

- ① Hallar el valor que debe tener a si el polinomio $P(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 - ax + a - 1$ es divisible por $x + 2$.

Si el polinomio $P(x)$ es divisible por el binomio $x + 2$ entonces el resto de la división es CERO y por el teorema del resto, el valor numérico del polinomio para $x = -2$ es CERO.

$$R = 0 = P(x = -2) = 3(-2)^4 - (-2)^3 - 3(-2)^2 - a(-2) + a - 1, \text{ despejando } a$$

$$48 + 8 - 12 + 2a + a - 1 = 0 \implies 3a = -43 \implies \boxed{a = -\frac{43}{3}}$$

- ② Calcular el valor de m en el polinomio $P(x) = x^4 - mx^2 + 3mx - 1$ si al dividirlo por $x - 2$, el resto es igual al término independiente del polinomio.

El resto de la división es igual al **término independiente**, -1 .

Aplicando el teorema del resto, $R = P(x = 2) = -1$

$$P(x = 2) = 2^4 - m \cdot 2^2 + 3m \cdot 2 - 1 = -1 \implies 16 - 4m + 6m = 0 \implies 2m = -16 \implies \boxed{m = -8}$$

- ③ Hallar las raíces reales de los polinomios

$$(i) P(x) = x^7 + 35x^5 - 10x^6 - 50x^4 + 24x^3 \quad (ii) P(x) = 4x^4 + 8x^3 - 13x^2 - 20x + 12$$

y descomponerlos factorialmente.

- (i) El polinomio, $P(x) = x^7 + 35x^5 - 10x^6 - 50x^4 + 24x^3$, es homogéneo, extraemos factor común, x^3 , y ordenamos el polinomio:

$$P(x) = x^3(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24)$$

El factor x^3 nos indica que $x = 0$ es **raíz TRIPLE** del polinomio. Para calcular, si es posible, el resto de raíces reales aplicamos el teorema de Ruffini.

☞ Los valores enteros candidatos a raíces reales son los divisores del término independiente:

$$24 = 2^3 \cdot 3 \implies \begin{cases} \pm 1 & \pm 2 & \pm 4 & \pm 8 \\ \pm 3 & \pm 6 & \pm 12 & \pm 24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -10 & 35 & -50 & 24 \\ & & 1 & -9 & 26 & -24 \\ \hline & 1 & -9 & 26 & -24 & \boxed{0} \\ \hline 2 & & 2 & -14 & 24 & \\ & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} & \\ \hline 3 & & 3 & -12 & & \\ & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\ \hline 4 & & 4 & & & \\ & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

$$\text{Las raíces reales del polinomio son: } \begin{cases} x = 0 \text{ triple} \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

y la descomposición factorial del polinomio:

$$P(x) = x^3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

(ii) El polinomio, $P(x) = 4x^4 + 8x^3 - 13x^2 - 20x + 12$, es completo.

☞ Las raíces enteras, si tiene, están entre los divisores del término independiente:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \implies \begin{cases} \pm 1 & \pm 2 & \pm 4 \\ \pm 3 & \pm 6 & \pm 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 8 & -13 & -20 & 12 \\ -2 & & -8 & 0 & 26 & -12 \\ \hline & 4 & 0 & -13 & 6 & \boxed{0} \\ -2 & & -8 & 16 & -6 & \\ \hline & 4 & -8 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

El término independiente del polinomio es 3 y al probar ± 3 , el resto no es cero.

☞ Candidatos a raíces racionales no enteras: divisores del término independiente entre divisores del coeficiente principal.

$$\begin{cases} \text{término independiente: } 3 \\ \text{coeficiente principal: } 4 = 2^2 \end{cases} \implies \text{candidatos } \begin{cases} \pm \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{4} \\ \pm \frac{3}{2} & \pm \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -8 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 2 & -3 \\ \hline & 4 & -6 & \boxed{0} \\ \frac{3}{2} & & 6 & \\ \hline & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\text{Las raíces reales del polinomio son: } \begin{cases} x = -2 \text{ doble} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

y la descomposición factorial del polinomio:

$$P(x) = 4(x+2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

El último cociente es 4 y es factor de la descomposición.

- ① (a) Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = 6x^4 - 14x^2 + 5x^3 + x + 2$.

El polinomio es completo. Ordenando el polinomio: $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2$. Para el cálculo de las raíces aplicando la regla de Ruffini.

☞ Los valores enteros candidatos a raíces reales son los divisores del término independiente:

$$2 \Rightarrow \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \end{cases}$$

1	6	5	-14	1	2
		6	11	-3	-2
	6	11	-3	-2	0
-2		-12	2	2	
	6	-1	-1	0	

☞ Candidatos a raíces racionales no enteras: divisores del término independiente entre divisores del coeficiente principal.

$$\begin{cases} \text{término independiente: } 1 \\ \text{coeficiente principal: } 6 = 2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \text{candidatos } \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{3} \\ \pm \frac{1}{6} \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}$	6	-1	-1
		-3	1
	6	-2	0
$\frac{1}{3}$		2	
	6	0	

Las raíces reales del polinomio son: $\begin{cases} x = 1; & x = -2 \\ x = -\frac{1}{2}; & x = \frac{1}{3} \end{cases}$
y la descomposición factorial del polinomio:

$$P(x) = 6(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

El último cociente es 6 y es factor de la descomposición.

- (b) Resolver la ecuación

La ecuación es: $6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2 = 0$, sus soluciones son las **raíces** del polinomio del apartado anterior:

$$\text{Soluciones de la ecuación: } \begin{cases} x = 1; & x = -2 \\ x = -\frac{1}{2}; & x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- ② Opera y simplifica la siguiente expresión: $\frac{x^2 - 1}{1 - x} : \left[\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} \right]$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{1 - x} : \left[\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} \right] &\stackrel{(1)}{=} \frac{(x + 1)(\cancel{x - 1})}{\cancel{1 - x}} : \frac{(x + 1) \cdot \overset{(-1)}{\cancel{(1 - x)}} \cdot (1 + x)}{x \cdot \cancel{(1 - x)}} \stackrel{(2)}{=} \\ &= -(\cancel{x + 1}) \cdot \frac{x}{(\cancel{x + 1}) \cdot (x + 1)} = \boxed{\boxed{-\frac{x}{x + 1}}} \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Identidad notable: *Suma por diferencia, diferencia de cuadrados.*

Producto de fracciones algebraicas.

El cociente entre los binomios $(x - 1) : (1 - x)$ es igual a -1 por ser opuestos.

- (2) Dividir fracciones es multiplicar por el inverso del divisor.

- ③ Opera y simplifica: $\left[\frac{x - \frac{x}{x - 2}}{x + \frac{x}{x - 2}} - \frac{10 - 2x}{3 - 2x - x^2} \right] : \frac{1}{x + 3}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x - \frac{x}{x - 2}}{x + \frac{x}{x - 2}} - \frac{10 - 2x}{3 - 2x - x^2} \right] : \frac{1}{x + 3} &\stackrel{(1)}{=} \left[\frac{\frac{x(x - 2) - x}{\cancel{x - 2}}}{\frac{x(x - 2) + x}{\cancel{x - 2}}} - \frac{10 - 2x}{3 - 2x - x^2} \right] \cdot (x + 3) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \left[\frac{x(x - 3)}{x(x - 1)} - \frac{10 - 2x}{-(x - 1)(x + 3)} \right] \cdot (x + 3) \stackrel{(3)}{=} \frac{(x - 3)(x + 3) + 10 - 2x}{(x - 1)(\cancel{x + 3})} \cdot (\cancel{x + 3}) \stackrel{(4)}{=} \\ &= \frac{x^2 - 9 + 10 - x}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \boxed{\boxed{x - 1}} \end{aligned}$$

Razonamientos

- (1) Sumar fracciones algebraicas. El denominador común es $x - 2$.

Dividir fracciones es multiplicar por el inverso del divisor.

- (2) Extraer factor común y descomponer factorialmente el polinomio: $3 - 2x - x^2 = -(x - 1)(x + 3)$.

- (3) En la segunda fracción: $- \cdot - = +$

Sumar fracciones algebraicas. El denominador común es $(x - 1)(x + 3)$.

- (4) Identidades notables y simplificar.