

① Efectuar las operaciones i simplificar el resultado:

$$(a) (6 - 5i) + (2 - i) - 2(5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i - 10 - 12i = -2 - 18i$$

$$(b) \frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{2(1 + 2i)}{2(2 - i)} \stackrel{(1)}{=} \frac{(1 + 2i) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{2 + i + 4i + 2i^2}{4 - (i)^2} \stackrel{(2)}{=} \frac{5i}{5} = \boxed{i}$$

Razonamientos

(1) Para dividir complejos en forma binómica se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

(2) $i^2 = -1$

$$(c) \frac{(-\sqrt[3]{3} i)^6 \cdot (1 - 2i)}{2 + 2i} \stackrel{(1)}{=} \frac{(\sqrt[3]{6^6} \cdot i^6) \cdot (1 - 2i)}{2 + 2i} \stackrel{(2)}{=} \frac{36 \cdot (-1)(1 - 2i)}{2(1 + i)} = 18 \cdot \frac{-1 + 2i}{1 + i} \stackrel{(3)}{=} 18 \cdot \frac{(-1 + 2i) \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} =$$

$$= \frac{18(1 + 3i)}{2} = \boxed{9 + 27i}$$

Razonamientos

(1) Propiedades de las potencias.

(2) $i^6 = i^2 = -1$

(3) Para dividir complejos en forma binómica se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$(d) i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2009}$$

La suma de cuatro potencias consecutivas de la unidad imaginaria: $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$, siempre suman CERO.

$$i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2009} = i^0 + \boxed{i^1 + i^2 + i^3 + i^4} + \boxed{i^5 + i^6 + i^7 + i^8} + \dots + \dots +$$

$$+ \boxed{i^{2005} + i^{2006} + i^{2007} + i^{2008}} + i^{2009} = 1 + 0 + 0 + 0 \dots + 0 + i^{2008+1} \stackrel{(1)}{=} \boxed{1 + i}$$

Razonamientos

(1) $i^{2009} = i^{4 \cdot 502 + 1} = \boxed{i}$

② Calcular $x \in \mathbb{R}$ tal que: $(1 + 3i) \cdot (x + 2i)$ sea:

$$(1 + 3i) \cdot (x + 2i) = x + 2i + 3xi + 6i^2 \stackrel{i^2 = -1}{=} \boxed{(x - 6)} + \boxed{(2 + 3x)i}$$

(a) Un número real.

El complejo es real si su **parte imaginaria** es cero: $2 + 3x = 0 \implies \boxed{x = -\frac{2}{3}}$

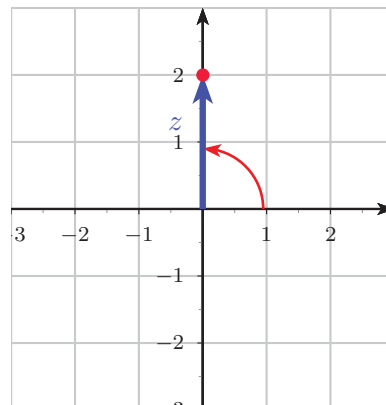
(b) Un imaginario puro.

El complejo es imaginario puro si su **parte real** es cero: $x - 6 = 0 \implies \boxed{x = 6}$

③ Escribir en forma polar los complejos:

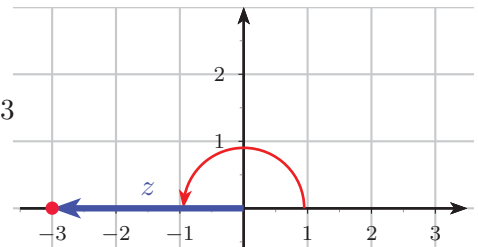
$$(a) z = 2i = (0, 2) \implies \begin{cases} r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{2^2} = 2 \\ \varphi = \arctan \frac{2}{0} \implies \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{z = 2\frac{\pi}{2}}$$



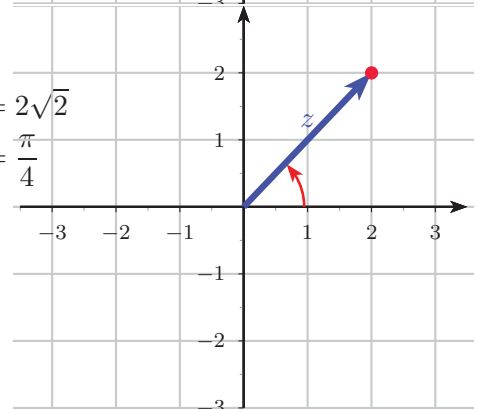
$$(b) \quad z = -3 = (-3, 0) \implies \begin{cases} r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{(-3)^2} = 3 \\ \varphi = \arctan \frac{0}{-3} \implies \varphi = \pi \end{cases}$$

$$\boxed{z = 3\pi}$$



$$(c) \quad z = 2+2i = (2, 2) \implies \begin{cases} r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \varphi = \arctan \frac{2}{2} = \arctan(1) \implies \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{z = 2\sqrt{2}\frac{\pi}{4}}$$



(d)

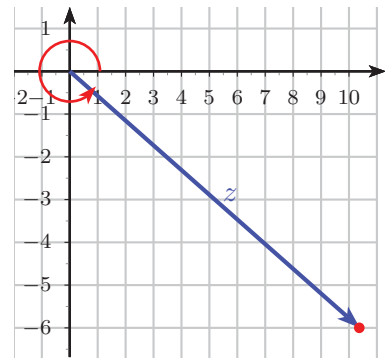
$$z = 6\sqrt{3} - 6i = (6\sqrt{3}, -6)$$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (-6)^2} = 12$$

$$\varphi = \arctan \frac{-6}{6\sqrt{3}} \stackrel{\varphi \in IV^{cuadr.}}{=} \arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \implies$$

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\boxed{z = 12\frac{11\pi}{6}}$$



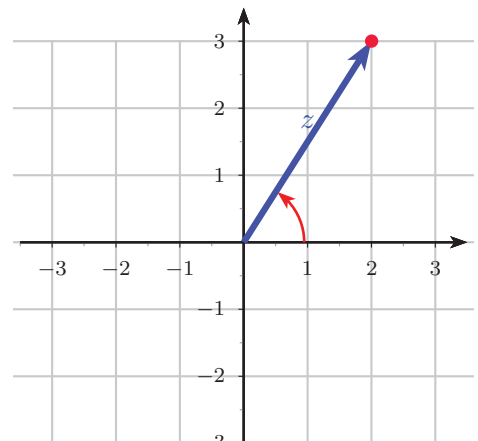
(e)

$$z = 2 + 3i = (2, 3)$$

$$r = |z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\varphi = \arctan \frac{3}{2} \implies \varphi = 56,30993247^\circ$$

$$\boxed{z = \sqrt{13}_{56,30993247^\circ}}$$



④ Efectuar: $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} - \frac{(1+i)^3}{(1-i)^3} - \frac{(3+i)^2 - (3-i)^2}{(3+i)^2 + (3-i)^2}$

Operaciones en forma binómica:

$$\begin{aligned} & \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} - \frac{(1+i)^3}{(1-i)^3} - \frac{(3+i)^2 - (3-i)^2}{(3+i)^2 + (3-i)^2} = \\ &= \frac{(1+i)^2}{2} - \frac{(1-i)^2}{2} - \frac{1+3i+3i^2+i^3}{1-3i+3i^2-i^3} - \frac{9+6i+i^2-(9-6i+i^2)}{9+6i+i^2+9-6i+i^2} = \\ &= \frac{2i}{2} - \frac{-2i}{2} - \frac{-2+2i}{-2-2i} - \frac{12i}{16} = 2i + \frac{(-1+i) \cdot (1-i)}{2} - \frac{3i}{4} = 2i + i - \frac{3i}{4} = \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{9}{4}i}$$

⑤ (a) Hallar las raíces cuadradas del complejo $3 + 4i$.

$$\sqrt{3+4i} = a + bi \iff (a+bi)^2 = 3+4i \implies a^2 - b^2 + 2abi = 3+4i \stackrel{(1)}{\implies} \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

resolver el sistema de ecuaciones

$$b = \frac{2}{a} \stackrel{(2)}{\implies} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \implies a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \implies a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} a^2 = 4 \implies \boxed{a = \pm 2} \\ a^2 = -1 \implies \boxed{a \notin \mathbb{R}} \end{cases}$$

Si $a = 2$ entonces $b = 1$ y si $a = -2$ entonces $b = -1$. Las raíces cuadradas son:

$$\boxed{\sqrt{3+4i} = \begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}}$$

(b) Resolver la ecuación de segundo grado $z^2 + (2-i)z - 2i = 0$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(2-i) \pm \sqrt{(2-i)^2 + 8i}}{2} = \frac{i-2 \pm \sqrt{4-4i-1+8i}}{2} = \frac{i-2 \pm \sqrt{3+4i}}{2} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \begin{cases} z_1 = \frac{i-2+2+i}{2} = \frac{2i}{2} = i \\ z_2 = \frac{i-2-2-i}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Razonamientos

(1) Igualdad de complejos en forma binómica.

(2) Sustituyendo la incógnita b en la primer ecuación.

(3) Las raíces cuadradas del complejo $3 + 4i$ son las obtenidas en el apartado anterior.

⑥ Hallar dos complejos cuya suma sea $1 + 4i$ y cuyo cociente sea la unidad imaginaria.

Los complejos expresados en forma binómica: $\begin{cases} z = a + bi \\ w = c + di \end{cases}$, condiciones:

- Su suma es $1 + 4i$: Suma de complejos en forma binómica:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = 1 + 4i \implies \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 4 \end{cases}$$

- Su cociente sea la unidad imaginaria:

$$\frac{z}{w} = i \implies z = w \cdot i \implies a + bi = -d + ci \implies \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$$

El sistema es de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 4 \\ a = -d \\ b = c \end{cases} \implies \begin{cases} a + c = 1 \\ c - a = 4 \end{cases} \implies c = \frac{5}{2} = b \text{ y } a = -\frac{3}{2}$$

Los complejos son: $\boxed{\begin{cases} z = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \\ w = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \end{cases}}$

⑦ El afijo del complejo z está situado en la recta $r \equiv 3x + y = 11$. Calcular dicho complejo si el cociente $\frac{z}{-2 + 3i}$ es imaginario puro.

- Sea $z = a + bi = (a, b) = (Re z, Im z)$ si el afijo está situado en la recta r las componentes del complejo verifican la ecuación de la recta: $3a + b = 11$.

- El cociente es imaginario puro, la parte real de $\boxed{Re\left(\frac{a + bi}{-2 + 3i}\right) = 0}$.

$$\frac{a + bi}{-2 + 3i} = \frac{(a + bi) \cdot (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i)} = \frac{-2a + 3b}{13} + \frac{(-3a - 2b)i}{13}$$

La parte real es igual a cero: $\frac{-2a + 3b}{13} = 0 \iff \boxed{-2a + 3b = 0}$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3a + b = 11 \\ -2a + 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -9a - 3b = -33 \\ -2a + 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

El complejo solución es: $\boxed{z = 3 + 2i}$