

Consideremos  $\mathcal{P}$  como el plano intuitivo de puntos:  $A, B, C \dots$

## 1.1. El plano vectorial de los vectores

**Definición 1.1 Vectores fijos** *Dos puntos cualesquiera  $A$  e  $B$  del plano, ordenados, definen un vector fijo, que designaremos por  $\overrightarrow{AB}$ .*

- *El punto  $A$  recibe el nombre de origen del vector fijo.*
- *El punto  $B$  recibe el nombre de extremo del vector fijo.*

*Al conjunto de todos los vectores fijos que podamos construir en el plano se le denomina*

$$P_2 \times P_2 = \left\{ (A, B) \mid A, B \in P_2 \right\}$$

**Definición 1.2 (Dirección del vector fijo)** *La dirección del vector  $AB$  es la de la recta única que determinan dos puntos en el plano.*

**Definición 1.3 (Sentido del vector fijo)** *El sentido es el determinado del origen,  $A$ , al extremo,  $B$ , del vector fijo*

**Definición 1.4 (Módulo del vector)** *Se llama módulo del vector la longitud del segmento  $AB$ .*

**Definición 1.5 (Vectores nulos)** *Los vectores fijos  $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$  que tienen el mismo origen y extremo reciben el nombre de vectores nulos.*

**Definición 1.6** *Dos vectores fijos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  tienen el mismo módulo si  $d(A, B) = d(C, D)$ . Escribiremos:  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$*

**Definición 1.7** *Dos vectores fijos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  tienen la misma dirección si están en la misma recta o en rectas paralelas. Escribiremos:  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$*

**Definición 1.8** *Dos vectores fijos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  que tienen la misma dirección tienen el mismo sentido  $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$  si*

1. *Si están situados en rectas paralelas: la recta que une los orígenes, deja sus extremos en un mismo semiplano.*

2. Si están situados en una misma recta, existe otro vector fijo situado en una recta paralela tal que respecto de los dos vectores, aplicando el apartado anterior, mantiene el mismo sentido.

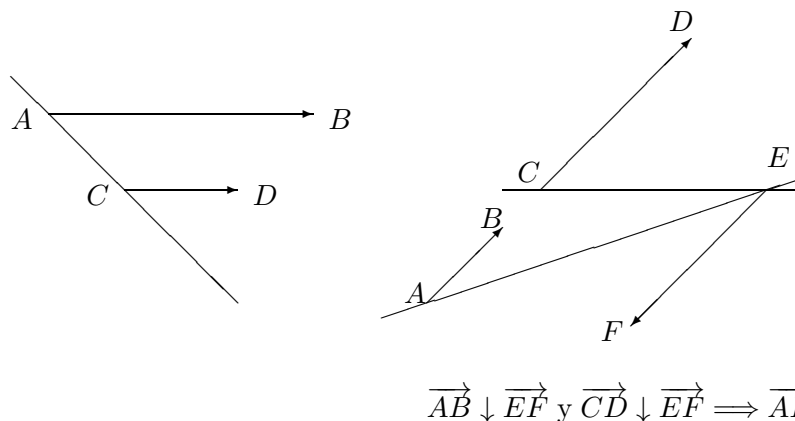


Figura 1.1: Vectores del mismo sentido

**Definición 1.9 Vectores equipolentes** Dos vectores fijos del plano equipolentes ( y se denota por :  $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$  ), si verifican una de las tres condiciones siguientes:

1. Si no son nulos y están situados en rectas diferentes, son equipolentes si al unir sus orígenes (A y X) y sus extremos (B e Y) se forma un paralelogramo.
2. Si están sobre la misma recta existe otro vector  $\overrightarrow{MN}$  que cumple con ambos la misma condición.
3. Si ambos vectores son nulos.

**Teorema 1.1** Dos vectores:  $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$  si y sólo si tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

La relación de equipolencia es de equivalencia ya que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Podemos formar por tanto el conjunto cociente que nos clasifica el conjunto  $\mathcal{P}$ . Cada una de las clases de equivalencia es un **vector libre** y su conjunto se designa por  $\mathcal{V}_2$ :  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{E} / \sim$ .

$$\vec{v} \in \mathcal{V}_2 \Rightarrow \vec{v} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

El vector libre nulo es:  $\vec{0} = \{\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots\}$

**Propiedad 1.1** Elegido un punto O del plano que llamaremos origen y un vector libre cualesquiera  $[\overrightarrow{AB}]$  del plano, éste tiene un único representante con origen en O. (Fig.??)

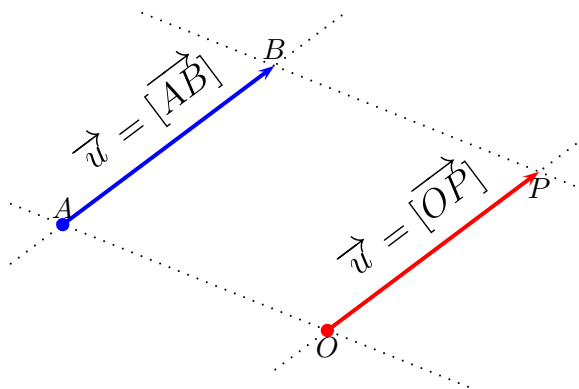


Figura 1.2: Vector libre con origen O

## 1.1.1. Operaciones con vectores libres

En el conjunto  $V_2$  se establecen dos operaciones:

**Definición 1.10 Ley interna, adición de vectores:**

Sean  $\vec{v}_1 = [\overrightarrow{AB}]$  y  $\vec{v}_2 = [\overrightarrow{CD}]$  dos vectores libres de  $V_3$ . Se define la suma de vectores como otro vector libre  $\vec{v}_3$ , que viene determinado por una de las formas siguientes:

1. Método del paralelogramo
2. Método del polígono

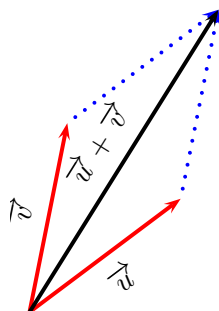


Figura 1.3: Suma de vectores libres. Método paralelogramo

**Propiedad 1.2** La suma de vectores es **uniforme**, es decir no depende de los vectores que se tomen como representantes.

**Propiedad 1.3** El conjunto  $V_3$  con la operación así definida cumple las siguientes propiedades ( Dados  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$ ):

1. Asociativa  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
2. Conmutativa:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. Elemento neutro: El vector cero  $\vec{0}$ .
4. Elemento simétrico:  $[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = \vec{0}$

Todo ello quiere decir que  $(V_2, +)$  es un grupo abeliano.

**Definición 1.11 Ley externa**

Sean  $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  un escalar. Definimos la siguiente operación externa:

$$\bullet : \mathbb{R} \times V_2 \longrightarrow V_2$$

tal que a cada par  $(\lambda, \vec{v}) \rightsquigarrow \lambda \bullet \vec{v}$  verificando:

1. El vector  $\lambda \bullet \vec{v}$  tiene la misma dirección que  $\vec{v}$
2. El sentido del vector será el mismo que  $\vec{v}$  si  $\lambda > 0$  y el contrario a  $\vec{v}$  si  $\lambda < 0$ .
3. El módulo será el producto de  $|\lambda|$  por el módulo de  $\vec{v}$

**Propiedad 1.4** El conjunto  $V_2$  con la operación externa así definida, cumple las siguientes propiedades:

1. Distributiva de los escalares respecto a la suma de vectores:  $\lambda \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \bullet \vec{u} + \lambda \bullet \vec{v}$

2. Distributiva de los vectores respecto la suma de escalares:  $(\lambda + \mu) \bullet \vec{u} = \lambda \bullet \vec{u} + \mu \bullet \vec{u}$
3. Asociativa de los escalares:  $(\lambda \cdot \mu) \bullet \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \bullet \vec{u})$
4. Elemento unidad:  $1 \bullet \vec{v} = \vec{v}$

Todo ello quiere decir que  $(V_2, +, \bullet)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.12 (Familia de vectores)** Un conjunto de vectores del espacio vectorial  $V_2$  recibe el nombre de familia de vectores:  $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$

**Definición 1.13 (Combinación lineal de vectores)** Un vector  $\vec{u} \in V_2$  es combinación lineal de los vectores de una familia  $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$ , si existen  $n$  escalares,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{u}_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \vec{u}_k$$

**Definición 1.14 (Sistema generador)** Una familia  $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$  es un sistema generador del plano  $V_2$  si **todo vector** es combinación lineal de los vectores de la familia:

$$\forall \vec{v} \in V_2, \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{u}_i$$

**Definición 1.15 (Vectores linealmente independientes o familia libre de vectores)** Una familia de vectores  $\mathcal{F}$  es libre o los vectores son **linealmente independientes** si **NINGÚN VECTOR** de la familia se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

La definición es equivalente a:

**Definición 1.16 (Vectores linealmente independientes o familia libre de vectores)** Una familia de vectores  $\mathcal{F}$  es libre o los vectores son **linealmente independientes** si **PARA TODA COMBINACIÓN** lineal de los vectores de  $\mathcal{F}$  igualada al vector nulo, **TODOS LOS ESCALARES** deben ser cero.

Para toda combinación lineal:  $\alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$  entonces  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$

Las familias de vectores que no son linealmente independientes son linealmente dependientes.

**Definición 1.17 (Base de un espacio vectorial)** Una familia  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$  es una base del espacio  $V_2$  si verifica **simultáneamente** las siguientes condiciones:

- La familia es sistema generador.
- La familia es libre (los vectores son linealmente independientes)

**Definición 1.18 (Dimensión de un espacio vectorial)** Dado un espacio vectorial se llama dimensión del espacio al número de vectores de la base.

**Proposición 1.1 (Base y dimensión del espacio vectorial)** Dos vectores, no nulos, de distinta dirección,  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  de  $V_2$  siempre forman una base de los vectores libres del plano.

**Demostración:**

Para que sea base debe verificar las dos condiciones: sistema generador y libre:

**Linealmente independientes**

**Por reducción al absurdo:** supongamos que los vectores son linealmente dependientes, por definición uno será combinación lineal del otro:  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ , por lo tanto los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  están en la misma dirección. Contradice la hipótesis de no estar en la misma dirección, es decir, son linealmente independientes

**Sistema generador**

Basta hacer la construcción geométrica: se deja como ejercicio.

## Consecuencias

1. Todas las base de  $V_2$  están formadas por dos vectores de distinta dirección.
2. La dimensión del e.v.  $\mathcal{V}_2$ , por lo tanto, es 2.

**Definición 1.19 (Coordenadas de un vector)** Dada una base  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  y un vector  $\vec{v}$  cualquiera de  $V_2$ , como forman un sistema generador  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2$ . A la dupla  $(\alpha, \beta)$  se les denomina **coordenadas del vector  $\vec{v}$**  respecto de la base  $\mathcal{B}$ .

Por ser base los vectores son linealmente independientes y conlleva que las coordenadas  $(\alpha, \beta)$  SON ÚNICAS respecto de cada base.

Efectivamente: si las coordenadas no fuesen únicas entonces:

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta_1 \cdot \vec{u}_2 = \alpha_2 \cdot \vec{u}_1 + \beta_2 \cdot \vec{u}_2 \implies \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta_1 \cdot \vec{u}_2 - \alpha_2 \cdot \vec{u}_1 - \beta_2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{0}$$

$$\boxed{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \vec{u}_1 + (\beta_1 - \beta_2) \cdot \vec{u}_2 = \vec{0}}$$

Por la definición de vectores linealmente independientes, al estar igualado al vector nulo, TODOS los escalares son cero:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 & \implies \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 - \beta_2 = 0 & \implies \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Es decir las coordenadas de un vector respecto de una base dada SON ÚNICAS

En general se tomará como base de  $V_2$  a la base canónica  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  y  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .

## Ejemplo

Si nos dan el vector  $\vec{u} = (3, 4)$  significa:  $\boxed{\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2}$ . Gráficamente:

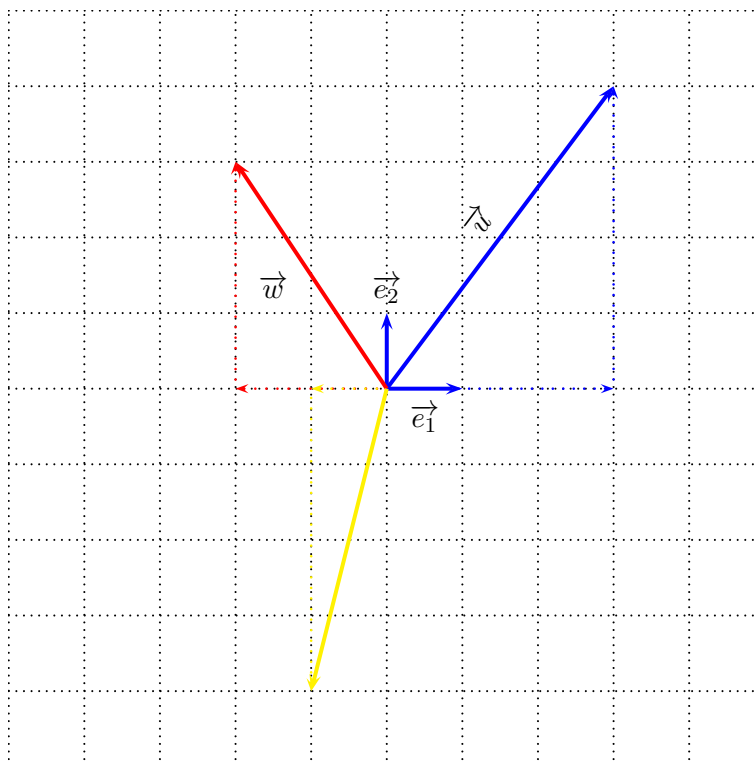


Figura 1.4:  $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$  y  $\vec{w} = (-2)\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

## 1.2. Plano afín

**Definición 1.20** Sea  $P_2$  el conjunto que llamamos plano intuitivo y  $\mathcal{V}_2(\mathbb{R})$  el e.v. real de dimensión 2 de los vectores libres y  $f$  una aplicación de  $P_2 \times P_2$  sobre  $\mathcal{V}_2(\mathbb{R})$  que verifica los axiomas siguientes:

1.  $\forall A, B, C \in P_2 \ f(A, C) = f(A, B) + f(B, C) \approx \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
2.  $\forall A \in P_2 \ y \ \forall \vec{v} \in \mathcal{V}_2(\mathbb{R}) \ \exists \text{ un } \text{único } B \in P_2 \text{ tal que } f(A, B) = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{v}$

Se denomina **plano afín** asociado a  $\mathcal{V}_2(\mathbb{R})$  y se designa por  $E^2(\mathbb{R})$  a la terna  $(P_2, \mathcal{V}_2(\mathbb{R}), f)$ .

**Definición 1.21 (Dimensión)** Sea  $E^2(\mathbb{R})$  el plano afín asociado a  $\mathcal{V}_2(\mathbb{R})$ , se llama **dimensión** del plano afín a la dimensión del espacio vectorial.

$$\dim E^2(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{V}_2(\mathbb{R}) = 2$$

**Definición 1.22 (Vector de posición)** Supongamos elegido un punto  $O$  del plano afín que llamaremos origen.

Consideremos la aplicación  $h_0 : P_2 \rightarrow \mathcal{V}_2(\mathbb{R})$  tal que a cada punto del plano afín  $A \in P_2$  le hacemos corresponder el vector  $\overrightarrow{OA}$ . A este vector se le denomina **vector de posición** del punto  $A$ .

**Definición 1.23 (Sistema de referencia afín)** Se denomina sistema de referencia afín del plano  $E^2$  al par  $(O, \mathcal{B})$  donde  $O$  es un punto fijo y  $\mathcal{B}$  es una base del espacio vectorial asociado. Al punto  $O$  se le denomina **origen de coordenadas**.

**Definición 1.24 (Coordenadas afines de un punto)** Se llaman coordenadas afines de un punto  $A$  de  $E^2$  respecto a la referencia afín, a las coordenadas del vector  $\overrightarrow{OA}$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{V}_2(\mathbb{R})$ .

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2}$$

Considerando la base canónica:  $(0, \mathcal{B}_c)$  donde  $O = (0, 0)$ ,  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$

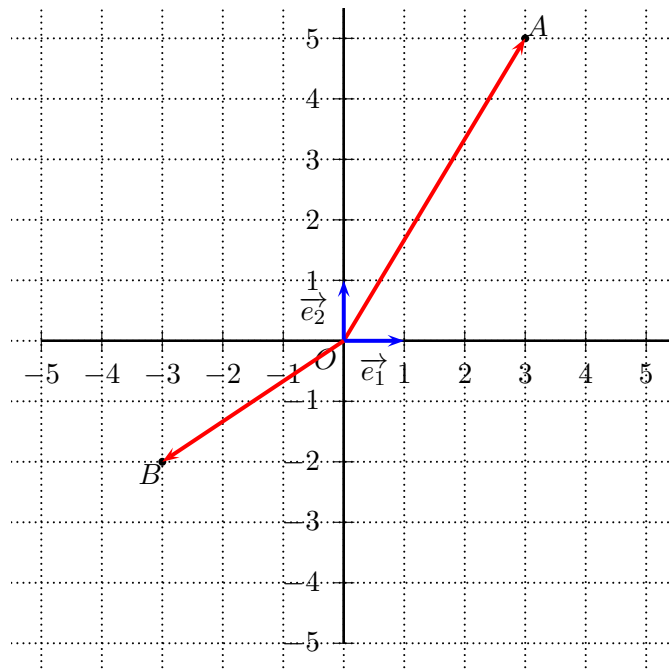


Figura 1.5: Las coordenadas de los puntos:  $A(3, 5)$  y  $B(-3, -2)$

**Propiedad 1.5 (Coordenadas de un vector)** Dado el vector  $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$  se llaman coordenadas del vector  $\vec{u}$  respecto de una referencia, a las coordenadas del extremo del vector, el punto  $B$ , **MENOS** las coordenadas del extremo, el punto  $A$ .

Efectivamente:

Sean  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$  los extremos del vector fijo  $\overrightarrow{AB}$  Entonces:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{en componentes}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2) - (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 = \boxed{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

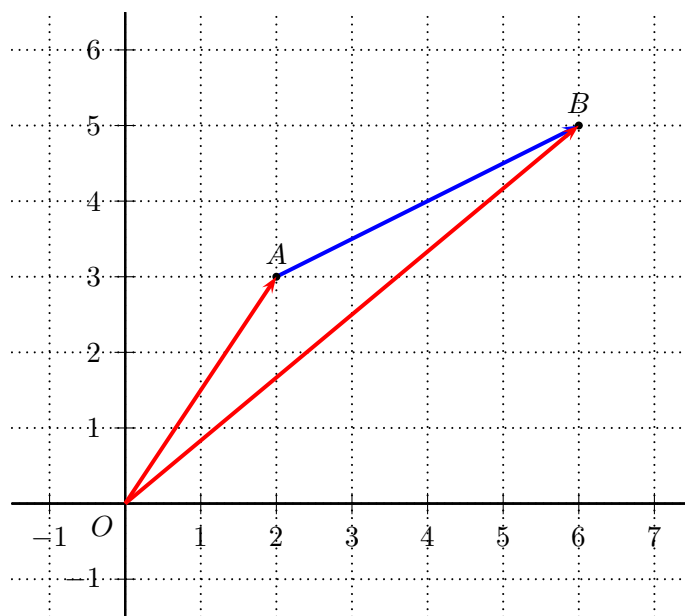


Figura 1.6: Coordenadas un vector

**Propiedad 1.6 (Vectores equipolentes)** Dos vectores  $\vec{u}, \vec{v}$  son equipolentes si y sólo si sus coordenadas son iguales.

### Ejercicios

1. Hallar las coordenadas del vector de extremos  $A(-3, 2)$  y  $B(5, 3)$ .
2. Si el vector  $\vec{u} = (-2, 4)$  y su origen es el punto  $A(3, -2)$ , hallar las coordenadas del extremo del vector.
3. Los puntos  $A(2, 1)$ ,  $B(3, 5)$  y  $C(7, -1)$  son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar las coordenadas del cuarto vértice,  $D$ .

**Propiedad 1.7 (Coordenadas del punto medio de un segmento)** Las coordenadas del punto medio,  $M$ , de un segmento de extremos  $A$  y  $B$  son igual a la media aritmética de las coordenadas de los extremos de dicho segmento (Fig.??):

Como

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \text{ y } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Si las coordenadas de los extremos son  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ , y las del punto medio,  $M = (x_m, y_m)$ , entonces:

$$(x_m, y_m) = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}, y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

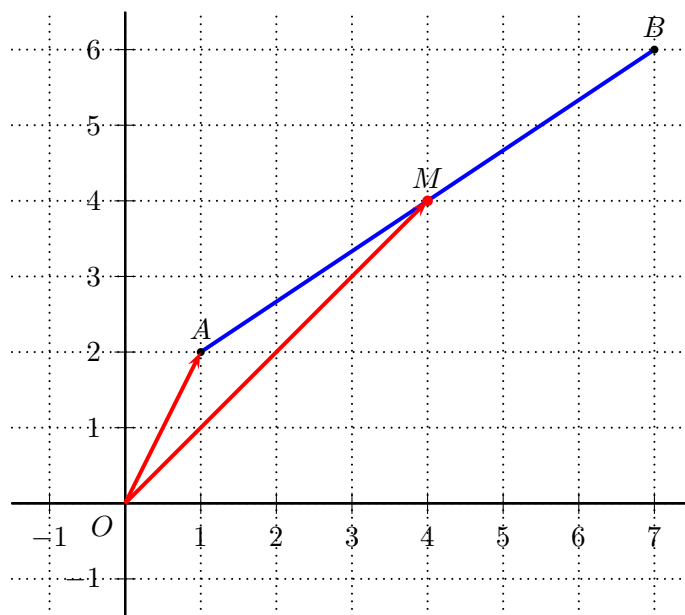


Figura 1.7: Coordenadas del punto medio

### Ejercicios

1. Hallar las coordenadas de los puntos medios del paralelogramo  $ABCD$ .
2. Dividir el segmento  $\overline{AB}$  en tres partes iguales si  $A(1, 1)$  y  $B(7, 10)$

## 1.2.0.1. Puntos alineados

**Definición 1.25 (Puntos alineados vectorialmente)** Tres puntos del plano  $A, B$  y  $C$  están alineados si los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  son linealmente dependientes.

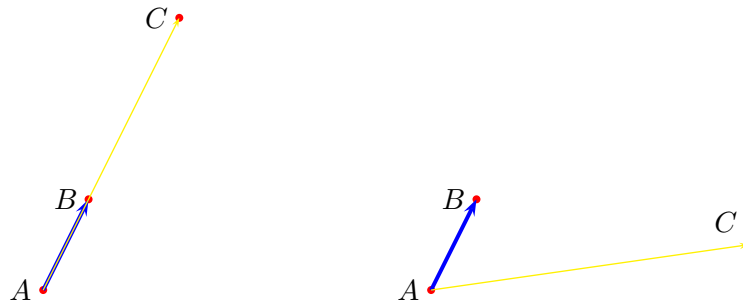


Figura 1.8: Puntos alineados y no alineados

## Ejercicios

1. Razonar si los puntos  $A(-1, 3)$ ,  $B(3, 5)$  y  $C(2, -8)$  forman un triángulo.
2. Hallar el valor de  $k$  si  $A(1, -2)$ ,  $B(k, 4)$  y  $C(4, -1)$  están alineados.

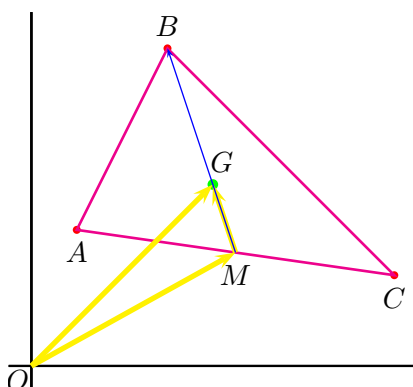
## 1.2.0.2. Baricentro de un triángulo

**Definición 1.26 (Medianas de un triángulo)** La mediana de un triángulo es el segmento que une uno de sus vértices con el punto medio del lado opuesto

**Definición 1.27 (Baricentro)** Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto. Dicho punto recibe el nombre de **BARICENTRO** del triángulo.

**Propiedad 1.8 (Propiedad fundamental del baricentro)** El baricentro de un triángulo dista dos tercios de cada uno de los vértices y un tercio de los puntos medios de los lados del triángulo.

**Propiedad 1.9 (Coordenadas del baricentro de un triángulo)** Dado un triángulo de vértices,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  y  $C(x_3, y_3)$  entonces las coordenadas del baricentro son la media aritmética de las coordenadas de los vértices:  $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$



Las coordenadas de los vértices:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  y  $C(x_3, y_3)$ . Las componentes del vector posición  $\overrightarrow{OG}$  son las coordenadas del baricentro. Sea  $M$  el punto medio del lado  $\overline{AC}$  y sus coordenadas:  $M\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$ . Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MG} \implies \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = \\ &= \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}, y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{x_1 + x_3}{2} + \frac{x_2}{3} - \frac{x_1 + x_3}{6}, \frac{y_1 + y_3}{2} + \frac{y_2}{3} - \frac{y_1 + y_3}{6}\right) = \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)\end{aligned}$$

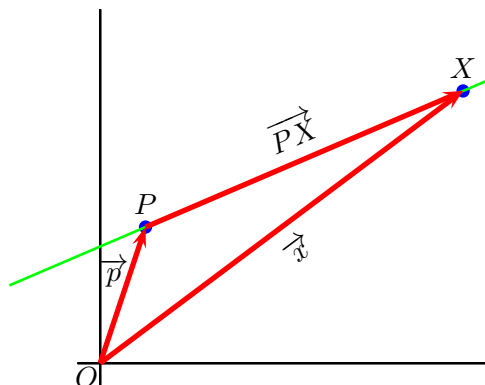
### 1.3. La recta en el plano afín

La recta está formada por puntos del plano en una dirección dada.

**La ecuación de la recta es la condición necesaria y suficiente que deben cumplir las coordenadas de un punto del plano para pertenecer a la recta.**

**Definición 1.28 (Determinación de una recta)** Una recta en el plano viene determinada por un punto y un vector libre, no nulo,  $r \equiv (P; \vec{u})$

**Propiedad 1.10 (Ecuación vectorial de la recta)** Condición necesaria y suficiente para que un punto del plano pertenezca a la recta  $r \equiv (P; \vec{u})$ .



Sea  $X$  un punto genérico de la recta  $r \equiv (P; \vec{u})$ . Vectorialmente:  $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$ . El vector  $\vec{PX}$  es linealmente dependiente con el vector director  $\vec{u}$ ,  $\vec{PX} \parallel \vec{u}$ , si y sólo si, existe un escalar  $\lambda$  tal que  $\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{u}$ .

La ecuación vectorial de la recta es:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u}, \forall \lambda \in \mathbb{R}} \quad (1.1)$$

#### Ejemplo

La ecuación vectorial de la recta determinada por el punto  $P(1,3)$  y el vector  $\vec{u} = (7,3)$  es:

$$\boxed{\vec{x} = (1,3) + \lambda \cdot (7,3), \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

**Propiedad 1.11 (Ecuaciones paramétricas de la recta)** Considerando las componentes del vector director y las coordenadas de los puntos, la ecuación (??) se escribe:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2) \implies (x, y) = (x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2) \implies \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}} \quad (1.2)$$

#### Ejemplo

Las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  del ejemplo anterior son:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  ¿El

punto  $Q(4,5)$  pertenece a la recta? Si al sustituir en las ecuaciones paramétricas las coordenadas del punto  $Q$ , el valor del parámetro  $\lambda$  es igual, entonces el punto  $Q \in r$ .

$$\begin{aligned} x = 1 + 7\lambda &\implies 4 = 1 + 7\lambda \implies \lambda = \frac{3}{7} \\ y = 3 + 3\lambda &\implies 5 = 3 + 3\lambda \implies \lambda = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Es decir  $Q \notin r$

**Propiedad 1.12 (Ecuación continua de la recta)** La ecuación continua de la recta se obtiene despejando en las ecuaciones paramétricas (??) el parámetro,  $\lambda$ , e igualando:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - x_0}{u_1} \\ \lambda = \frac{y - y_0}{u_2} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}} \quad (1.3)$$

### Observaciones

- ☞ Los dos denominadores simultáneamente no pueden ser cero. El vector director de una recta siempre es no nulo.
- ☞ Un denominador si que puede ser cero. NO ESTÁ DIVIDIENDO POR CERO. Es una proporción.

### Ejemplos

(I) Calcular la ecuación continua de la recta determinada por el punto  $P(-5, 2)$  y el vector  $\vec{u} = (3, -2)$

Directamente aplicando (??):  $\frac{x - (-5)}{3} = \frac{y - 2}{-2} \implies \frac{x + 5}{3} = \frac{y - 2}{-2}$

(II) Ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de los ejes de coordenadas

- El eje de abscisas viene determinado por el origen de coordenadas,  $O(0, 0)$ , y el primer vector de la base canónica,  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ :

$$(x, y) = (0, 0) + \lambda(1, 0) \quad \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 \end{cases} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{0}$$

- El eje de ordenadas viene determinado por el origen de coordenadas,  $O(0, 0)$ , y el segundo vector de la base canónica,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ :

$$(x, y) = (0, 0) + \lambda(0, 1) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + \lambda \end{cases} \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{1}$$

**Propiedad 1.13 (Ecuación general o implícita de la recta)** Multiplicando en la ecuación continua (??):

$$(x - x_0) \cdot u_2 = (y - y_0) \cdot u_1 \implies u_2x - u_2x_0 = yu_1 - u_1y_0 \implies u_2x - u_1y + u_1y_0 - u_2x_0 = 0$$

Llamando:  $\begin{cases} A = u_2 \\ B = -u_1 \\ C = u_1y_0 - u_2x_0 \end{cases}$  . La ecuación general es:

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (1.4)$$

**La ecuación general es la condición que verifican las coordenadas,  $(x, y)$ , de los puntos del plano que pertenecen a la recta**

Si en la ecuación implícita,  $C = 0$ , la recta pasa por el origen de coordenadas  $O(0, 0)$ .

## Ejemplos

(I) Hallar la ecuación general de la recta,  $r$ , determinada por el punto  $P(3, -4)$  y el vector  $\vec{u} = (-1, 2)$

La ecuación continua de la recta, (??):  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{2}$ . Multiplicando:

$$2(x-3) = -(y+4) \implies 2x-6 = -y-4 \implies \boxed{r \equiv 2x + y - 2 = 0}$$

(II) Razonar si los puntos:  $Q(4, 2)$  y  $R(5, -8)$  pertenecen a la recta  $r$ .

$Q(4, 2)$  sustituyendo:  $2 \cdot 4 + 2 - 2 = 4 \neq 0 \implies$  El punto  $Q$  NO PERTENECE a la recta

$R(5, -8)$  sustituyendo:  $2 \cdot 5 - 8 - 2 = 0 \implies$  El punto  $R$  SÍ PERTENECE a la recta

(III) Hallar las ecuaciones generales (implícitas), de los ejes de coordenadas.

■ Eje de abscisas:  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} \implies \boxed{y = 0}$ .

Los puntos situados en el eje de abscisas sus ordenadas son cero.

■ Eje de ordenadas:  $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} \implies \boxed{x = 0}$ .

Los puntos situados en el eje de ordenadas sus abscisas son cero.

(IV) Hallar la ecuación vectorial de la recta  $r \equiv 3x - 5y + 12 = 0$ .

El procedimiento es a la inversa:

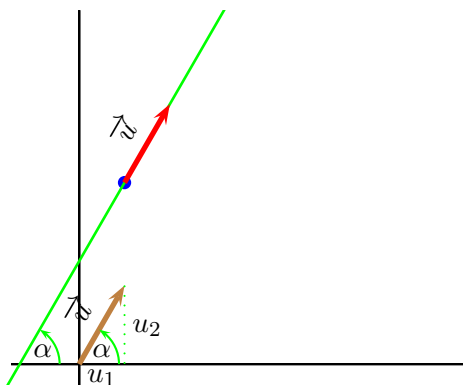
$$3x - 5y + 12 = 0 \implies 3x = -12 + 5y \implies x = -4 + \frac{5}{3}y, \text{ llamando } \lambda \text{ a } y, \begin{cases} x = -4 + \frac{5}{3}\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

De las ecuaciones paramétricas se deduce:  $(x, y) = (-4, 0) + \lambda \left( \frac{5}{3}, 1 \right)$ , por lo tanto:

■ Un punto de la recta:  $P(-4, 0)$

■ Un vector director:  $\vec{u} = \left( \frac{5}{3}, 1 \right) \parallel (5, 3)$

**Definición 1.29 (Pendiente de una recta)** La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo,  $\alpha$ , que forma la recta con el semieje positivo de abscisas. Se denota con la letra  $m$



La recta viene determinada por un punto  $P$  y un vector director  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ . Si  $u_1 \neq 0$ , por trigonometría:

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{u_2}{u_1} = m$$

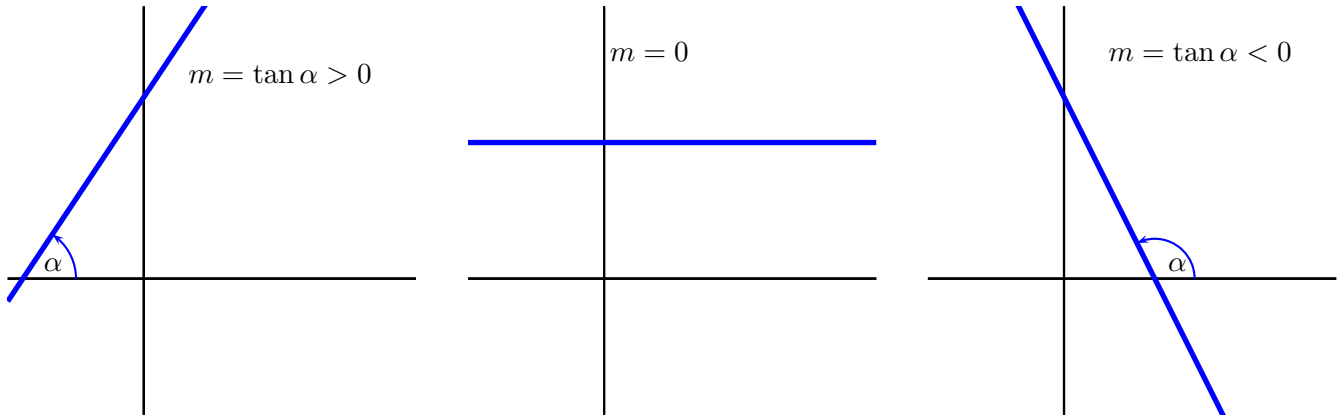
La pendiente de la recta  $r$  es:

$$\boxed{m = \tan \alpha = \frac{u_2}{u_1}, \quad \forall u_1 \neq 0} \quad (1.5)$$

## Observaciones

- El ángulo está comprendido entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , por lo tanto:

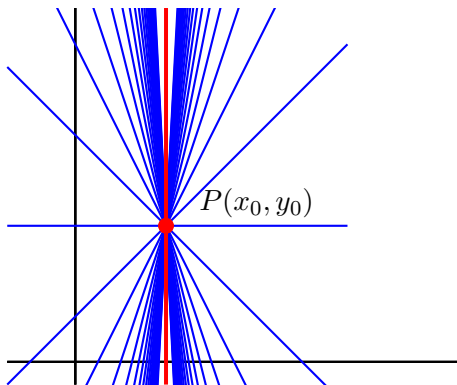
$$\begin{cases} \text{Si } \alpha = 0^\circ \Rightarrow m = \tan 0^\circ = 0 \\ \text{Si } 0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \boxed{m > 0} \\ \text{Si } \alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{la recta no tiene pendiente, rectas perpendiculares al eje de abscisas} \\ \text{Si } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \boxed{m < 0} \end{cases}$$



**Propiedad 1.14 (Ecuación explícita de la recta)** Despejando en la ecuación general (??) si  $B \neq 0$ :  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ . Si  $x = 0$  entonces  $y = -\frac{C}{B} = \boxed{n}$ , el punto  $(0, n)$  es el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas, por ello, a  $n$  se le llama **ordenada en el origen** de la recta.

Además en la ecuación general:  $\begin{cases} A = u_2 \\ B = -u_1 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B} = \boxed{m}$

$$\boxed{y = mx + n} \quad (1.6)$$

**Propiedad 1.15 (Ecuación punto-pendiente)**

La ecuación implícita de la recta es:  $y = mx + n$ . La recta pasa por el punto  $P(x_0, y_0)$ , las coordenadas del punto verifican la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ y_0 = mx_0 + n \end{array} \right\} \text{restando} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

La ecuación punto-pendiente de la recta:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)} \quad (1.7)$$

**Definición 1.30 (Haz de rectas)** Se llama haz de rectas de vértice  $P$  al conjunto de **TODAS** las rectas del plano que pasan por el punto. La ecuación del haz de rectas es:

**Forma punto-pendiente**  $\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x = x_0 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{R}$

**Forma implícita, cartesiana o general**  $\begin{cases} \text{Ecuación general (??)} & Ax + By + C = 0 \\ \text{Las rectas pasan por el punto } P(x_0, y_0) & Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases}$

Restando las dos ecuaciones:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \forall A, B \in \mathbb{R}} \quad (1.8)$$

## Ecuación de la recta determinada por dos puntos

La ecuación de puede calcular de, al menos, dos formas:

### Forma vectorial

Si los puntos son  $P(x_0, y_0)$  y  $Q(x_1, y_1)$ , el vector director de la recta es  $\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  y el punto  $P$  o  $Q$ . Forma continua (??):  $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

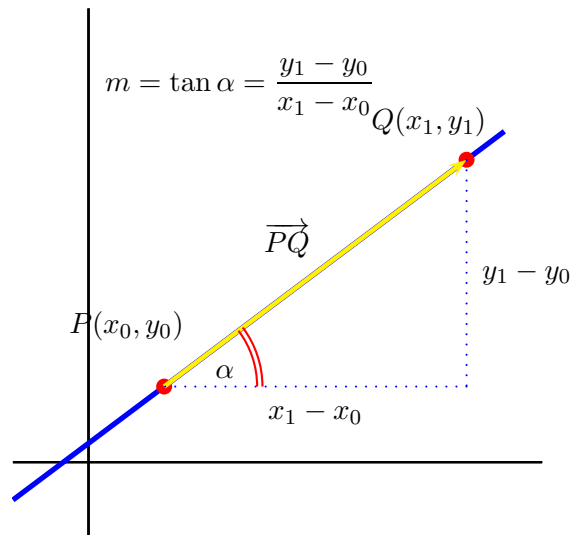


Figura 1.9: Recta determinada por dos puntos

### Forma explícita. Punto pendiente

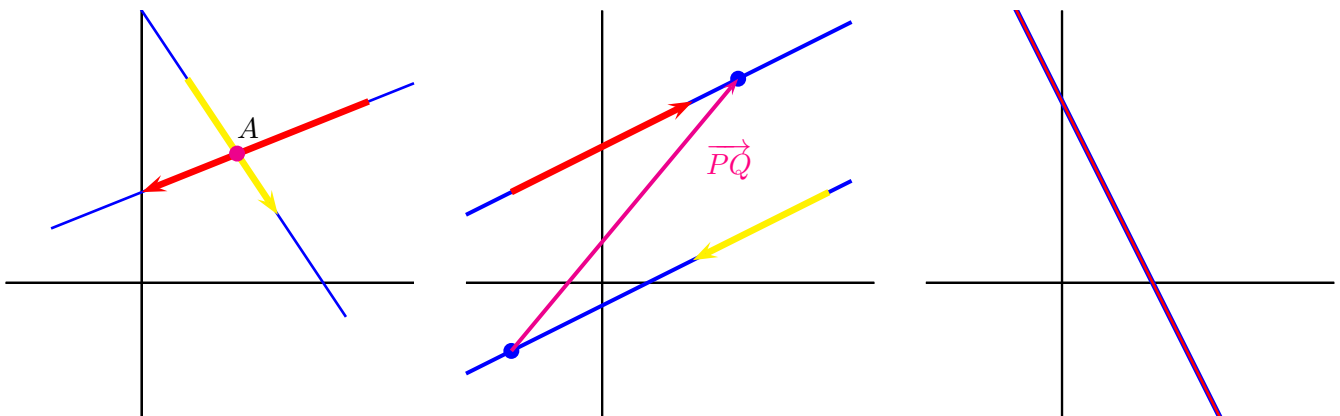
La pendiente es el cociente entre el incremento de ordenadas y el incremento de abscisas:  $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ .

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

#### 1.3.1. Posición relativa de dos rectas en el plano

Por geometría clásica, la posición relativa de dos rectas en el plano es:

- Secantes: un punto en común,  $r \cap s = A$ .
- Paralelas estrictas: ningún punto en común,  $r \cap s = \emptyset$ .
- Paralelas coincidentes: infinitos puntos en común,  $r \equiv s$



**Forma vectorial**

Dadas dos rectas,  $r \equiv (P; \vec{u})$  y  $s \equiv (Q; \vec{v})$ :

- Si los vectores directores,  $\vec{u}, \vec{v}$ , son linealmente independientes,  $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ , entonces las rectas son secantes.
- Si los vectores directores,  $\vec{u}, \vec{v}$ , son linealmente dependientes,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , entonces:

**Paralelas estrictas** Si los vectores,  $\vec{u}, \overrightarrow{PQ}$ , son linealmente independientes,  $\vec{u} \nparallel \overrightarrow{PQ}$ .

**Paralelas coincidentes** Si los vectores,  $\vec{u}, \overrightarrow{PQ}$ , son linealmente dependientes,  $\vec{u} \parallel \overrightarrow{PQ}$ .

**Forma explícita**

Dadas las rectas:  $\begin{cases} r \equiv y = m_1x + n_1 \\ s \equiv y = m_2x + n_2 \end{cases}$  :

- Si  $m_1 \neq m_2$  entonces rectas secantes.
- Si  $m_1 = m_2$  entonces paralelas:  $\begin{cases} \text{Si } n_1 \neq n_2 \text{ entonces paralelas estrictas.} \\ \text{Si } n_1 = n_2 \text{ entonces paralelas coincidentes.} \end{cases}$

**Forma implícita o cartesiana**

Las ecuaciones de las rectas en forma general:  $\begin{cases} r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ , la posición relativa de las dos rectas es la solución del sistema formado por las dos ecuaciones:

- Si el sistema tiene única solución, entonces las rectas se cortan en el punto de coordenadas la solución del sistema. Las rectas son secantes.
- Si el sistema no tiene solución, entonces las rectas no se cortan. Las rectas son paralelas.
- Si el sistema tiene infinitas soluciones, entonces las rectas se cortan en infinitos puntos. Las rectas son paralelas coincidentes.

$$\begin{array}{ll} r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 & \cdot (-A_2) \cdot r \quad -A_1A_2x - B_1A_2y - C_1A_2 = 0 \\ s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \cdot (A_1) \cdot s \quad A_1A_2x + B_2A_1y + C_2A_1 = 0 \\ & \text{sumando} \quad (A_1B_2 - A_2B_1)y - C_1A_2 + C_2A_1 = 0 \end{array}$$

- Si  $\boxed{A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0}$  entonces el sistema tiene única solución las rectas son secantes y las coordenadas del punto de corte son:

$$\begin{cases} y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \\ x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \end{cases}$$

- Si  $\boxed{A_1B_2 - A_2B_1 = 0}$  y  $\boxed{A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0}$  entonces el sistema no tiene solución. Las rectas son paralelas.

La condición de rectas paralelas estrictas es:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \implies A_1B_2 = A_2B_1 \implies \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}} \quad (1.9)$$

- Si  $\boxed{A_1B_2 - A_2B_1 = 0}$  y  $\boxed{A_2C_1 - A_1C_2 = 0}$  entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Las rectas son paralelas coincidentes. La condición de rectas paralelas estrictas es:

$$\begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \implies A_1B_2 = A_2B_1 \\ A_2C_1 - A_1C_2 = 0 \implies A_2C_1 = A_1C_2 \end{cases} \implies \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \quad (1.10)$$

**Definición 2.1 (Producto escalar de dos vectores)** Se llama producto escalar a toda aplicación:

$$\begin{aligned} f : V_2 \times V_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v} \end{aligned}$$

verificando los siguientes axiomas de definición:

**Ax.1**  $\vec{u} \bullet \vec{u} > 0$  si  $\vec{u} \neq 0$

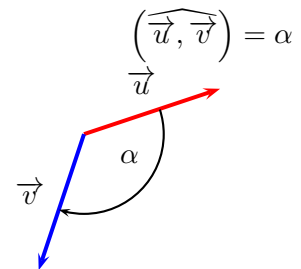
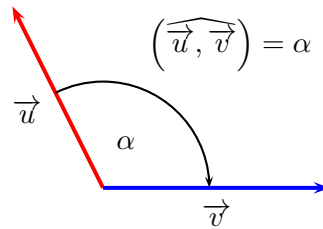
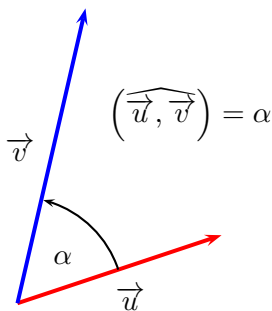
**Ax.2**  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ . (Propiedad conmutativa)

**Ax.3**  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ . (Distributiva respecto de la suma de vectores.

**Ax.4**  $\lambda(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\lambda\vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

**Definición 2.2 (Ángulo entre dos vectores)** Dados dos vectores,  $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ , no nulos, se llama ángulo determinado por los dos vectores, **al menor** de los ángulos que forman sus direcciones con origen común.

$$0 \leq (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \leq 180^\circ$$



**Definición 2.3 (Módulo (norma) de un vector)** Sea  $\vec{u} \in V_2$  se llama norma del vector  $\vec{u}$  y se denota  $\|\vec{u}\|$  a la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector  $\vec{u}$  por sí mismo:

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$$

### Propiedades de la norma

1.  $\|\vec{u}\| \geq 0$
2.  $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz:  $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
4. Desigualdad triangular:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
5.  $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$

**Definición 2.4 (Definición clásica de producto escalar)** Dados dos vectores  $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$  se llama producto escalar de los dos vectores y se denota por  $\vec{u} \bullet \vec{v}$ :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ó } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.0.2. Propiedades del producto escalar

- (a) El producto escalar de dos vectores que tienen la misma dirección y sentido es igual al producto de sus módulos. Efectivamente, por las definiciones (??) y (??):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{u} \uparrow \vec{v} \end{array} \right\} \implies (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0^\circ \implies \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0^\circ \stackrel{(\cos 0=1)}{=} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

- (b) El producto escalar de dos vectores que tienen la misma dirección y sentido contrario es igual al opuesto del producto de sus módulos. Efectivamente, por las definiciones (??) y (??):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{u} \downarrow \vec{v} \end{array} \right\} \implies (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180^\circ \implies \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 180^\circ \stackrel{(\cos 180=-1)}{=} -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

- (c) El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a cero. Efectivamente, por las definiciones (??) y (??):

$$\vec{u} \perp \vec{v} \implies (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90^\circ \implies \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 90^\circ \stackrel{(\cos 90=0)}{=} 0$$

- (d) Recíprocamente, si el producto de dos vectores, NO NULOS, es cero entonces los vectores son perpendiculares (ORTOGONALES).

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \implies \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha = 0 \implies \cos \alpha = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

Al ser los vectores, no nulos, sus módulos son siempre positivos.

**Definición 2.5 (Vector unitario)** Sea  $\vec{u}$  un vector del plano vectorial, diremos que el vector es **unitario** si su norma es igual a uno:  $\|\vec{u}\| = 1$

**Definición 2.6 (Base ortonormal)** Una base del espacio vectorial se dice que es **ortonormal** si sus vectores son ortogonales y unitarios

Un ejemplo de base ortonormal es la base canónica:  $\mathcal{B}_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , cumplen:  $\begin{cases} \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \\ \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \end{cases}$

**Propiedad 2.1 (Expresión cartesiana del producto escalar de dos vectores)** *Dados dos vectores  $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2) \in V_2$  respecto de la base canónica  $\mathcal{B}_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , entonces su producto escalar es:*

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= (x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_2) \bullet (x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2) \stackrel{(1)}{=} \\ &= (x_1 \cdot x_2)(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) + (x_1 \cdot y_2)(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2) + (y_1 \cdot x_2)(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1) + (y_1 \cdot y_2)(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2) \stackrel{(2)}{=} x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = (x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}} \quad (2.2)$$

#### Razonamientos

(1) Propiedad distributiva del producto escalar.

(2) Los vectores son ortogonales y unitarios:  $\begin{cases} \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 = \boxed{0} \\ \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = \boxed{1} \end{cases}$

**Propiedad 2.2 (Expresión cartesiana del módulo de un vector)** *Sea  $\vec{u} = (x, y)$  respecto de la base canónica. El módulo (norma) del vector por definición:*

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = +\sqrt{(x, y) \bullet (x, y)} = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\boxed{\|\vec{u}\| = +\sqrt{x^2 + y^2}}} \quad (2.3)$$

La norma de un vector es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes

**Propiedad 2.3 (Coseno del ángulo que forman dos vectores)** *Dados dos vectores, no nulos, para calcular el coseno aplicamos la definición (??) del producto escalar y las expresiones cartesianas (??) y (??):*

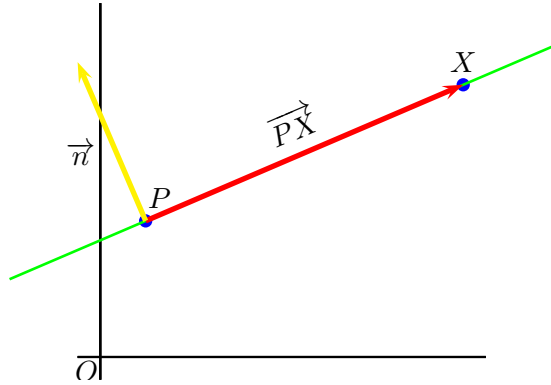
$$\begin{cases} \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha \\ \vec{u} \bullet \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{cases} \implies \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Despejando el coseno del ángulo:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \quad (2.4)$$

## 2.1. La recta en el plano euclídeo

**Propiedad 2.4 (Ecuación normal de la recta)** La recta viene determinada por un punto y un vector no nulo,  $r \equiv (P, \vec{u})$ . Sea  $\vec{n}$  un vector perpendicular al vector director  $\vec{u}$ , es decir,  $\vec{u} \perp \vec{n}$ .



Sea  $X$  un punto genérico de la recta  $r \equiv (P; \vec{u})$ . Vectorialmente:  $\vec{PX} \parallel \vec{u}$  y  $\vec{n} \perp \vec{u}$ , por lo tanto:  $\vec{PX} \perp \vec{n}$ . Por la definición de vectores ortogonales:

$$\boxed{\vec{PX} \perp \vec{n} \iff \vec{PX} \cdot \vec{n} = 0}$$

Pasando a coordenadas:

$$\begin{cases} \vec{PX} = (x - x_0, y - y_0) \\ \vec{n} = (n_1, n_2) \end{cases}$$

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (n_1, n_2) = (x - x_0) \cdot n_1 + (y - y_0) \cdot n_2 = 0$$

$$\boxed{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y - (n_1 x_0 + n_2 \cdot y_0) = 0}$$

Es la ecuación general de la recta,  $Ax + By + C = 0$ , por lo tanto el vector normal tiene de componentes los coeficientes de  $x$  e  $y$  de la ecuación implícita, general o cartesiana de la recta

$$\boxed{\vec{n} = (A, B) \quad y \quad \vec{u} = (B, -A)} \quad (2.5)$$

El vector  $\vec{n}$  recibe el nombre de vector normal o característico de la recta.

**Propiedad 2.5 (Rectas paralelas)** Dadas las rectas:  $r \equiv (P, \vec{n}_1)$  y  $s \equiv (Q, \vec{n}_2)$  son paralelas si  $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$  (los vectores son linealmente dependientes).

En forma cartesiana:

$$\begin{cases} r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \implies \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \\ s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \implies \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \end{cases} \quad r \parallel s \iff \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

**Propiedad 2.6 (Rectas perpendiculares)** Dadas las rectas:  $r \equiv (P, \vec{n}_1)$  y  $s \equiv (Q, \vec{n}_2)$  son perpendiculares si  $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ , su producto escalar es igual a cero.

En forma cartesiana:

$$\begin{cases} r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \implies \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \\ s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \implies \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \end{cases} \quad r \perp s \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff$$

$$(A_1, B_1) \cdot (A_2, B_2) = A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$\boxed{r \perp s \iff A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0} \quad (2.6)$$

En forma punto pendiente:

$$\begin{cases} r \equiv y = m_1x + n_1 \implies m_1x - y + n_1 = 0 \\ s \equiv y = m_2x + n_2 \implies m_2x - y + n_2 = 0 \end{cases} \quad \text{aplicando la condición de perpendicularidad (??):}$$

$$m_1 \cdot m_2 + (-1)(-1) = 0 \iff m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$$

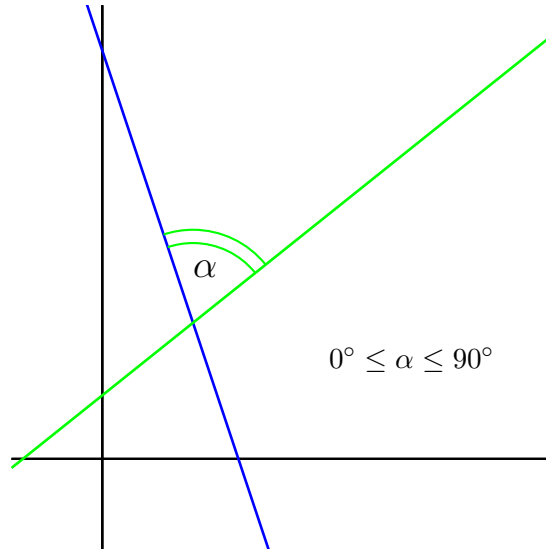
$$\boxed{r \perp s \iff m_1 \cdot m_2 = -1} \quad (2.7)$$

## Problemas asociados

- Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.
- Punto simétrico respecto de una recta.

**Definición 2.7 (Ángulo entre dos rectas)** Se llama *ángulo entre dos rectas secantes AL MENOR* de los ángulos que forman sus vectores directores o sus vectores normales.

$$0^\circ \leq (\widehat{r, s}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) \leq 90^\circ$$



Para calcular el ángulo se emplea la definición de ángulo entre vectores y su cálculo (??), teniendo en cuenta que el ángulo pertenece al primer cuadrante y por lo tanto su **coseno es positivo o nulo**.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (2.8)$$

## Casos particulares

- Las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas si y sólo si el ángulo que forman es cero.
- Las rectas  $r$  y  $s$  son perpendiculares si y sólo si el ángulo que forman es recto, ( $\alpha = 90^\circ$ ).

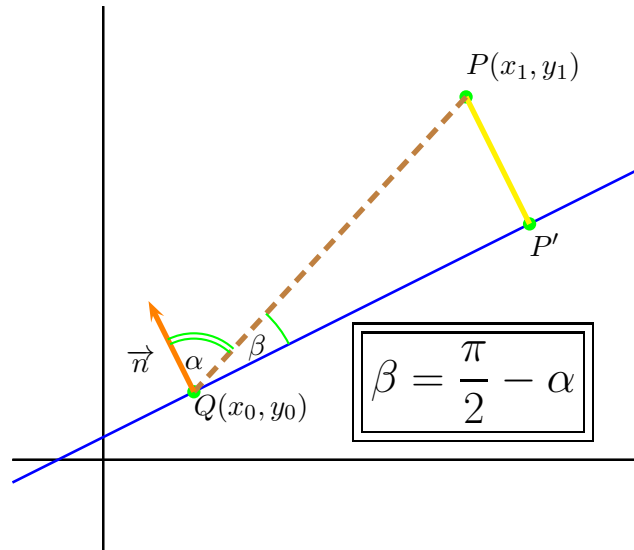
## 2.2. Distancias

**Definición 2.8 (Distancia entre dos puntos)** Dados dos puntos  $P(x_1, y_1)$  y  $Q(x_2, y_2)$  se llama *distancia entre  $P$  y  $Q$*  al módulo del vector  $\overrightarrow{PQ}$ .

Las componentes del vector son:  $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  y aplicando (??)

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.9)$$

**Definición 2.9 (Distancia de un punto a una recta)** Sea  $r$  una recta del plano y  $P$  un punto, se llama distancia del punto a la recta,  $d(P, R)$ , a la distancia entre  $P$  y su proyección ortogonal en la recta  $P'$ .



Sea  $r \equiv Ax + By + C = 0 \implies \vec{n} = (A, B)$  y  $P(x_1, y_1)$  un punto del plano. El punto  $P'$  es su proyección ortogonal sobre la recta  $r$ . Consideremos un punto arbitrario de la recta  $Q(x_0, y_0)$ . Se forma el triángulo rectángulo  $PP'Q$ . Por definición:

$d(P, r) = d(P, P')$  Por definición de seno en el triángulo rectángulo

$$\sin \beta = \frac{d(P, P')}{d(QP)} \implies \boxed{d(P, P')} = d(QP) \cdot \sin \beta = d(QP) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \stackrel{(1)}{=} \boxed{d(QP) \cdot \cos \alpha} \quad (*)$$

El producto escalar de los vectores  $\vec{QP}$  y  $\vec{n}$

$$\left| \vec{QP} \cdot \vec{n} \right| \stackrel{(2)}{=} \|\vec{QP}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \alpha \implies \|\vec{QP}\| = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\| \cdot \cos \alpha}$$

Sustituyendo en (\*):

$$d(P, r) = d(P, P') = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\| \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad (2.10)$$

Las componentes de los vectores:  $\vec{QP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  y  $\vec{n} = (A, B)$

$$d(P, r) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot (A, B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \stackrel{(3)}{=} \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Razonamientos**

(1) Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son complementarios:  $\sin \beta = \cos \alpha$ .

(2) Definición clásica.

(3) El punto  $Q(x_0, y_0)$  pertenece a la recta  $r \implies Ax_0 + By_0 + C = 0 \implies Ax_0 + By_0 = -C$ .

La distancia de un punto a una recta se calcula dividiendo el valor absoluto que resulta de sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta entre la norma del vector característico de la recta

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \quad (2.11)$$

**Definición 2.10 (Distancia entre dos rectas)** Dadas dos rectas  $r$  y  $s$ , se llama distancia entre las rectas a la mínima distancia entre ellas.

$$d(r, s) = \text{mínima} \left\{ d(P, Q) \mid P \in r; Q \in s \right\}$$

**Rectas secantes** Si las rectas son secantes,  $r \cap s = \text{punto}$ :  $d(r, s) = 0$ .

**Rectas coincidentes** Si las rectas son coincidentes,  $r \equiv s$ :  $d(r, s) = 0$

**Rectas paralelas** La distancia entre rectas paralelas es constante.

$$d(r, s) = d(P, s) = d(Q, r), \text{ siendo } P \in r \text{ o } Q \in s$$