

Polinomios

Definición 1 (Expresión algebraica) Una expresión algebraica es una expresión con números y letras (que representan números) en la que aparecen las operaciones usuales: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

Definición 2 (Monomio) Se llama monomio a una expresión algebraica formada por el producto de un número real y una variable (letra) elevada a un exponente natural .

Son las expresiones del tipo: $\boxed{a \cdot x^n}$: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} & n \text{ es el grado del monomio} \\ a \in \mathbb{R} & a \text{ es el coeficiente del monomio} \end{cases}$

Definición 3 (Polinomio) Se llama polinomio a la suma algebraica de varios monomios de distinto grado:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-3}x^3 + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

donde: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} & \text{grado del polinomio} \\ a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R} & \text{coeficientes del polinomio} \\ a_0 & \text{coeficiente principal del polinomio} \\ a_n & \text{término independiente del polinomio} \\ a_i, \forall i \in \mathbb{N} & \text{coeficiente del monomio de grado } i \end{cases}$

Propiedad 1 Dos polinomios en la misma variable son iguales si y sólo si tienen el mismo grado e iguales coeficientes en las respectivas potencias de x .

Definición 4 El conjunto de todos los polinomios de grado n en la variable x con coeficientes reales se denota (se representa) por: $\mathbb{R}_n[x] = \{P(x) | \text{grad}P(x) \leq n, a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$.

1. De las siguientes expresiones indicar cuáles son polinómicas:

- (a) $\sqrt{3}x^3 - x^2 + 10$ (c) $4x^{\frac{2}{3}} - x^4 + 10$ (e) $\frac{3x^2 - 7x + 1}{5}$ (g) $\sqrt[3]{x^6} - x + 2$
 (b) $\frac{5}{x^2 + 3x}$ (d) 7 (f) $\sqrt{x + 1}$ (h) $\frac{1}{x}$

2. Completar el siguiente cuadro:

Polinomio	Grado	Coeficiente Principal	Término Independ.	¿Completo?	Monomio de grado 2
$P(x) = x^2 - 7x^4 - x^3 + 2x$					
$P(x) = 2x^3 - 7x^5 - 3$					
$P(x) = x^5 - x^4 + 6x^2 - 3$					
$P(x) = -2x^3 + 5x^2 - \sqrt{12}$					
$P(x) = \frac{2}{3}x^7 - 3x^4 + 5x - \pi$					

3. Escribe un polinomio de grado tres cuyo término independiente sea -2 y cuyo término principal sea 6.

4. Sean $P(x) = ax^4 - 3x^2 + 8x - 1$ y $q(x) = x^4 + bx^3 - 3x^2 + cx - 1$. Si $P(x) = q(x)$ ¿qué se puede decir de a, b y c ?

Definición 5 (Suma de polinomios) Dados dos polinomios $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ se llama suma de P y Q y se denota por $(P + Q)(x)$, al polinomio que tiene por coeficiente i -ésimo la suma de los coeficientes i -ésimos de P y de Q .

Es decir, para sumar polinomios se agrupan los términos del mismo grado y se suman sus coeficientes.

La diferencia de polinomios $P(x) - Q(x)$ se define como $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$

Propiedad 2 (PROPIEDADES DE LA SUMA DE POLINOMIOS)

- $\text{grad}(P + Q) \leq \text{máx}\{\text{grad}(P); \text{grad}(Q)\}$

En general:

$$\begin{array}{l} P(x) \\ r(x) \end{array} \left| \begin{array}{l} q(x) \\ c(x) \end{array} \right.$$

Tenemos que:

$$\boxed{P(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)} \quad (*)$$

Esta relación recibe el nombre de **Algoritmo de Euclides de la división** y puede escribirse también en la forma:

$$\boxed{\frac{P(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}}$$

sin más que dividir (*) entre $q(x)$

La expresión (*) tiene el máximo interés cuando el resto $r(x)$ es cero, en cuyo caso se obtiene:

$$P(x) = q(x) \cdot c(x)$$

que expresa el polinomio $P(x)$ como producto de dos polinomios de grado menor y por tanto más sencillos. En este caso se dice que el polinomio $q(x)$ **divide** al polinomio $P(x)$ y se denota por:

$$q(x) \mid P(x)$$

Definición 9 Se dice que un polinomio $q(x)$ es **divisor** de un polinomio $q(x)$ si $q(x) \mid P(x)$. En este caso se dice también que $P(x)$ es **múltiplo** de $q(x)$

1. Dados los polinomios

$$\bullet P(x) = x + 6x^2 - 7x^3 + 8x^6 \quad \bullet Q(x) = x - 6x^2 - 7x^3 + 8x^6 \quad \bullet R(x) = -x - 6x^2 + 7x^3 - 8x^6$$

calcular :

(a) $P + Q + R$

(c) $P(Q + R)$

(b) $P - Q - R$

(d) $3 \cdot P^2$

2. Dados los polinomios

$$\bullet P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 5$$

$$\bullet R(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5$$

$$\bullet Q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$$

$$\bullet S(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 3$$

calcular :

(a) $2P - 3Q + R - S$

(c) $(3P - 2R) - (3S + 2Q)$

(b) $(3P - 2Q) - (2S - 3R)$

(d) $3 \cdot P^2$

3. Determina un polinomio $P(x)$ tal que $2P(x) + Q(x) - R(x) = 3x - 1$, siendo $Q(x) = x^2 - 2x - 6$ y $S(x) = x^3 - 3x + 2$.

4. Efectúa las siguientes divisiones de polinomios e indica en cada caso cuál es el cociente y el resto.

(a) $3x^5 + x^2 - 2x + 1 : 7x^3$

(f) $12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 12 : 3x^2 - 7x - 4$

(b) $2x^3 + x^2 - 3x + 1 : 2x^2 + 1$

(g) $\frac{3}{2}x^3 - 2x + 7 : x^2 - 2x + 1$

(c) $38x^4 - 65x^3 + 27 : -2x^2 - 5x + 3$

(h) $x^4 - 2x^3 + \frac{1}{4} : \frac{3}{2}x^2 - 2$

(d) $x^2 - x + 1 : 1 - x - x^2$

(i) $x^{12} - 3a^3x^9 + 5a^6x^6 + 3a^9x^3 - 7a^{12} : x^3 - a^3$

(e) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 1 : 2x^2 - 3x - 1$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini permite efectuar divisiones del tipo $P(x)$ (polinomio cualquiera) entre uno del tipo $x - \boxed{a}$ con $a \in \mathbb{R}$ de forma rápida y sencilla.

Recordemos con un ejemplo como se hace:

$$\begin{array}{r}
 a_0x^4 \quad a_1x^3 \quad a_2x^2 \quad a_3x \quad a_4 \\
 5x^4 \quad -3x^3 \quad -4x^2 \quad +6x \quad -1 \quad | \quad x \quad -2 \\
 \hline
 -5x^4 \quad +10x^3 \\
 \hline
 7x^3 \\
 -7x^3 \quad +14x^2 \\
 \hline
 10x^2 \\
 -10x^2 \quad +20x \\
 \hline
 26x \\
 -26x \quad +52 \\
 \hline
 \boxed{51}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 a = 2 & 5 & -3 & -4 & 6 & -1 \\
 & & 10 & 14 & 20 & 52 \\
 \hline
 & 5 & 7 & 10 & 26 & 51 \\
 \hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \boxed{\text{resto}}
 \end{array}$$

Tenemos como resultado que:

$$5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = (x - 2) \cdot (5x^3 + 7x^2 + 10x + 26) + 51$$

o bien:

$$\frac{5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x - 2} = 5x^3 + 7x^2 + 10x + 26 + \frac{51}{x - 2}$$

Ejercicios

1. Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

- (a) $x^3 - x^2 + 11x - 10 : x - 2$
- (b) $8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2 : x + 3$
- (c) $3x^5 - 8x + 4 : x + \frac{3}{4}$
- (d) $x^8 - 1 : x - 1$
- (e) $3x^5 - 4x^2 + x : x + \frac{1}{2}$
- (f) $x^6 - 64 : x - 2$
- (g) $x^4 - 8x^2 + 4\sqrt{2} : x - \sqrt{2}$
- (h) $x^4 - 4x^2 + 2x - 4\sqrt{2} : x - 2\sqrt{2}$
- (i) $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x + 4 : x - 2$
- (j) $7x^2 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{12}x - \frac{15}{4}x^3 + \frac{1}{2} : x + 3$
- (k) $2y^4 + ay^3 + \frac{1}{2}a^2y^2 - a^3y + \frac{3}{8}a^4 : y - \frac{1}{2}a$
- (l) $2x - m^4x^3 + 4m^2x^4 - \frac{1}{2}m^6x^2 - m^2 : x - \frac{1}{2}m^2$
- (m) $my^4 + m^2a^2y^3 - 2m^3a^4y^2 + ay - ma^3 : y - ma^2$
- (n) $(a - c)x^3 - (a - c)^2x^2 + (a - c)x - (a - c)^2 : x - (a - c)$

Valor numérico de un polinomio. Ceros de un polinomio

Definición 10 (Valor numérico de un polinomio para $x = k$) El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = k$ (k un número real) es el valor que se obtiene al sustituir la variable x por el valor k y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio. Se denota por $P(k)$.

Ejemplo

Si $P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ y $k = 2$, el valor numérico de $P(x)$ para $x = 2$ será:

$$p(2) = 5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1 = 51$$

Definición 11 (Raíz o cero de un polinomio) Dados $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ un número real, se dice que a es un cero (o una raíz) del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$, es decir, si el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ es cero.

Ejercicios

1. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Todos los polinomios tienen algún cero.
- (b) Los polinomios de primer grado tienen un único cero.
- (c) Los polinomios de segundo grado tienen dos ceros.

2. Un polinomio de primer grado $P(x) = ax + b$ es una función lineal. ¿Cómo es su representación gráfica? Si te dan la representación gráfica de un polinomio de primer grado ¿Sabrías encontrar sus ceros?

Teorema del resto. Consecuencias

Teorema 1 (TEOREMA DEL RESTO) El valor que toma un polinomio $P(x)$ cuando hacemos $x = a$, es decir $p(a)$, coincide con el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$.

Observación

Observemos detenidamente lo que dice el teorema:

1. Si en un polinomio sustituimos x por un número a y efectuamos las operaciones indicadas obtenemos otro número al que llamamos $P(a)$.
2. Si dividimos este polinomio $P(x)$ entre el polinomio $x - a$ el resto de la división es un número al que llamamos R .
3. El teorema nos dice que estos números son el mismo, es decir que $P(a) = R$

Demostración: Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre $x - a$ obtendremos: $P(x) = C(x) \cdot (x - a) + r$ (*) donde $C(x)$ es un polinomio de un grado menor que $P(x)$ y R es un polinomio de grado cero, es decir, un número (puesto que el divisor $x - a$ tiene grado uno). La igualdad (*) es cierta para cualquier valor de x y por tanto lo es en particular para $x = a$. Así: $P(a) = c(a) \cdot (a - a) + R$ y como $a - a = 0$ obtenemos:

$$P(a) = R$$

como queríamos demostrar.

Consecuencias

Dos consecuencias inmediatas del teorema son las siguientes:

1. Si tenemos un polinomio $P(x)$ y queremos hallar su valor numérico para un número a , podemos hacerlo de dos formas: directamente, sustituyendo x por a ; o bien utilizando el teorema del resto que nos asegura que $P(a)$ es igual al resto de la división de $P(x)$ entre $x - a$. Así para hallar $P(a)$ podemos efectuar la división.

Ejemplo

$P(x) = \frac{1}{4}x^5 - 7x^2 + 6x + 3$ para $x = 2$ vale:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -7 & 6 & 3 \\ 2 & & \frac{1}{2} & 1 & 2 & -10 & -8 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & -5 & -4 & -5 = P(2) \end{array}$$

2. De la misma forma si queremos averiguar el resto de una división del tipo $P(x)$ entre $x - a$ podemos hacerlo hallando el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$

Ejemplo

Si $P(x) = 3x^{100} + 5x^{25} - 3x^{10} + 2x^2 - 5$, el resto de la división de $P(x)$ entre $x + 1$ será igual a $p(-1)$.

$$\text{Resto} = p(-1) = 3(-1)^{100} + 5(-1)^{25} - 3(-1)^{10} + 2(-1)^2 - 5 = 3 - 5 - 3 + 2 - 5 = -8$$

Ahora bien, la consecuencia más importante del teorema del resto es la que veremos en el siguiente punto.

Ejercicios

1. Utilizando el teorema del resto, averigua cuál es el resto de las siguientes divisiones:

(a) $x^4 - 5x^2 + 7x : x + 2$

(e) $x^{16} - 2x^8 + 1 : x + 1$

(b) $x^5 - x^4 + 7x^2 + 18 : x - 1$

(f) $x^3 - 2x^2 + 2 : x + \frac{1}{2}$

(c) $x^4 + 3 : x + 3$

(g) $x^4 + 1 : x - 1$

(d) $x^8 + x^6 + x^4 - x^2 - 1 : x + 1$

(h) $-x^4 + x^2 - 1 : x - 1$

(i) $3x^2 - \frac{x}{4} + 2 : x + \frac{1}{4}$

(j) $-2x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 : x + \frac{1}{3}$

2. Dado el polinomio $P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 1$, halla de dos formas distintas $p(1)$. Lo mismo para $p(-2)$.
3. ¿Es 3 una raíz (cero) del polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$?
4. Añade el término independiente al polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + x$ para que resulte divisible por $x - 2$.
5. ¿Qué valor ha de tener m para que el polinomio $P(x) = x^5 - 8x^2 + mx - 6x^3 + 1$ sea divisible por $x - 4$?
6. En el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2m$ determina m para que al dividirlo por $x + 2$ dé 16 de resto.
7. ¿Qué valor ha de tener m para que $x + 1$ divida a: $x^3 + (m - 4)x^2 - 2x - (2m + 1)$.
8. En el polinomio $P(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^3 + ax^2 + 4x + b$, halla a y b sabiendo que $P(x)$ es divisible por $x - 3$ y por $x + 1$.
9. Determina el polinomio $ax^2 + bx + c$, sabiendo que es divisible por $x + 2$, da restos iguales al dividirlo por $x + 1$ y por $x + 3$ y que el término independiente es 4.
10. Halla el polinomio de grado tres que verifica las siguientes condiciones:
 - (a) El coeficiente principal es 1.
 - (b) Es divisible por $x + 1$.
 - (c) El término independiente es 6.
 - (d) La imagen de -2 es cero.
11. Halla el polinomio de grado tres que verifica las siguientes condiciones:
 - (a) La imagen de 0 es 16.
 - (b) El coeficiente principal es 1.
 - (c) Es divisible por $x - 1$.
 - (d) 4 es raíz del polinomio.
12. En el polinomio $P(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 3m$, ¿Qué valor ha de tener m para que $(x - \frac{1}{2})$ sea un factor en su descomposición factorial?

Factorización de polinomios

Si $P(x)$ es un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ es un cero del polinomio ($P(a) = 0$), en virtud del teorema del resto, la división de $P(x)$ entre $x - a$ tendrá resto cero (resto= $P(a)$ =0) y por tanto tendremos que:

$$P(x) = (x - a) \cdot c(x)$$

donde $C(x)$ es el polinomio cociente (de un grado menor que $P(x)$).

El polinomio $P(x)$ podrá escribirse como producto de un polinomio $c(x)$ por $x - a$.

A su vez, si $b \in \mathbb{R}$ es un cero de $c(x)$ tendremos (por las mismas razones) que:

$$C(x) = Q(x) \cdot (x - b)$$

y así:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - b) \cdot (x - a)$$

Si ahora encontramos un cero de $Q(x)$ podemos seguir factorizando el polinomio $P(x)$ (es decir, escribirlo como producto de polinomios más sencillos).

El problema está en localizar los ceros de un polinomio. A ello nos ayuda la siguiente propiedad:

Propiedad 4 Posibles ceros racionales de un polinomio.

1. Los ceros enteros de un polinomio son divisores del término independiente.
2. Los ceros racionales de un polinomio están entre las fracciones que tienen:
 - como numerador un divisor del término independiente.
 - como denominador un divisor del coeficiente principal.

Ejercicios

Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

1. Si $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 6$ sus ceros enteros son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
2. Si $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 6$ el número $\frac{3}{4}$ no puede ser un cero de $P(x)$ porque aunque 3 es un divisor de 6, 4 no lo es de 3.

Observación

1. En el caso en que el término independiente valga 0, extraemos x factor común tantas veces como sea posible, como primer paso para la factorización.
2. En el caso en que todos los coeficientes del polinomio posean un divisor común, lo sacaremos factor común al principio, para hacer más sencillos los cálculos y obtener el máximo grado de factorización.

Ejemplo

$$P(x) = 2x^6 + 4x^5 - 14x^4 - 16x^3 + 24x^2 =$$

sacamos máximo factor común:

$$= 2x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12) =$$

Posibles ceros enteros de $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12)$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ 1 & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & 0 \end{array}$$

de donde:

$$P(x) = 2x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$$

Posibles ceros enteros de $q(x)$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Con 1 y -1 no sale resto cero. Probamos con 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Así:

$$P(x) = 2x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6)$$

Posibles ceros enteros de $x^2 + 5x + 6$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Con ± 1 ya sabemos que no da cero. Si probamos con 2 vemos que tampoco.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

y por lo tanto:

$$P(x) = 2x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$$

que está así factorizado al máximo .

3. Supongamos que queremos factorizar un polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ y nos encontramos con que no tiene ceros enteros ni racionales (como ocurre por ejemplo con $2x^2 - 4$).

Si el polinomio fuera de grado mayor no podríamos, con lo que sabemos, averiguar si tiene otros ceros; pero en el caso del polinomio de segundo grado podemos calcular sus ceros directamente sin más que resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Veamos, una vez calculados sus ceros, como se factoriza:

Ejemplo

$$P(x) = 2x^2 - 4$$

$$2x^2 - 4 = 0 \quad 2x^2 = 4 \quad x^2 = 2 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Si hacemos Ruffini para dividir (tomamos por ejemplo el cero $+\sqrt{2}$) obtenemos

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 0 & -4 \\ \sqrt{2} & & 2\sqrt{2} & 4 \\ \hline & 2 & 2\sqrt{2} & 0 \end{array}$$

Y así:

$$2x^2 - 4 = (x - \sqrt{2}) \cdot (2x + 2\sqrt{2}) = (x - \sqrt{2}) \cdot 2 \cdot (x + \sqrt{2}) = 2 \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$$

Es decir, nos queda:

$$P(x) = \text{coeficiente principal} \cdot (x - \text{un cero}) \cdot (x - \text{otro cero})$$

CONCLUSION:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ y α , β son sus ceros, el polinomio $P(x)$ factoriza de la siguiente manera:

$$P(x) = a \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta)$$

4. Las **identidades notables** pueden ayudarnos a menudo a factorizar de forma rápida y sin cálculos.

Identidades notables

$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$	El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo
$(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$	El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	La suma de un binomio por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de cada uno de los monomios
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	El cubo de una suma es igual al cubo del primero más el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	El cubo de una suma es igual al cubo del primero menos el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los monomios más los dobles productos de cada monomio con los restantes, respectando la regla de los signos

Ejemplo

- (a) $2x^2 - 18 = 2 \cdot (x^2 - 9) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$
- (b) $x^4 - 81 = (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9) = (x^2 + 9) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$
- (c) $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = ((x + 1) \cdot (x - 1))^2 = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$

Definición 12 (Multiplicidad de los ceros) Si en la factorización de un polinomio $P(x)$ aparece un cero α n veces se dice que α es un cero de multiplicidad n . En este caso, en la factorización de $P(x)$ aparecerá el factor $(x - \alpha)^n$.

- Si $n=2$ se dice que el cero es doble.
- Si $n=3$ se dice que el cero es triple.

Ejercicios

1. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

- (a) Si un polinomio no tiene ceros reales, entonces no se puede factorizar.
- (b) El polinomio $x^3 + 7x^2 + 6x + 1$ no tiene ceros enteros ni racionales (compruébalo) . Por tanto no tiene ceros y no se puede factorizar en.
- (c) Si $P(x)$ es un polinomio de grado 3, es imposible que tenga 4 ceros.
- (d) Si α es un cero del polinomio $P(x)$ entonces $x - \alpha \mid P(x)$
- (e) α es un cero de $P(x) \iff$ en la factorización de $P(x)$ aparece el factor $(x - \alpha)$

2. Halla las raíces racionales de los siguientes polinomios:

- (a) $x^3 - 7x^2 - 5x + 75$
- (b) $x^3 - 2x^2 + x - 2$
- (c) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$
- (d) $x^3 + 3x^2 - x - 3$
- (e) $(x + 1)^3$
- (f) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$
- (g) $(x - 3)^2 \cdot (2x + 1) \cdot (x^2 + 2)$
- (h) $9x^3 + 6x^2 - 5x - 2$

3. Factoriza los siguientes polinomios:

- (i) $2x^3 - 5x^2 + x + 2$
- (ii) $x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54$
- (iii) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
- (iv) $x^4 + 12x^3 + 47x^2 + 70x + 50$
- (v) $x^4 + x^3 - 24x^2 - 4x + 80$
- (vi) $x^3 - 2x^2 + x - 2$
- (vii) $x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$
- (viii) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$
- (ix) $x^2 - 2x - 5$
- (x) $(x^2 + 3x - 4)^2$
- (xi) $x^4 - 4$
- (xii) $x^5 + 1$
- (xiii) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$
- (xiv) $4x^2 - 9$
- (xv) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
- (xvi) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$
- (xvii) $P(x) = 5x^3 - 5x$
- (xviii) $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$
- (xix) $P(x) = x^5 + 5x^3 - 6x^2$
- (xx) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 20$
- (xxi) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 27x + 9$
- (xxii) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10$
- (xxiii) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

4. Efectúa las siguientes operaciones:

- (a) $(1 + x) \cdot (1 - 3x) + (1 + x) \cdot x^2$
- (b) $(2 + x) \cdot (3 + x^2) + (2 + x) \cdot 3 - x^2$
- (c) $(1 + x) \cdot (1 - 3x) + (2 + x) \cdot (3 - x^2)$
- (d) $(2 + x) \cdot (1 + 2x) + 6x \cdot (1 - x^2) \cdot 2x$

5. En las siguientes expresiones, saca como factor común todo lo que puedas:

- (a) $3x^2y + 2xy^2z$ (f) $6x^2y - 3y^3 + 2x^2$
 (b) $5xy + 3x + xy - x^2y^2$ (g) $2ax^2 - 4a^2x + 12ax$
 (c) $(x^2 + y^2 + 2xy) + (x + y) \cdot (x - y)$ (h) $49x^2 - 21ax + 42x^3$
 (d) $(x + y)^2 \cdot (x - y) + (x - y)^2 \cdot (x + y)^2$ (i) $-x + x^2 - x^3 + x^4$
 (e) $15(x + y) + 25(x + y)^2 + 20(x + y)^3$
 (j) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) + (x - 1) \cdot (x + 1)^2$
 (k) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) + (x^2 + 1) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$
 (l) $\frac{1}{8}a^2x^3 - \frac{3}{16}a^3x^2 - \frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{5}{12}a^5x^2$

6. Descompón en factores, realizando una doble extracción de factor común.

- (a) $ac - bc + ad - bd$ (f) $y^6 - y^4 + 2y^3 - 2y$
 (b) $ay - 2by - 2bx + ax$ (g) $by^2 - 2a + ay^2 - 2b$
 (c) $a^2 - ab - ax - bx$ (h) $3mn + mp + 3rn + rp$
 (d) $6ab - 9b^2 + 2ax - 3bx$ (i) $3mx^2 - nx^2 + 3my^2 - ny^2$
 (e) $14ax^2 - 7a^2 - 2x^2 + a$ (j) $32x^6 - 2x^4 - 32y^4x^2 + 2y^4$

Teorema 2 (Teorema fundamental del álgebra) Si $P(x)$ es un polinomio de grado n , entonces posee n raíces reales o complejas.

Demostración: Haremos la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ son ceros de $P(x)$. Entonces en su factorización tendríamos:

$$P(x) = k \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \cdot (x - \alpha_{n+1}) \cdots$$

Pero este producto tiene grado $\geq n + 1$ y por tanto es imposible que sea igual a $P(x)$ que tenía grado n .

m.c.m. y m.c.d. de dos o más polinomios. Algoritmo de Euclides

El m.c.m. y el m.c.d. de varios polinomios se definen de forma análoga que el m.c.m. y el m.c.d. de varios números.

Recordemos que:

- El m.c.d. de dos o más números es el mayor número que sea divisor de los números dados.
- El m.c.m. de dos o más números es el menor número que sea divisible por los números dados.

De la misma forma se define:

Definición 13 (Máximo común divisor y mínimo común múltiplo)

1. El m.c.d. de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que divide a los polinomios dados.
2. El m.c.m. de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es divisible por los polinomios dados.

Cálculo del m.c.m. y el m.c.d. Para calcular el m.c.m. y el m.c.d. de dos números tenemos dos posibilidades:

- Método general (que sirve para dos o más números):
 Factorizar (expresar como producto de números primos) los números dados y entonces:
 - El m.c.d. es el producto de los factores comunes elevados al menor exponente.
 - El m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

- Algoritmo de Euclides

Este algoritmo permite calcular el m.c.d. de dos números. Recordemos cómo funciona calculando el m.c.d. de los números 5207 y 10541.

Cogemos el mayor y lo dividimos por el más pequeño poniendo el cociente sobre el divisor.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \ 0 \ 5 \ 4 \ 1 \ | \ 5 \ 2 \ 0 \ 7 \\ \underline{0 \ 1 \ 2 \ 7} \end{array}$$

Ahora cogemos el divisor y lo dividimos por el resto, poniendo siempre el cociente sobre el divisor.

$$\begin{array}{r} 2 \qquad \qquad 4 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 5 \ 4 \ 1 \ | \ 5 \ 2 \ 0 \ 7 \qquad | \ 1 \ 2 \ 7 \\ \underline{0 \ 1 \ 2 \ 7} \qquad \underline{1 \ 2 \ 7} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \ 0 \end{array}$$

Este proceso lo hemos de continuar hasta que el resto de la división de cero. Entonces el último divisor (en nuestro ejemplo 127) es el m.c.d.

Para calcular el m.c.m. una vez averiguado el m.c.d. de dos números x e y utilizaremos la siguiente propiedad:

$$x \cdot y = m.c.d.(x, y) \cdot m.c.m.(x, y)$$

Así en nuestro ejemplo:

$$10541 \cdot 5207 = 127 \cdot m.c.m.(10541, 5207)$$

De donde:

$$m.c.m.(10541, 5207) = \frac{10541 \cdot 5207}{127} = 432181$$

Este método es igualmente aplicable al cálculo del m.c.d. y m.c.m. de dos polinomios.

Ejemplo

Sean $P(x) = x^4 - 81$ y $q(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

- Método general

Factorizamos los polinomios:

$$P(x) = x^4 - 81 = (x^2 - 9) \cdot (x^2 + 9) = (x + 3) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 9)$$

$$q(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 3) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

$$\text{m.c.d. } (P(x), q(x)) = (x - 3) \cdot (x + 3) = (x^2 - 9)$$

$$\text{m.c.m. } (P(x), q(x)) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 9) \cdot (x + 2)$$

• Método de Euclides

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad \quad \quad -81 \quad \quad \quad \begin{array}{r} x \quad -2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \end{array} \\
 -x^4 \quad -2x^3 \quad +9x^2 \quad +18x \\
 \hline
 \quad \quad 2x^3 \quad +4x^2 \quad -18x \quad -36 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 13x^2 \quad -117
 \end{array}$$

Ahora hay que dividir $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ por $13x^2 - 117$

En el caso de los polinomios, en vez de tomar el resto (en el ejemplo $13x^2 - 117$), se puede tomar un polinomio asociado a éste, es decir, un polinomio que se obtenga multiplicando o dividiendo dicho polinomio por un número.

En nuestro ejemplo:

$$13x^2 - 117 = 13 \cdot (x^2 - 9)$$

y es mucho más cómodo utilizar $x^2 - 9$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad +2x^2 \quad -9x \quad -18 \quad \quad \begin{array}{r} x \quad +2 \\ x^2 \quad -9 \end{array} \\
 -x^3 \quad \quad \quad +9x \\
 \hline
 \quad \quad 2x^2 \quad \quad -18 \\
 \quad \quad -2x^2 \quad \quad +18 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Como el resto es cero, tenemos que el m.c.d. es el último divisor: $x^2 - 9$

Para hallar el m.c.m. utilizamos la propiedad antes mencionada, válida también para polinomios. Así:

$$(x^4 - 81) \cdot (x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = (x^2 - 9) \cdot m.c.m.(P(x), q(x))$$

$$m.c.m.(P(x), q(x)) = \frac{(x^4 - 81) \cdot (x^3 + 2x^2 - 9x - 18)}{x^2 - 9} = (x^2 + 9) \cdot (x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$$

Ejercicios

1. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios en cada uno de los apartados siguientes:

- (a) $P(x) = x^3 - 1$, $q(x) = x^2 - x$, $r(x) = x^2 - 1$
- (b) $P(x) = 3x^4 - 3x^3$, $q(x) = 12x^3 + 12x^2$, $r(x) = 18x^3 - 18x$
- (c) $P(x) = 15z - 5z^2$, $q(x) = z^2 - 6z + 9$, $r(x) = 9 - z^2$
- (d) $P(x) = 5y - 10$, $q(x) = 15y^2 - 60$, $r(x) = 3y^2 - 12y + 12$
- (e) $P(x) = (x - 1)^2 \cdot x$, $q(x) = (x - 1)^3 \cdot (x + 2)$, $r(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 5) \cdot x$
- (f) $P(x) = ax - ay - bx + by$, $q(x) = x^2 - 2xy + y^2$, $r(x) = 3a^2 - 6ab + 3b^2$
- (g) $P(x) = x^4 - y^4$, $q(x) = x^2 - y^2$, $r(x) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

2. Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$, sabiendo que $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $y - \frac{3}{2}$ son ceros del polinomio

3. Los valores $x = 3$, $x = 2$ y $x = -2$, son tres ceros del polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$. Halla el cuarto cero y descompón el polinomio en factores.

4. Averigua de dos formas si:

- (a) $x + 3 \mid 3x^3 - 21x + 18$
- (b) $x - 1 \mid 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1$
- (c) $x + 1 \mid \frac{3}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$
- (d) $x - \frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + 4x^5$
- (e) $x - a \mid a^2x^3 + ax^2 - 2a^3 + a^2x - 3ax^4 + 2x^5$

Fracciones algebraicas

Definición de fracción algebraica. Fracciones equivalentes

Fracciones algebraicas.

Definición 14 (Fracción algebraica) Una fracción algebraica es una expresión del tipo:

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{con } p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ y } q(x) \neq 0$$

es decir, es un cociente de polinomios. Denotaremos el conjunto de las fracciones algebraicas por $K[x]$

Ejemplo

1. $F_1(x) = \frac{x^2+1}{3x}$ es una fracción algebraica.
2. $F_2(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x}$ no es una fracción algebraica. (El numerador no es un polinomio.)
3. $F_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7$ es una fracción algebraica. (Podemos considerarla una fracción con denominador 1, que es un polinomio.)
4. $F_4(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1}{\sqrt{3x+2}}$ no es una fracción algebraica. (El numerador no es un polinomio, puesto que el exponente $\frac{3}{2}$ no es natural.)
5. $F_5(x) = 3x^{-6} + 2x + 7$ si es una fracción algebraica puesto que:

$$3x^{-6} + 2x + 7 = 3 \cdot \frac{1}{x^6} + 2x + 7 = \frac{3 + 2x^7 + 7x^6}{x^6}$$

que es un cociente de polinomios.

Ejercicios

De las siguientes expresiones indica cuales son fracciones algebraicas:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $F(x) = \frac{x^3-3}{8}$ | 5. $F(x) = \frac{ax+b}{x^{\frac{1}{4}}}$ |
| 2. $F(x) = \sqrt{2x-1}$ | 6. $F(x) = \frac{\sqrt{5}x^2 - \sqrt{2}x + 5}{x^2 + \sqrt{5}}$ |
| 3. $F(x) = \frac{x-1}{x^2+5}$ | 7. $F(x) = \frac{x^{-5} - 10x^{-2}}{x^2+5}$ |
| 4. $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ | 8. $F(x) = \sqrt{\frac{2x^2-3x-1}{x^2+5x+10}}$ |

Definición 15 (Valor numérico de una fracción algebraica) Dada una fracción algebraica $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y un número real $k \in \mathbb{R}$, se llama valor numérico de $F(x)$ para $x = k$ al valor que se obtiene al sustituir x por k en $F(x)$ y realizar las operaciones indicadas. El valor numérico de una fracción $F(x)$ para $x = k$ se denota por: $F(k)$

Ejemplo

$$F(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$$

- El valor numérico para $x = 2$ será: $F(2) = \frac{3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1}{2^2 - 1} = \frac{15}{3} = 5$

- El valor numérico para $x = -3$ será: $F(-3) = \frac{3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 1}{(-3)^2 - 1} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$
- El valor numérico para $x = 1$ será: $F(2) = \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{1^2 - 1} = \frac{4}{0}$ que no tiene sentido. Diremos que la fracción $F(x)$ no está definida para $x = 1$.

Observación

Las fracciones algebraicas no están definidas para aquellos valores de x que anulan su denominador. Es decir:

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ esta definida } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{ceros de } q(x)\}$$

Ejercicios

Averigua para qué valores no están definidas las siguientes fracciones :

1. $F_1(x) = \frac{3x^2 + 7x - 1}{2x + 6}$
2. $F_2(x) = \frac{4x - 4}{x^2 + 1}$
3. $F_3(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 7x - 2}{2x^3 - 5x^2 + x + 2}$
4. $F_4(x) = \frac{7x^3 - 2x + 6}{(x^2 - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x^4 + 5) \cdot x^3}$

Fracciones equivalentes.

Definición 16 (Fracciones equivalentes) Se dice que dos fracciones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)}$ y $\frac{r(x)}{s(x)}$ son equivalentes si $p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$

$$\frac{p(x)}{q(x)} \simeq \frac{r(x)}{s(x)} \iff p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$$

Ejemplo

1. $\frac{1}{x} \simeq \frac{x^2 - 3}{x^3 - 3x^2}$ puesto que: $1 \cdot (x^3 - 3x^2) = x \cdot (x^2 - 3)$
2. $\frac{3x}{x+2} \not\simeq \frac{x+1}{x-3}$ puesto que: $3x \cdot (x-3) \neq (x+2) \cdot (x-1)$

Observación

- En el caso de las fracciones de números enteros, la definición de fracciones equivalentes es la misma: $\frac{2}{5} \simeq \frac{4}{10}$ $2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$.

Sin embargo hay una diferencia con las fracciones algebraicas:

$\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ representan el mismo número racional $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$, tienen el mismo valor y podemos decir que son iguales.

En el caso de las fracciones algebraicas, dos fracciones equivalentes no son exactamente iguales.

Por ejemplo:

Las fracciones $\frac{1}{x}$ y $\frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x}$ son equivalentes.

Ahora bien:

$$\frac{1}{x} \text{ y } \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x^2} = \frac{x^2 - 9}{x \cdot (x^2 - 9)} = \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{x \cdot (x-3) \cdot (x+3)}$$

no son iguales. Sus valores numéricos coinciden para todos los números reales salvo para 0, -3, y 3. (Compruébalo con ejemplos). Para $x = 0$ ninguna de las dos fracciones está definida, para $x = -3$ y $x = 3$ la primera fracción está definida mientras que la segunda no lo está.

Ejercicios

Estudia si las siguientes fracciones son equivalentes y en el caso en que lo sean, indica en qué se diferencian.

1. $\frac{3}{x}$ y $\frac{15}{5x}$

2. $\frac{3}{x}$ y $\frac{3x-6}{x^2-2x}$

3. $\frac{3}{x}$ y $\frac{3x^2+3}{x^2+1}$

4. $\frac{x+1}{x^2+2x+1}$ y $\frac{1}{x+1}$

Propiedad fundamental de las fracciones algebraicas. Aplicaciones.

Teorema 3 (Propiedad fundamental de las fracciones algebraicas) Si en una fracción algebraica multiplicamos numerador y denominador por un mismo polinomio distinto de cero, obtenemos una fracción equivalente a la primera.

$$\text{Si } 0 \neq r(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \frac{p(x)}{q(x)} \simeq \frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot r(x)}$$

Demostración: Basta aplicar la definición de fracciones equivalentes y tener en cuenta que el producto de polinomios es conmutativo.

• Esta propiedad (igual que en el caso de las fracciones de números) tiene dos importantísimas aplicaciones: la **simplificación de fracciones** y la **reducción a denominador común**.

Simplificación de fracciones

Dándole la vuelta a la propiedad anterior, tenemos que las fracciones algebraicas se pueden simplificar dividiendo numerador y denominador por un mismo polinomio (distinto de cero), obteniéndose una fracción equivalente.

Ejemplo

• $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1) \cdot (x-1)} \simeq \frac{1}{x+1}$

• $\frac{x^3-2x^2}{x^5-2x^4} = \frac{x^2 \cdot (x-2)}{x^4 \cdot (x-2)} \simeq \frac{1}{x^2}$

Observación

Para simplificar una fracción algebraica factorizaremos numerador y denominador y simplificaremos los factores comunes.

Ejercicios

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{x^6+x^4}{x^2+2x}$

2. $\frac{x^3-1}{x-1}$

3. $\frac{2x^4+3x^2-5}{x^2+2x+1}$

4. $\frac{x^2-81}{x^2+9x}$

5. $\frac{x^2-25}{x^3+5x^2}$

6. $\frac{x^4-7x^3+11x^2-7x+10}{x^4-2x^3+x^2-2x}$

7. $\frac{x^4-x^3+2x^2-2x}{x^4-2x^3+2x^2-4x}$

8. $\frac{x^4-2x^2+1}{(x-1)^2 \cdot (x+1)}$

$$9. \frac{x^3 a^2 - a^2 - x^5 + x^2}{ax^3 - x^2 - ax + x^4}$$

$$11. \frac{x^4 - y^4}{(x+y)^2 \cdot (x-y)^2}$$

$$10. \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^4 - 1}$$

Reducción de fracciones a denominador común.

Propiedad 5 Dadas dos fracciones algebraicas siempre podemos encontrar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Demostración: Dadas $\frac{p(x)}{q(x)}$ y $\frac{r(x)}{s(x)}$, basta tomar:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \simeq \frac{p(x) \cdot s(x)}{q(x) \cdot s(x)}$$

$$\frac{r(x)}{s(x)} \simeq \frac{r(x) \cdot q(x)}{s(x) \cdot q(x)}$$

Ahora bien (igual que hacemos con las fracciones de números) para reducir a común denominador no multiplicaremos los denominadores sino que, con el fin de obtener las fracciones más sencillas posible, tomaremos como denominador común el m.c.m. de los denominadores.

Ejemplo

Reducir a común denominador las siguientes fracciones:

$$1. \frac{3x}{x^2 - 4} \text{ y } \frac{x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

Para buscar el m.c.m. de los denominadores, los factorizamos:

$$x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2) \quad x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

Obtenemos:

$$\text{m.c.m.} \{x^2 - 4, x^2 + 5x + 6\} = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

Y así:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2 - 4} &= \frac{3x}{(x + 2) \cdot (x - 2)} \simeq \frac{3x \cdot (x + 3)}{(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)} \\ \frac{x^2}{x^2 + 5x + 6} &= \frac{x^2}{(x + 2) \cdot (x + 3)} \simeq \frac{x^2 \cdot (x - 2)}{(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)} \end{aligned}$$

$$2. \frac{7x - 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \text{ y } \frac{7x^3 + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\begin{aligned} \frac{7x - 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} &= \frac{7x - 2}{(x + 1)^2 \cdot (x + 2)} \simeq \frac{(7x - 2) \cdot (x - 3)}{(x + 1)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)} \\ \frac{7x^3 + 2}{x^2 - 2x - 3} &= \frac{7x^3 + 2}{(x + 1) \cdot (x - 3)} \simeq \frac{(7x^3 + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)}{(x + 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)} \end{aligned}$$

Ejercicios

Reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

$$1. \frac{x^2}{x+1}, \quad \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} \quad \text{y} \quad \frac{x^3 + 4}{2x + 7}$$

$$2. \frac{7x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}, \quad \frac{15x}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

$$3. \frac{x^2 + y}{15xy - 35y^2}, \quad ; \quad \frac{3y}{12x^2 - 28xy}$$

Operaciones con fracciones algebraicas.

Suma de fracciones algebraicas

Para poder sumar dos fracciones algebraicas es necesario que estas tengan el mismo denominador. En este caso la fracción suma es otra fracción de igual denominador y numerador la suma de los numeradores.

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x) + r(x)}{q(x)}$$

Entonces para sumar fracciones, las reduciremos primero a común denominador.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{3x^4 - 1}{x^2 - 2} + \frac{8x + 2}{x^2 - 2} = \frac{3x^4 - 1 + 8x + 2}{x^2 - 2} \\ \bullet \quad & \frac{3x^4 - 1}{x^2 - 2} + \frac{2x}{x + 1} \simeq \frac{(3x^4 - 1) \cdot (x + 1)}{(x^2 - 2) \cdot (x + 1)} + \frac{2x \cdot (x^2 - 2)}{(x + 1) \cdot (x^2 - 2)} \\ & = \frac{(3x^4 - 1) \cdot (x + 1) + (2x \cdot (x^2 - 2))}{(x^2 - 2) \cdot (x + 1)} = \frac{3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x - 1}{(x^2 - 2) \cdot (x + 1)} \\ \bullet \quad & \frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{3 - 2x}{x + 2} - \frac{5 + 2x}{2x + 4} = \\ & \frac{3x}{(x + 2) \cdot (x - 2)} + \frac{3 - 2x}{x + 2} - \frac{5 + 2x}{2 \cdot (x + 2)} = \\ & \simeq \frac{3x \cdot 2}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} + \frac{(3 - 2x) \cdot (x - 2) \cdot 2}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} - \frac{(5 + 2x) \cdot (x - 2)}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} = \\ & \frac{6x + (3 - 2x) \cdot (x - 2) \cdot 2 - (5 + 2x) \cdot (x - 2)}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} = \\ & \frac{6x + 6x - 12 - 4x^2 + 8x - (5x - 10 + 2x^2 - 4x)}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} = \\ & \frac{-4x^2 + 20x - 12 - 5x + 10 - 2x^2 + 4x}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} = \frac{-6x^2 + 19x - 2}{2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)} \end{aligned}$$

Propiedad 6 (Propiedades de la suma de fracciones algebraicas) • *Conmutativa*

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)}, \frac{r(x)}{s(x)} \in K[x] \quad \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r(x)}{s(x)} + \frac{p(x)}{q(x)}$$

• *Asociativa*

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)}, \frac{r(x)}{s(x)}, \frac{t(x)}{u(x)} \in K[x] \quad \left(\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} \right) + \frac{t(x)}{u(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \left(\frac{r(x)}{s(x)} + \frac{t(x)}{u(x)} \right)$$

• *Existe elemento neutro*

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)} \in K[x] \quad \exists 0 \in K[x] \quad \ni \frac{p(x)}{q(x)} + 0 = 0 + \frac{p(x)}{q(x)}$$

• *Existe elemento opuesto*

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)} \in K[x] \quad \exists -\frac{p(x)}{q(x)} \in K[x] \quad \ni \frac{p(x)}{q(x)} + \left(-\frac{p(x)}{q(x)} \right) = \left(-\frac{p(x)}{q(x)} \right) + \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

Observación

La resta de fracciones se define por:

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \left(-\frac{r(x)}{s(x)} \right)$$

Producto de fracciones algebraicas

Definición 17 (Producto de fracciones) Dadas dos fracciones algebraicas se llama fracción producto a la fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplo

- $\frac{3x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x \cdot (x+1)}{(x^2-1) \cdot (x+2)} = \frac{3x \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \simeq \frac{3x}{(x-1) \cdot (x+2)}$
- Un ejemplo con fracciones en varias variables:

$$\frac{2a+a^2}{2x^2+xy} \cdot \frac{4x^2-y^2}{4+4a+a^2} = \frac{a \cdot (2+a)}{x \cdot (2x+y)} \cdot \frac{(2x+y) \cdot (2x-y)}{(a+2)^2} =$$
$$\frac{a \cdot (a+2) \cdot (2x+y) \cdot (2x-y)}{x \cdot (2x+y) \cdot (a+2)^2} \simeq \frac{a \cdot (2x-y)}{x \cdot (a+2)}$$

Propiedad 7 *Propiedades del producto de fracciones algebraicas.*

- **Commutativa**

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)}, \frac{r(x)}{s(x)} \in K[x] \quad \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r(x)}{s(x)} \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$$

- **Asociativa**

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)}, \frac{r(x)}{s(x)}, \frac{t(x)}{u(x)} \in K[x] \quad \left(\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} \right) \cdot \frac{t(x)}{u(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \left(\frac{r(x)}{s(x)} \cdot \frac{t(x)}{u(x)} \right)$$

- **Existe elemento neutro**

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)} \in K[x], \quad \exists 1 \in K[x] \quad \ni \frac{p(x)}{q(x)} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$$

- **Existe elemento inverso**

$$\forall \frac{p(x)}{q(x)} \in K[x] \quad \ni \frac{q(x)}{p(x)} \in K[x] \quad \ni \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{q(x)}{p(x)} \cdot \frac{p(x)}{q(x)} = 1$$

Observación

- Tenemos el conjunto $F[x]$ de las fracciones algebraicas con dos operaciones internas, suma y producto, de forma que se verifican las siguientes propiedades:
($F[x], +$) es un grupo abeliano.
($F[x], \cdot$) es un grupo abeliano.
Además el producto es distributivo respecto a la suma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \left(\frac{r(x)}{s(x)} + \frac{t(x)}{u(x)} \right) = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} + \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{t(x)}{u(x)}$$

Se dice que ($F[x], +, \cdot$) tiene estructura de **CUERPO**

- El cociente de dos fracciones se halla multiplicando la fracción dividendo por la fracción inversa del divisor.

Ejemplo

$$1. \frac{3x^2}{x-5} : \frac{x^2-x}{x^2-25} = \frac{3x^2}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{x^2-x} = \frac{3x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+5)}{(x-5) \cdot (x^2-x)} = \frac{3x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+5)}{(x-5) \cdot x \cdot (x-1)} \simeq \frac{3x \cdot (x+5)}{(x-1)}$$
$$2. \frac{4x^2}{5ay^2} : \frac{3ax^3}{5y} = \frac{4x^2 \cdot 5y}{5ay^2 \cdot 3ax^3} \simeq \frac{4}{3a^2xy}$$

Ejercicios

1. Realiza las siguientes operaciones, simplificando al máximo el resultado:

(a) $\frac{1}{3} - \frac{2x}{4x^2+3} - \frac{x+1}{3x+2}$

(b) $\frac{x-1}{x^2+6} - \frac{x^2-1}{x+3}$

- (c) $\frac{x+1}{2x^2-3} - \frac{6x}{x+4}$
- (d) $\frac{2x+1}{x^3+2x^2+x} - \frac{x-1}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{x^2-3x}$
- (e) $\frac{2x}{x^2-2x+1} - \frac{x-3}{x^2-x} + \frac{7}{x^2+x-2}$
- (f) $\frac{2x+1}{x^3-3x-2} + \frac{5}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x-1}$
- (g) $\frac{2x-1}{x^2+3x-10} - \frac{2}{x^2+5x} + \frac{5}{x}$
- (h) $\frac{x-y}{x+y} - \frac{3x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$
- (i) $\frac{x}{x^2-y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$
- (j) $\frac{x+4}{x^2-16} : \frac{x+9}{x-4}$
- (k) $\frac{x^3+x^2}{\frac{x^2}{x+1}}$
- (l) $\frac{x}{x+5} \cdot \frac{x^2-5x}{x-5}$
- (m) $\frac{2x}{\frac{3x^2-x}{x+1}}$
- (n) $\frac{x^2-81}{2x-1} \cdot \frac{3-x}{x^2+9x}$
- (o) $\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^2 : \frac{1}{x+1}$
- (p) $\left(\frac{2x-1}{x+2} : \frac{1}{x}\right) : \frac{x^2+1}{3x}$
- (q) $\frac{\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+b^2}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a^2-b^2}} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$
- (r) $\left(\frac{x+1}{x-1} + x\right) : \left(1 - \frac{x(x+1)}{x-1}\right)$
- (s) $\frac{a}{a + \frac{a^2b}{a + \frac{a}{b}}}$
- (t) $\left(\frac{2x^2+2}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{(x-2)^2-3}{x^2-1}\right)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- (a) $\left(\alpha + \frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{5x}{x^2-1}$
- (b) $\frac{3x}{2x^2-6} \cdot \alpha = (2x-1)^2$
- (c) $\frac{2x-1}{\alpha} + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x-1}$
- (d) $\left(3\alpha - \frac{2x}{x^2-1}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x-1}$
- (e) $\frac{2x}{\alpha} + \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2}$
- (f) $\frac{x-1}{3x^2+4} = \frac{\alpha}{3x^4-11x^2-20}$
- (g) $\left(\frac{3x^2}{2x-1}\right)^2 = \alpha^{-1} \cdot \left(\frac{x}{x^2-1} + \alpha\right)$
- (h) $4\alpha + \frac{x-2}{x^2-1} - \frac{4x}{2x^2+4x+2} = -\frac{x}{x^2-2x+1}$