

Consideremos los puntos del plano $A(-4, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, -2)$:

- ① Demostrar **vectorialmente** que los puntos determinan un triángulo de vértices A, B y C .
- ② Hallar la ecuación de la recta que determinan A y B en forma vectorial y paramétrica.
- ③ Hallar la ecuación de la recta que determinan A y C en forma paramétrica y general.
- ④ Hallar la ecuación de la recta que determinan B y C en forma vectorial y explícita.
- ⑤ Hallar las pendientes de las rectas.
- ⑥ Calcular la ecuación de la mediana trazada desde el vértice A .
- ⑦ Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo de dos formas distintas.
- ⑧ Hallar la ecuación del haz de rectas paralelas al lado BC en forma explícita e implícita.
- ⑨ Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta paralela al lado AC y que pasa por el vértice B .

- ① **Tres puntos no están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.** Dos vectores en el plano son linealmente dependientes si tienen la misma dirección, es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$, dicho de forma práctica, sus componentes respecto de la base son PROPORCIONALES.

En nuestro caso: $\overrightarrow{AB} = (7, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (3, -5)$. Sus componentes NO SON PROPORCIONALES $\frac{7}{3} \neq \frac{2}{-5}$.

Los vectores son linealmente independientes, los puntos A, B y C **NO ESTÁN** alineados, los tres puntos determinan un triángulo.

- ② **Las rectas vienen determinadas por un punto y un vector no nulo.**

Un vector director de la recta determinada por los puntos A y B es $\overrightarrow{AB} = (7, -2)$ y un punto, por ejemplo, A .

■ Forma vectorial de la recta: $(x, y) = (-4, 3) + \lambda(7, -2); \forall \lambda \in \mathbb{R}$

■ Forma paramétrica: $\begin{cases} x = -4 + 7\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- ③ La recta viene determinada por $\begin{cases} A(-4, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (3, -5) \end{cases}$

■ Forma vectorial $(x, y) = (-4, 3) + \lambda(3, -5); \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

■ Forma paramétrica: $\begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

■ Forma general (implícita):

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{-5} \implies -5(x+4) = 3(y-3) \implies -5x-20 = 3y-9 \implies 5x+3y+11=0$$

- ④ La recta viene determinada por $\begin{cases} B(3, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (-4, -3) \parallel (4, 3) \end{cases}$.

■ Forma vectorial: $(x, y) = (3, 1) + \lambda(4, 3)$.

■ Forma continua: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{3}$

■ Forma explícita:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{3} \implies 3(x-3) = 4(y-1) \implies 3x-9 = 4y-4 \implies 4y = 3x-5 \implies y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

- ⑤ ■ Recta determinada por A y B en forma explícita:

$$\frac{x+4}{7} = \frac{y-3}{-2} \implies y-3 = -\frac{2}{7}(x+4) \implies m = -\frac{2}{7}$$

■ Recta determinada por A y C en forma explícita:

$$5x+3y+11=0 \implies 3y = -5x-11 \implies y = -\frac{5}{3}x - \frac{11}{3} \implies m = -\frac{5}{3}$$

- Recta determinada por B y C en forma explícita:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{3} \implies \boxed{m = \frac{3}{4}}$$

⑥ **Mediana trazada desde el vértice A al punto medio del lado BC .**

Las coordenadas del punto medio del lado son:

$$M_{BC} = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{1 + (-2)}{2} \right) = \left(1, -\frac{1}{2} \right)$$

Un vector director de la recta que sustenta la mediana es

$$\overrightarrow{AM} = \left(1 - (-4), -\frac{1}{2} - 3 \right) = \left(5, -\frac{7}{2} \right) \parallel (10, -7)$$

Ecuación de la mediana:

$$\frac{x + 4}{10} = \frac{y - 3}{-7} \implies \boxed{7x + 10y - 2 = 0}$$

⑦ **Baricentro de un triángulo: punto de intersección de las medianas.**

- Fórmula demostrada en teoría:

$$G \left(\frac{-4 + 3 - 1}{3}, \frac{3 + 1 - 2}{3} \right) \implies \boxed{G \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)}$$

- Punto de intersección de dos medianas:

Mediana trazada desde C al punto medio del lado AB . Las coordenadas del punto medio son $M_{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 2 \right)$ y la ecuación de la mediana: $8x - y + 6 = 0$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las medianas:

$$\begin{cases} 8x - y = -6 \\ 7x + 10y = 2 \end{cases} \implies \boxed{G \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)}$$

⑧ **Condición de paralelismo en forma explícita: dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.** La pendiente de la recta BC es $m = \frac{3}{4}$, todas las rectas del haz tienen la misma pendiente:

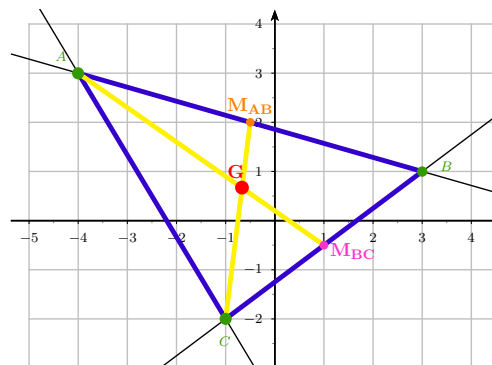
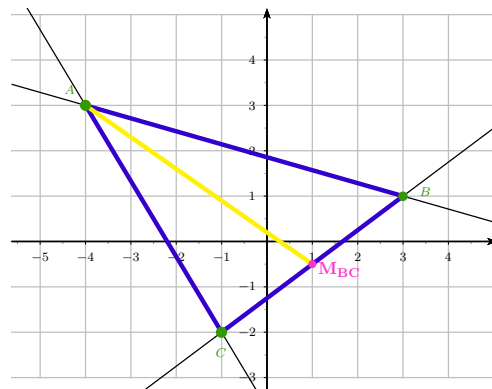
Ecuación del haz de rectas paralelas: $\boxed{y = \frac{3}{4}x + n \quad \forall n \in \mathbb{R}}$

- Condición de paralelismo en forma explícita: los coeficientes de x e y son proporcionales:**

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$; la ecuación de la recta es $3x - 4y - 5 = 0$:

Ecuación del haz de rectas paralelas:

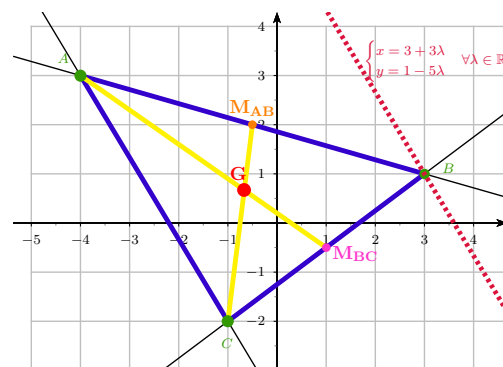
$$\boxed{\begin{cases} 3x - 4y + k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R} \\ \text{ó} \\ 3(x - a) - 4(y - b) = 0, \quad \forall (a, b) \text{ coordenadas de un punto cualquiera del plano} \end{cases}}$$



- ⑨ Si la recta es paralela al lado AC entonces el vector director de todas las paralelas es $\overrightarrow{AC} = (3, -5)$ y el punto es el vértice $B(3, 1)$

Ecuación de la recta paralela:

$$\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



PD:El ejercicio se puede realizar con GEOGEBRA y comprobar todos los resultados. Aplicación de las TIC en las matemáticas. SUERTE!!!!