

Al resolver ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ no siempre tienen soluciones reales, si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es negativo, la raíz cuadrada no tiene soluciones reales. El conjunto de los números complejos nos permitirá, entre otras aplicaciones, resolver estas ecuaciones de segundo grado.

Definición 1.1 (Conjunto de los complejos. Forma cartesiana). Se llama conjunto de los números complejos, se denota $\mathbb{C}$, al producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Notación

Los números complejos se denotan por las letras $z, w, \dots$.

$$z = (a, b) \text{ entonces } \begin{cases} a = \operatorname{Re} z, & \text{parte real del complejo } z \\ b = \operatorname{Im} z, & \text{parte imaginaria del complejo } z \end{cases}$$

Número real si $z = (a, 0)$, la parte $\operatorname{Im} z$ es igual a cero entonces el número complejo es $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Imaginario puro si $z = (0, b)$, la parte $\operatorname{Re} z$ es igual a cero entonces el complejo es un **imaginario puro**.

Cero Si $z = (0, 0)$ entonces se escribe $z = 0$, número complejo cero.

Unidad real El par $(1, 0) = 1$ es la unidad real

Unidad imaginaria El par $(0, 1)$ es la **UNIDAD IMAGINARIA** se escribe $\boxed{(0, 1) = i}$.

La notación de i para la unidad imaginaria es debida a Leonhard EULER, matemático suizo del siglo XVIII.

NOTA: La unidad imaginaria, i , en física se representa por la letra j para evitar confusiones de notación.

Definición 1.2 (Igualdad de complejos). Dos números complejos, $z, w \in \mathbb{C}$ son iguales si lo son sus partes reales e imaginarias.

$$\begin{matrix} z = (a, b) \\ w = (c, d) \end{matrix}, \quad z = w \iff \begin{cases} a = c & (\text{Re } z = \text{Re } w) \\ b = d & (\text{Im } z = \text{Im } w) \end{cases}$$

1.1 Operaciones con complejos. Forma cartesiana

Definición 1.3 (Suma de complejos). Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ dos complejos se llama suma de z y w y se denota por $z + w$ al complejo:
$$\begin{cases} \text{Re}(z + w) = \text{Re } z + \text{Re } w = a + c \\ \text{Im}(z + w) = \text{Im } z + \text{Im } w = b + d \end{cases}$$

$$\boxed{z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)}$$

La operación suma es una operación interna:
$$\begin{matrix} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, w) & \longmapsto & z + w \end{matrix}$$

NOTA: El símbolo $+$ se emplea cuando definimos la operación SUMA, hay que tener en cuenta qué está operando:

$z + w$ $\boxed{+}$ suma de complejos

$\text{Re } z + \text{Re } w = a + c$ $\boxed{+}$ suma de números reales

$\text{Im } z + \text{Im } w = b + d$ $\boxed{+}$ suma de números reales

Propiedades de la suma

Asociativa $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Elemento neutro $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}, (a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) \stackrel{(*)}{=} (a, b)$ El elemento neutro de la suma de complejos es: $(0, 0)$

$(*)$ El 0 es el elemento neutro de la operación suma de números reales.

Elemento opuesto $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}$ tiene que $\exists (x, y) \in \mathbb{C}$ tal que:

$(a, b) + (x, y) = (x, y) + (a, b) = (0, 0)$. Por definición de *suma de complejos*:

$$(a + x, b + y) = (0, 0) \xrightarrow{\text{igualdad de complejos}} \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

El elemento opuesto de $z = (a, b)$ es $-z = (-a, -b)$.

Conmutativa $z + w = w + z, \forall z, w \in \mathbb{C}$

En las demostraciones se emplea las propiedades de la suma de números reales. Se dejan como ejercicio demostrar las propiedades asociativa y conmutativa.

Definición 1.4 (Diferencia de complejos). La diferencia de complejos se efectúa sumando el opuesto del complejo sustraendo:

$$z - w = (a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a + (-c), b + (-d)) = (a - c, b - d)$$

Definición 1.5 (Producto de complejos). Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ dos complejos se llama producto de z y w y se denota por $z \cdot w$ al complejo:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w = ac - bd \\ \operatorname{Im}(z \cdot w) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} w = ad + bc \end{cases}$$

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

La operación producto es una operación interna: $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $(z, w) \longmapsto z \cdot w$

Propiedades del producto

Asociativa $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Elemento neutro(unidad) $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}, (a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) \stackrel{(*)}{=} (a, b)$ El elemento unidad del producto de complejos es: $(1, 0) = 1$

$$(*) (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

Elemento inverso $\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}$ tiene que $\exists (x, y) \in \mathbb{C}$ tal que:

$(a, b) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot (a, b) = (1, 0)$. Por definición de *producto de complejos*:

$$(ax - by, ay + bx) = (1, 0) \xrightarrow{\text{igualdad de complejos}} \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot (a) \quad a^2x - aby = a \\ \cdot (b) \quad b^2x + aby = 0 \end{array} \right\} \text{ sumando } (a^2 + b^2)x = a \xrightarrow{a^2 + b^2 \neq 0} x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot (-b) \quad -abx + b^2y = -b \\ \cdot (a) \quad abx + a^2y = 0 \end{array} \right\} \text{ sumando } (a^2 + b^2)y = -b \xrightarrow{a^2 + b^2 \neq 0} y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{El elemento inverso } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Conmutativa $z \cdot w = w \cdot z, \forall z, w \in \mathbb{C}$

Distributiva $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Definición 1.6 (División de complejos). La división de complejos se efectúa multiplicando por el inverso del complejo del denominador:

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}, \forall w = (c, d) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} \right)$$

Ejemplos:

1. Efectuar: $(2, 3) \cdot (-2, 4)$

$$(2, 3) \cdot (-2, 4) \stackrel{\text{Def. (1.5)}}{=} (2 \cdot (-2) - 3 \cdot 4, 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2)) = (-16, 2)$$

2. Efectuar: $(0, 1) \cdot (0, 1) = i \cdot i = i^2$ (Producto por sí mismo de la unidad imaginaria)

$$(0, 1) \cdot (0, 1) \stackrel{\text{Def. (1.5)}}{=} (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{\boxed{i^2 = -1}}$$

Ejercicio: Resolver la ecuación: $\boxed{x^2 + 1 = 0}$, en los siguientes conjuntos: $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Definición 1.7 (Producto de un real por un complejo). Sean $k \in \mathbb{R}$ y $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ se llama

producto de k por z y se denota por $k \cdot z$ al complejo:
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(k \cdot z) = k \cdot \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im}(k \cdot z) = k \cdot \operatorname{Im} z \end{cases}$$

$$\boxed{k \cdot z = k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)}$$

La operación producto es una operación externa:
$$\begin{array}{ccc} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (k, z) & \longmapsto & k \cdot z \end{array}$$

Representación gráfica

Por definición el conjunto $\mathbb{C}$ es un producto cartesiano, por lo tanto los ejes de coordenadas cartesianas se emplean para representar el conjunto de los números complejos.

Eje de abscisas: Eje real.

Eje de ordenadas: Eje imaginario.

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. El punto del plano de coordenadas (a, b) se llama **afijo** del complejo z .

El **vector** que une el origen de coordenadas con el afijo, (a, b) , se denomina vector asociado al complejo z .

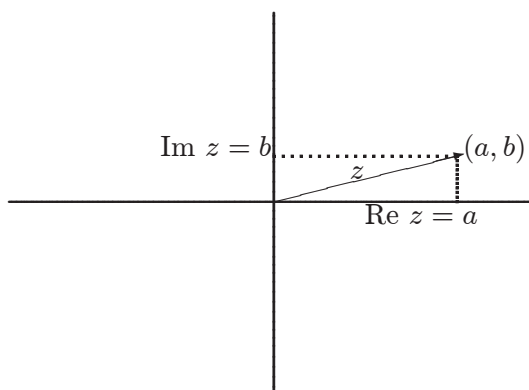


Figura 1.1: Representación gráfica de $z = (a, b)$

1.2 Forma binómica

Aplicando las definiciones de las operaciones con complejos:

$$z = (a, b) \stackrel{\text{suma}}{=} (a, 0) + (0, b) \stackrel{(1.7)}{=} a(1, 0) + b(0, 1) \stackrel{\text{unidades}}{=} a + bi, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Si el complejo z se escribe de la forma $a + bi$ se dice que está en **FORMA BINÓMICA**

Potencias de la unidad imaginaria

En un ejercicio se ha demostrado que $i^2 = -1$. Entonces:

$$\begin{array}{l}
 i^0 = 1 \\
 i^1 = i \\
 i^2 = -1 \\
 i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
 i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\
 i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
 i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \quad (1.1)$$

Las potencias naturales de la unidad imaginaria son cíclicas de orden cuatro.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}} \text{ entonces } i^n = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{cases}$$

En general para calcular i^n :

$$\begin{array}{l} n \\ r(*) \end{array} \left| \begin{array}{l} 4 \\ c \end{array} \right. \quad i^n = i^{4c+r} = i^{4c} \cdot i^r \stackrel{\text{exp. múltiplo de 4}}{=} 1 \cdot i^r = i^r$$

(*) El resto de una división entre 4 es 0, 1, 2 ó 3

Ejemplos:

1. Calcular: i^{4539} .

$$\begin{array}{r|l} 4539 & 4 \\ \cdot & 1134 \\ \hline \boxed{3} & \end{array} \quad i^{4539} = i^{4 \cdot 1134 + 3} = i^{4 \cdot 1134} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

2. Calcular: i^{2002} .

$$\begin{array}{r|l} 2002 & 4 \\ \cdot & 500 \\ \hline \boxed{2} & \end{array} \quad i^{2002} = i^{4 \cdot 500 + 2} = i^{4 \cdot 500} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

Operaciones en forma binómica

Suma $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Diferencia $z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Producto $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \stackrel{i^2 = -1}{=} (ac - bd) + (ad + bc)i$

Definición 1.8 (Conjugado de un complejo). Sea $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$ se llama conjugado de z y se denota $\bar{z}$ al complejo que tiene la misma parte real que z y su parte imaginaria es la opuesta de z .

$$\boxed{z = a + bi \quad \text{entonces} \quad \bar{z} = a - bi}$$

Propiedades

- (1) $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z = 2a$ y $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z = 2bi$
- (2) Involutiva $\bar{\bar{z}} = z$
- (3) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- (4) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$
- (5) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$
- (6) $\boxed{z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+}$
- (7) El conjugado del opuesto es igual al opuesto del conjugado: $\overline{-z} = -\bar{z}, \forall z \in \mathbb{C}$
- (8) El conjugado del inverso es igual al inverso del conjugado: $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \forall z \in \mathbb{C}^*$

Cociente En primer lugar calculamos el inverso, z^{-1} , de un complejo, no nulo, en forma binómica:

$$\text{Por la propiedad (6) } z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \xrightarrow{z \neq 0} z \cdot \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = 1 \xrightarrow{*} z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \quad (1.2)$$

(*) El producto de dos complejos es igual a la unidad, por lo tanto uno es el inverso del otro.

Sean $\begin{cases} z = a + bi \\ w = c + di \end{cases} \in \mathbb{C}, w \neq 0$, entonces:

$$\boxed{\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} \stackrel{(1.2)}{=} z \cdot \frac{\bar{w}}{c^2 + d^2} = \frac{z \cdot \bar{w}}{c^2 + d^2} \stackrel{(6)}{=} \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}}$$

Para dividir dos complejos en forma binómica se **multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador**.

Ejemplos:

$$(1) \text{ Calcular: } \frac{2-3i}{1-4i} = \frac{(2-3i) \cdot (1+4i)}{(1-4i) \cdot (1+4i)} = \frac{2+8i-3i-12i^2}{1+16} = \frac{14+5i}{17} = \frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$$

$$(2) \frac{3}{i} = \frac{3 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-3i}{1} = -3i$$

Potencias Para calcular $(a+bi)^n, n \in \mathbb{N}$ se aplica el desarrollo del Binomio de Newton y las potencias de la unidad imaginaria (1.1).

$$(a+bi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot (bi)^k$$

Ejemplos: *Calcular las potencias*

$$(1) (2-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$$

$$(2) (1-i)^5$$

$$\begin{aligned} (1-i)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 1^{5-k} \cdot (-i)^k = \\ &= \binom{5}{0} 1^5 (-i)^0 + \binom{5}{1} 1^4 (-i)^1 + \binom{5}{2} 1^3 (-i)^2 + \binom{5}{3} 1^2 (-i)^3 + \binom{5}{4} 1^1 (-i)^4 + \binom{5}{5} 1^0 (-i)^5 = \\ &= 1 - 5i + 10i^2 - 10i^3 + 5i^4 - i^5 = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i \end{aligned}$$

Raíz cuadrada (1) El radicando es un número real negativo:

$$a > 0, \sqrt{-a} = \pm \sqrt{(-1) \cdot a} = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} \stackrel{(i^2=-1)}{=} \pm i\sqrt{a}$$

Ejemplo: *Resolver la ecuación: $z^2 - 2z + 5 = 0$*

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \\ z_2 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i \end{cases}$$

¿Qué relación existe entre las dos soluciones de la ecuación de segundo grado? Razona si dicha relación se cumple en cualquier ecuación de segundo grado.

(2) El radicando es un número complejo: $\sqrt{a+bi}$. Calcular un número complejo $x+iy, x, y \in \mathbb{R}$ tal que por definición de raíz cuadrada debe verificar :

$$\boxed{(x+iy)^2 = a+bi}$$

$$(x+iy)^2 = a+bi \implies x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = a+bi \implies x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi \stackrel{def(1.2)}{\implies}$$

$$\text{resolver el sistema de ecuaciones de segundo grado } \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular: $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}} i$

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{3}} i = x + iy \implies (x + iy)^2 = 2 - 2\sqrt{3} \implies x^2 + 2xy i + i^2 y^2 = 2 - 2\sqrt{3} \implies$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 2 - 2\sqrt{3} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -2\sqrt{3} \implies y = -\frac{\sqrt{3}}{x} (*) \end{cases} \xrightarrow{\text{sustitución}}$$

$$x^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2 = 2 \implies x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1 \\ y = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1 \end{cases} \\ x^2 = -1 \implies x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Las raíces de $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}} i$ son $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3} - i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

¿Qué relación existe entre las dos raíces de un radical cuadrático?

Razona si dicha relación se cumple en cualquier radical cuadrático.

1.3 Forma trigonométrica. Polar

En la propiedad (6) se ha demostrado que $a^2 + b^2 \geq 0$, tiene sentido la definición siguiente:

Definición 1.9 (Módulo de un complejo). Sea $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **módulo** de z y se denota, $r = |z|$, a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de la parte real y la parte imaginaria.

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2}, (r \in \mathbb{R}^+)$$

Propiedades del módulo

$$(1) |z| = 0 \iff z = 0$$

$$(5) |z + w| \leq |z| + |w|$$

$$(2) |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$(6) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$(3) |z| = |\bar{z}|$$

$$(7) |-z| = |z|$$

$$(4) \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \leq |z| \\ |\operatorname{Im} z| \leq |z| \end{cases}$$

$$(8) |z^{-1}| = |z|^{-1}, z \neq 0$$

Demostración

La propiedad (5) recibe el nombre de desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (\overline{z + w}) = (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \stackrel{(4)}{\leq} |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 = \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 (\in \mathbb{R}^+) \implies |z + w| \leq |z| + |w|$$

c.q.d

Definición 1.10 (Argumento de un complejo). Sea $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **argumento** de

$$z \text{ y se denota, } \arg z, \text{ al conjunto de valores } \theta, \text{ tal que: } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Al ÚNICO, $\theta \in [0, 2\pi)$ recibe el nombre de argumento principal de z y se denota $\operatorname{Arg} z$

Definición 1.11 (Forma trigonométrica y polar). Sea $z = a + bi$ y por definición: $a = r \cdot \cos \theta$ y $b = r \cdot \sin \theta$ entonces:

$$z = a + bi = r \cdot \cos \theta + r \cdot \sin \theta \cdot i = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = \underset{\text{forma trigonométrica}}{r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)} = \underset{\text{polar}}{r_\theta}$$

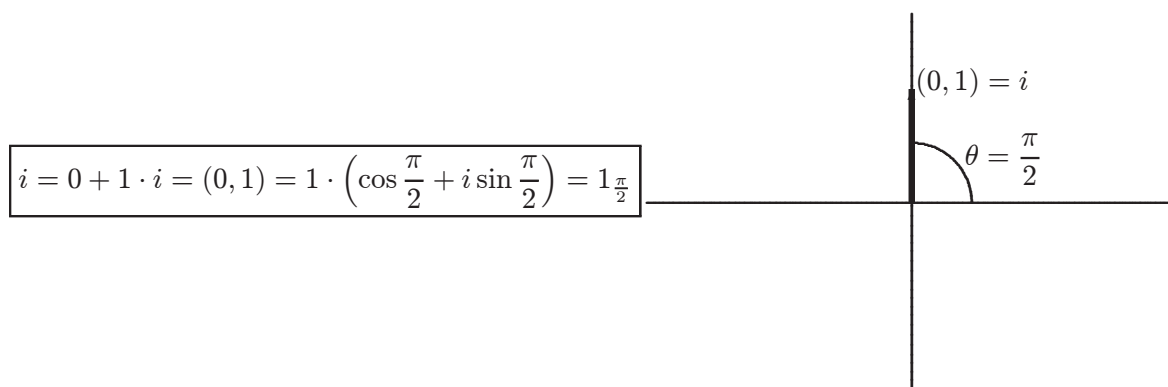
Ejemplos:

- (1) Calcular el módulo y argumento principal del complejo $z = i$

La parte real, $a = \operatorname{Re} i = 0$ y la imaginaria, $b = \operatorname{Im} i = 1$, por lo tanto:

Módulo $r = +\sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

Argumento principal $\begin{cases} \cos \theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin \theta = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$, el único ángulo entre $[0, 2\pi)$ que verifica las dos condiciones es el argumento principal. $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$



- (2) Calcular el módulo y argumento principal del complejo $z = -\sqrt{3} + i$

La parte real, $a = \operatorname{Re} z = -\sqrt{3}$ y la imaginaria, $b = \operatorname{Im} z = 1$, por lo tanto:

Módulo $r = +\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = +\sqrt{3 + 1} = 2$

Argumento principal $\begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6} = 150^\circ \\ \frac{7\pi}{6} = 210^\circ \end{cases} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} = 30^\circ \\ \frac{5\pi}{6} = 150^\circ \end{cases} \end{cases}$

el único ángulo entre $[0, 2\pi)$ que verifica las dos condiciones es el argumento principal

$$\operatorname{Arg}(-\sqrt{3} + i) = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = -\sqrt{3} + i = (-\sqrt{3}, 1) = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2_{\frac{5\pi}{6}}$$

- (3) Calcular la forma binómica del complejo $z = 4_{\frac{3\pi}{4}}$

$$z = 4_{\frac{3\pi}{4}} = 4 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 4 \left(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} i$$

Interpretación geométrica del módulo y argumento

Tal como se observa en la figura, el módulo de un complejo es igual al módulo (norma) del vector asociado. Se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

La tangente trigonométrica del argumento principal es el cociente entre $b = \text{Im } z$ y $a = \text{Re } z$. El argumento es la arcotangente de dicho cociente.

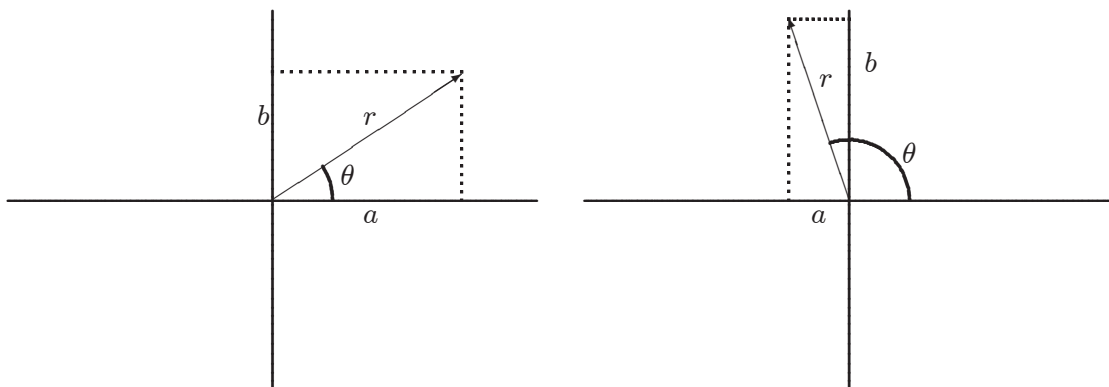


Figura 1.2: Módulo: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumento: $\cos \theta = \frac{a}{r}$ y $\sin \theta = \frac{b}{r}$

Problema práctico

Sea $z = a + bi$

Módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumento principal (1) Se determina en qué cuadrante se encuentra el afijo del complejo.

(2) Se calcula la arcotangente de $\left|\frac{b}{a}\right|$ y el ángulo obtenido se traslada al cuadrante hallado en (4.11)

Ejemplos:

1. Hallar la forma polar del complejo: $z = -3 - \sqrt{3}i$

Módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Argumento principal (1) $\left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta < 0 \\ \sin \theta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta \in 3^{\text{er}} \text{ cuadrante}$

(2) $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ en el tercer cuadrante corresponde con el ángulo:

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$z = -3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \frac{7\pi}{6} = 2\sqrt{3} 210^\circ$$

2. Hallar la forma polar del complejo: $z = 2 - 2\sqrt{3} i$

Módulo $r = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = +\sqrt{4 + 12} = +\sqrt{16} = 4.$

Argumento principal (1) $\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta > 0 \\ \sin \theta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta \in 4^\circ \text{cuadrante}$

(2) $\arctan \left| \frac{-2\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ en el cuarto cuadrante corresponde con el ángulo:

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$z = 2 - 2\sqrt{3} i = 4_{\frac{5\pi}{3}} = 4_{300^\circ}$$

1. Calcular el opuesto de los complejos:

- | | | |
|---------------|--------------|--------------|
| (a) $(2, 3)$ | (c) $(0, 2)$ | (e) $-1 + i$ |
| (b) $(-1, 1)$ | (d) $2 - 3i$ | (f) $-3i$ |

2. Dados los números complejos: $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = -2 + 5i$, $z_3 = 6 - 6i$. Calcular:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| (a) $z_1 + z_2 - z_3$ | (d) $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$ |
| (b) $z_1 \cdot z_2 + z_3$ | (e) z_3^{-1} |
| (c) $\frac{z_1}{z_2} + z_3$ | (f) $\frac{1}{(z_1 - z_2) \cdot z_3}$ |

Representar gráficamente los resultados.

3. Dados los números complejos: $z = 5 - 3i$, $w = -4 + 8i$. Calcular:

- | | |
|------------------------|---|
| (a) $\bar{z}$ | (d) $\overline{z \cdot w}$ |
| (b) $\bar{w}$ | (e) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$ |
| (c) $\overline{z + w}$ | |

4. Dado el complejo $z = 5 - 3i$, calcular y representar en el plano:

- | | |
|---------------|-------------------|
| (a) z^{-1} | (f) $z - i$ |
| (b) $\bar{z}$ | (g) $2 \cdot z$ |
| (c) $z + 1$ | (h) $z \cdot i$ |
| (d) $z - 1$ | (i) z^2 |
| (e) $z + i$ | (j) $z : \bar{z}$ |

5. ¿Existe algún número complejo z tal que $z = z^{-1}$? **Razonar**

6. Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

- | | |
|--|--|
| (a) $(3 + 2i) \cdot (1 + i) - 5i(2 + 4i)$ | (d) $\left(\frac{3 - 5i}{2 + 3i}\right)^2$ |
| (b) $(-i) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{3}i)$ | (e) $(1 + i)^6$ |
| (c) $\left(\frac{2}{3} - 2i\right)^2$ | (f) $(3 - 2i)^4$ |

(g) i^{3127}

7. Calcular:

(a) $\frac{(i+3)^2}{4+i}$

(b) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$

(c) $\frac{(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)}{(1+i)^3 + (1-i)^3}$

(d) $\frac{1}{i} + \frac{1+i}{i^3} - \frac{(1+i) \cdot (1-i)}{i^2 - 1} - \frac{2(1+i)}{1-i}$

8. Resolver en $\mathbb{C}$, las siguientes ecuaciones:

(a) $(3-5i) + (4-2i)z = 11-i$

(b) $\frac{z+3i}{2+4i} - 5 = -8i$

(c) $z^2 - 6z + 34 = 0$

(d) $z^2 - 8z + 20 = 0$

(e) $2+3i - z \cdot 2i = z(3+2i)$

(f) $\frac{(1+i) \cdot z - 3}{5+2i} = 3-i$

(g) $\sqrt{z^2+1} - z = -i$

(h) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

(i) $\frac{z}{i} + 3 - 2i = z + 4i$

(j) $36z^2 - 24z + 13 = 0$

(k) $4z^2 + 4z + 5 = 0$

(l) $z^3 + 22z + 52 = 0$

(m) $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$

(n) $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$

9. Resolver en $\mathbb{C}$, los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} (1-i)z + 2w = i \\ z + (2+3i)w = 1+i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z - w = 3-9i \\ 5z + w = 27+3i \end{cases}$

10. Calcular $x \in \mathbb{R}$ con la condición de que el producto $(3+2i) \cdot (x+6i)$ sea imaginario puro.

11. Calcular $x \in \mathbb{R}$ tal que: $(1+3i) \cdot (x+2i)$ sea:

(a) Un número real.

(b) Un imaginario puro.

12. Calcular $a, b \in \mathbb{R}$ tales que: $\frac{3a-9i}{3a+bi} = 5+4i$

13. Calcular las raíces cuadradas de los números complejos:

(a) $16i$

(b) $-12+16i$

(c) $5-2i$

(d) $3 + \frac{i}{2}$

14. Escribir en forma trigonométrica los complejos:

(a) $2i$

(b) -3

(c) $2+2i$

(d) $6\sqrt{3}-6i$

(e) $2+3i$

(f) $-i$

(g) 8

(h) $3-3i$

(i) $2+\sqrt{3}i$

(j) $-5+5i$

(k) $-6-6 \cdot \sqrt{3}i$

(l) $8-8 \cdot \sqrt{3}i$

(m) $4+4i$

(n) 0

15. Escribir en forma binómica los complejos:

- | | |
|--|--|
| (a) $2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$ | (e) $6\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$ |
| (b) $3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2})$ | (f) $2\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$ |
| (c) 4_{15° | (g) 1_{270° |
| (d) 2_{330° | (h) $\sqrt{2}_{135^\circ}$ |

16. Determinar k para que el número complejo $w = \frac{3-2ki}{4-3i}$:

- (a) Sea un número real.
- (b) Sea un número imaginario puro.
- (c) Su afijo está situado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

17. La suma de dos complejos es $4 + 2i$, la parte real de uno de ellos es 3 y el cociente de éste por el segundo es imaginario puro. Hallar los dos complejos.

18. Hallar dos números complejos tales que uno de ellos sea imaginario puro, el módulo del otro $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y la suma de ambos es igual a su producto.

19. ¿Qué valores deberán tomar x e y , reales, para que el complejo $z = 4x + 3y + 2 + (4x - y)i$ sea

- (a) nulo
- (b) igual a $1 + i$?

20. Hallar dos complejos sabiendo que su cociente es imaginario puro, su suma es real y vale 5 y el módulo del dividendo es doble del módulo del divisor.