3a^6b^4\sqrt[3]{2} = \boxed{8a^6b^4\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Multiplicar potencias de la misma base.

(2) Extraer FACTORES de un radical.

② Racionalizar y simplificar: $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Los tres denominadores son suma algebraica de radicales cuadráticos. El procedimiento a seguir es: multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} - \frac{1 \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} - \frac{1 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \cancel{\sqrt{3}} + 1 - \cancel{\sqrt{2}} + 1 + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{3}} = \boxed{2} \end{aligned}$$

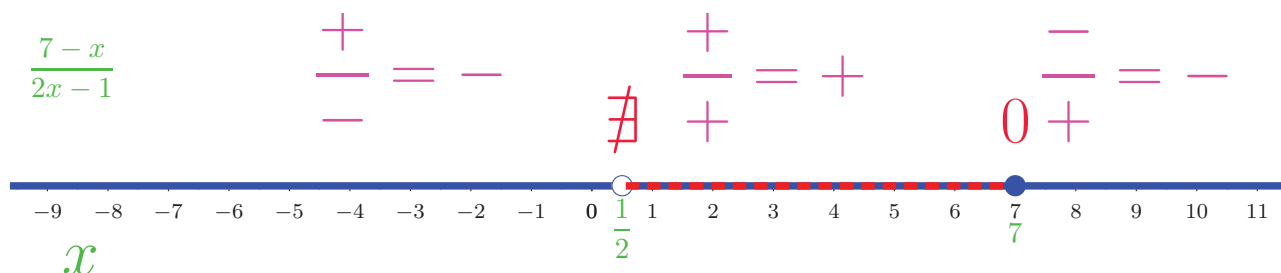
Razonamientos

(1) Identidad notable: suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados.

③ Resolver la inecuación: $\frac{3x+5}{2x-1} \leq 2$

$$\frac{3x+5}{2x-1} \leq 2 \implies \frac{3x+5}{2x-1} - 2 \leq 0 \implies \frac{3x+5-2(2x-1)}{2x-1} \leq 0 \implies \boxed{\frac{7-x}{2x-1} \leq 0}$$

- Raíces (ceros) del numerador y denominador de la fracción: $\begin{cases} 7-x=0 \implies \boxed{x=7} \\ 2x-1=0 \implies \boxed{x=\frac{1}{2}} \end{cases}$
- Signo de la fracción $\frac{7-x}{2x-1}$



• Solución: $\boxed{x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup [7, +\infty)}$