

① Efectuar las siguientes operaciones en forma binómica:

$$(a) \frac{i^5 - 3i^3 + i^{204}}{i^{539} - 3i^{2020}}$$

$$\frac{i^5 - 3i^3 + i^{204}}{i^{539} - 3i^{2020}} \stackrel{(1)}{=} \frac{i - 3(-i) + 1}{-i - 3 \cdot 1} = \frac{1 + 4i}{-3 - i} = -\frac{1 + 4i}{3 + i} \stackrel{(2)}{=} \frac{1 + 4i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = -\frac{3 - i + 12i + 4}{9 + 1} = -\frac{7 + 11i}{10} =$$

$$= \boxed{-\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i}$$

$$(b) \frac{(1 - 3i)^3}{(2 - i)^4}$$

$$\frac{(1 - 3i)^3}{(2 - i)^4} \stackrel{(3)}{=} \frac{1 - 3 \cdot 3i + 3 \cdot (3i)^2 - (3i)^3}{2^4 - 4 \cdot 2^3 \cdot i + 6 \cdot 2^2 \cdot i^2 - 4 \cdot 2 \cdot i^3 + i^4} \stackrel{(4)}{=} \frac{1 - 9i - 27 + 27i}{16 - 32i - 24 + 8i + 1} = \frac{-26 + 18i}{-7 - 24i} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \frac{-26 + 18i}{-7 - 24i} \cdot \frac{-7 + 24i}{-7 + 24i} = \frac{-250 - 750i}{625} = \boxed{-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i}$$

Razonamientos

(1) Potencias de la unida imaginaria:

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^3 = -i$$

$$i^{204} = i^{4 \cdot 51} = i^0 = 1$$

$$i^{539} = i^{4 \cdot 144 + 3} = i^3 = -i$$

$$i^{2020} = i^{4 \cdot 505} = i^0 = 1$$

(2) División de números complejos en forma binómica.

(3) Potencia de un complejo en forma binómica: Binomio de Newton.

(4) Potencias naturales de la unidad imaginaria.

② Resolver las ecuaciones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

$$(a) x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 1 + i \\ 1 - i \end{cases}$$

• En el conjunto de los reales, $\mathbb{R}$, la ecuación NO tiene solución.

• En el conjunto de los complejos, $\mathbb{C}$, la ecuación tiene DOS soluciones:

$$\boxed{\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}}$$

$$(b) x^4 - x^2 - 2 = 0. \text{ Ecuación bicuadrada:}$$

$$x^4 - x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = -1 \end{cases}$$

• En $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \end{cases}$. En los reales tiene DOS soluciones.

• En $\mathbb{C}$: $\begin{cases} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \end{cases}$. En los complejos tienes CUATRO soluciones.

③ Determinar el valor de k para que $\frac{k+2i}{3-4i}$ sea:

- (a) Un número imaginario puro.
- (b) Un número real.
- (c) Su afijo se encuentre en el segundo cuadrante.

División de complejos en forma binómica:

$$z = \frac{k+2i}{3-4i} = \frac{k+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3k+4ki+6i+8i^2}{9+16} = \frac{(3k-8)+(6+4k)i}{25} = \boxed{\frac{3k-8}{25}} + \boxed{\frac{6+4k}{25}} i$$

$$(a) \ z \text{ imaginario puro} \iff \textcolor{green}{Re}(z) = 0 \iff \frac{3k-8}{25} = 0 \iff \boxed{k = \frac{8}{3}}$$

$$(b) \ z \text{ real} \iff \textcolor{blue}{Im}(z) = 0 \iff \frac{6+4k}{25} = 0 \iff \boxed{k = -\frac{3}{2}}$$

$$(c) \text{ Afijo en el segundo cuadrante} \iff \begin{cases} \textcolor{green}{Re}(z) < 0 \\ \textcolor{blue}{Im}(z) > 0 \end{cases} . \text{ Resolver un sistema de inecuaciones.}$$

$$\begin{cases} 3k-8 < 0 & \iff k < \frac{8}{3} \implies \boxed{k \in \left(-\infty, \frac{8}{3}\right)} \\ 6+4k > 0 & \iff k > -\frac{3}{2} \implies \boxed{k \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)} \end{cases}$$

La solución del sistema es la INTERSECCIÓN de las soluciones:

$$k \in \left(-\infty, \frac{8}{3}\right) \cap \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \implies \boxed{k \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)}$$