

Polinomios

1. Dados los polinomios

$$\blacksquare P(x) = x + 6x^2 - 7x^3 + 8x^6 \quad \blacksquare Q(x) = x - 6x^2 - 7x^3 + 8x^6 \quad \blacksquare R(x) = -x - 6x^2 + 7x^3 - 8x^6$$

calcular :

a) $P + Q + R$

b) $P - Q - R$

c) $P(Q + R)$

d) $3 \cdot P^2$

2. Dados los polinomios

$$\blacksquare P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 5$$

$$\blacksquare R(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5$$

$$\blacksquare Q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$$

$$\blacksquare S(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 3$$

calcular :

a) $2P - 3Q + R - S$

c) $(3P - 2R) - (3S + 2Q)$

b) $(3P - 2Q) - (2S - 3R)$

d) $3 \cdot P^2$

3. Determina un polinomio $P(x)$ tal que $2P(x) + Q(x) - R(x) = 3x - 1$, siendo $Q(x) = x^2 - 2x - 6$ y $S(x) = x^3 - 3x + 2$.

4. Efectúa las siguientes divisiones de polinomios e indica en cada caso cuál es el cociente y el resto.

a) $3x^5 + x^2 - 2x + 1 : 7x^3$

f) $12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 12 : 3x^2 - 7x - 4$

b) $2x^3 + x^2 - 3x + 1 : 2x^2 + 1$

g) $\frac{3}{2}x^3 - 2x + 7 : x^2 - 2x + 1$

c) $38x^4 - 65x^3 + 27 : -2x^2 - 5x + 3$

h) $x^4 - 2x^3 + \frac{1}{4} : \frac{3}{2}x^2 - 2$

d) $x^2 - x + 1 : 1 - x - x^2$

i) $x^{12} - 3a^3x^9 + 5a^6x^6 + 3a^9x^3 - 7a^{12} : x^3 - a^3$

e) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 1 : 2x^2 - 3x - 1$

5. Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $x^3 - x^2 + 11x - 10 : x - 2$

f) $x^6 - 64 : x - 2$

b) $8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2 : x + 3$

g) $x^4 - 8x^2 + 4\sqrt{2} : x - \sqrt{2}$

c) $3x^5 - 8x + 4 : x + \frac{3}{4}$

h) $x^4 - 4x^2 + 2x - 4\sqrt{2} : x - 2\sqrt{2}$

d) $x^8 - 1 : x - 1$

i) $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x + 4 : x - 2$

e) $3x^5 - 4x^2 + x : x + \frac{1}{2}$

j) $7x^2 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{12}x - \frac{15}{4}x^3 + \frac{1}{2} : x + 3$

k) $2y^4 + ay^3 + \frac{1}{2}a^2y^2 - a^3y + \frac{3}{8}a^4 : y - \frac{1}{2}a$

l) $2x - m^4x^3 + 4m^2x^4 - \frac{1}{2}m^6x^2 - m^2 : x - \frac{1}{2}m^2$

m) $my^4 + m^2a^2y^3 - 2m^3a^4y^2 + ay - ma^3 : y - ma^2$

n) $(a - c)x^3 - (a - c)^2x^2 + (a - c)x - (a - c) : x - (a - c)$

6. Utilizando el teorema del resto, averigua cuál es el resto de las siguientes divisiones:

a) $x^4 - 5x^2 + 7x : x + 2$

e) $x^{16} - 2x^8 + 1 : x + 1$

h) $-x^4 + x^2 - 1 : x - 1$

b) $x^5 - x^4 + 7x^2 + 18 : x - 1$

f) $x^3 - 2x^2 + 2 : x + \frac{1}{2}$

i) $3x^2 - \frac{x}{4} + 2 : x + \frac{1}{4}$

c) $x^4 + 3 : x + 3$

d) $x^8 + x^6 + x^4 - x^2 - 1 : x + 1$

g) $x^4 + 1 : x - 1$

j) $-2x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 : x + \frac{1}{3}$

7. Dado el polinomio $P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 1$, halla de dos formas distintas $P(1)$. Lo mismo para $P(-2)$.

8. ¿Es 3 una raíz (cero) del polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$?
9. Añade el término independiente al polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + x$ para que resulte divisible por $x - 2$.
10. ¿Qué valor ha de tener m para que el polinomio $P(x) = x^5 - 8x^2 + mx - 6x^3 + 1$ sea divisible por $x - 4$?
11. En el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2m$ determina m para que al dividirlo por $x + 2$ dé 16 de resto.
12. ¿Qué valor ha de tener m para que $x + 1$ divida a: $x^3 + (m - 4)x^2 - 2x - (2m + 1)$.
13. En el polinomio $P(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^3 + ax^2 + 4x + b$, halla a y b sabiendo que $P(x)$ es divisible por $x - 3$ y por $x + 1$.
14. Determina el polinomio $ax^2 + bx + c$, sabiendo que es divisible por $x + 2$, da restos iguales al dividirlo por $x + 1$ y por $x + 3$ y que el término independiente es 4.
15. Halla el polinomio de grado tres que verifica las siguientes condiciones:
 - a) El coeficiente principal es 1.
 - b) Es divisible por $x + 1$.
 - c) El término independiente es 6.
 - d) La imagen de -2 es cero.
16. Halla el polinomio de grado tres que verifica las siguientes condiciones:
 - a) La imagen de 0 es 16.
 - b) El coeficiente principal es 1.
 - c) Es divisible por $x - 1$.
 - d) 4 es raíz del polinomio.
17. En el polinomio $P(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 3m$, ¿Qué valor ha de tener m para que $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ sea un factor en su descomposición factorial?
 - a) Si $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 6$ sus ceros enteros son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
 - b) Si $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 6$ el número $\frac{3}{4}$ no puede ser un cero de $P(x)$ porque aunque 3 es un divisor de 6, 4 no lo es de 3.
18. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.
 - a) Si un polinomio no tiene ceros reales, entonces no se puede factorizar.
 - b) El polinomio $x^3 + 7x^2 + 6x + 1$ no tiene ceros enteros ni racionales (compruébalo). Por tanto no tiene ceros y no se puede factorizar.
 - c) Si $P(x)$ es un polinomio de grado 3, es imposible que tenga 4 ceros.
 - d) Si α es un cero del polinomio $P(x)$ entonces $x - \alpha \mid P(x)$
 - e) α es un cero de $P(x) \iff$ en la factorización de $P(x)$ aparece el factor $(x - \alpha)$
19. Halla las raíces racionales de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 7x^2 - 5x + 75$	d) $x^3 + 3x^2 - x - 3$	g) $(x - 3)^2 \cdot (2x + 1) \cdot (x^2 + 2)$
b) $x^3 - 2x^2 + x - 2$	e) $(x + 1)^3$	
c) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$	f) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$	h) $9x^3 + 6x^2 - 5x - 2$
20. Factoriza los siguientes polinomios:

(I) $2x^3 - 5x^2 + x + 2$	(VII) $x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$
(II) $x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54$	(VIII) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$
(III) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$	(IX) $x^2 - 2x - 5$
(IV) $x^4 + 12x^3 + 47x^2 + 70x + 50$	(X) $(x^2 + 3x - 4)^2$
(V) $x^4 + x^3 - 24x^2 - 4x + 80$	(XI) $x^4 - 4$
(VI) $x^3 - 2x^2 + x - 2$	(XII) $x^5 + 1$

- (XIII) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$
 (XIV) $4x^2 - 9$
 (XV) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
 (XVI) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$
 (XVII) $P(x) = 5x^3 - 5x$
 (XVIII) $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$
 (XIX) $P(x) = x^5 + 5x^3 - 6x^2$
 (XX) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 20$
 (XXI) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 27x + 9$
 (XXII) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10$
 (XXIII) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

21. En las siguientes expresiones, saca como factor común todo lo que puedas:

- a) $3x^2y + 2xy^2z$
 b) $5xy + 3x + xy - x^2y^2$
 c) $(x^2 + y^2 + 2xy) + (x + y) \cdot (x - y)$
 d) $(x + y)^2 \cdot (x - y) + (x - y)^2 \cdot (x + y)^2$
 e) $15(x + y) + 25(x + y)^2 + 20(x + y)^3$
 f) $6x^2y - 3y^3 + 2x^2$
 g) $2ax^2 - 4a^2x + 12ax$
 h) $49x^2 - 21ax + 42x^3$
 i) $-x + x^2 - x^3 + x^4$
 j) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) + (x - 1) \cdot (x + 1)^2$
 k) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 2) + (x^2 + 1) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$
 l) $\frac{1}{8}a^2x^3 - \frac{3}{16}a^3x^2 - \frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{5}{12}a^5x^2$

22. Descompón en factores, realizando una doble extracción de factor común.

- a) $ac - bc + ad - bd$
 b) $ay - 2by - 2bx + ax$
 c) $a^2 - ab - ax - bx$
 d) $6ab - 9b^2 + 2ax - 3bx$
 e) $14ax^2 - 7a^2 - 2x^2 + a$
 f) $y^6 - y^4 + 2y^3 - 2y$
 g) $by^2 - 2a + ay^2 - 2b$
 h) $3mn + mp + 3rn + rp$
 i) $3mx^2 - nx^2 + 3my^2 - ny^2$
 j) $32x^6 - 2x^4 - 32y^4x^2 + 2y^4$

23. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios en cada uno de los apartados siguientes:

- a) $P(x) = x^3 - 1$, $q(x) = x^2 - x$, $r(x) = x^2 - 1$
 b) $P(x) = 3x^4 - 3x^3$, $q(x) = 12x^3 + 12x^2$, $r(x) = 18x^3 - 18x$
 c) $P(x) = 15z - 5z^2$, $q(x) = z^2 - 6z + 9$, $r(x) = 9 - z^2$
 d) $P(x) = 5y - 10$, $q(x) = 15y^2 - 60$, $r(x) = 3y^2 - 12y + 12$
 e) $P(x) = (x - 1)^2 \cdot x$, $q(x) = (x - 1)^3 \cdot (x + 2)$, $r(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 5) \cdot x$
 f) $P(x) = ax - ay - bx + by$, $q(x) = x^2 - 2xy + y^2$, $r(x) = 3a^2 - 6ab + 3b^2$
 g) $P(x) = x^4 - y^4$, $q(x) = x^2 - y^2$, $r(x) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

24. Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$, sabiendo que $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $y - \frac{3}{2}$ son ceros del polinomio

25. Los valores $x = 3$, $x = 2$ y $x = -2$, son tres ceros del polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$. Halla el cuarto cero y descompón el polinomio en factores.