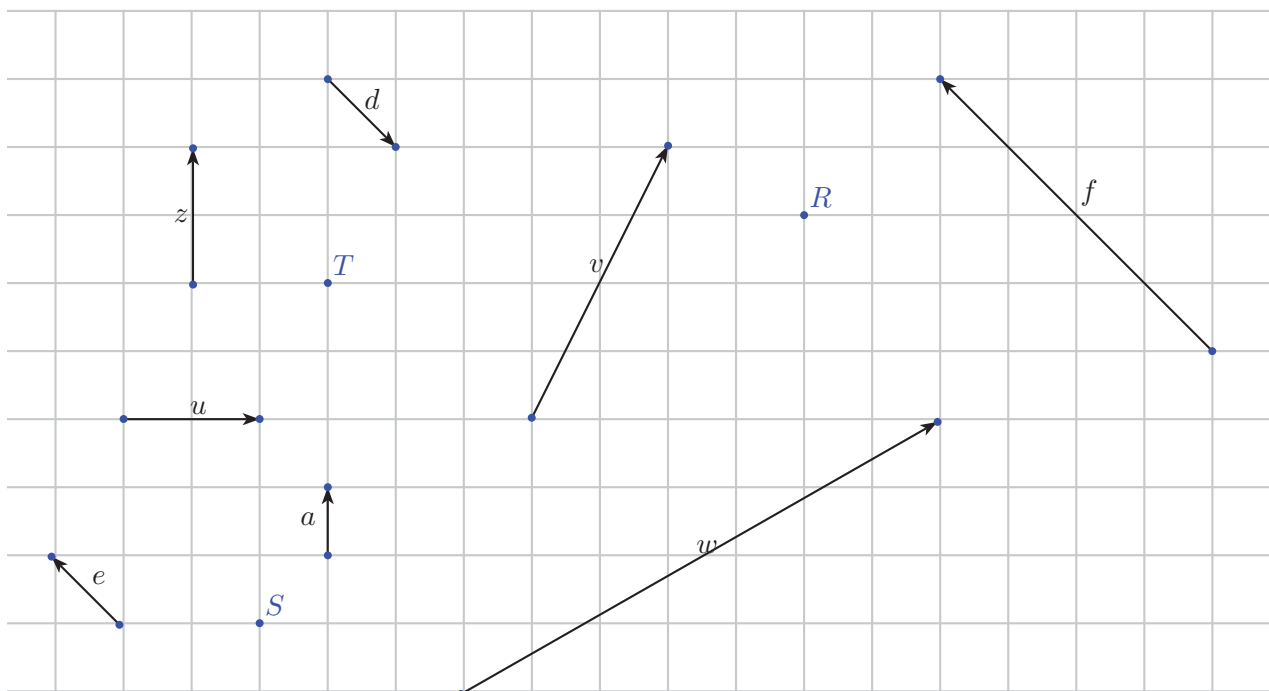




- ① Escribir los vectores fijos. ¿Y los libres?

Los vectores fijos son todos que están representados.

Vectores libres:

- El vector nulo: $\vec{0} = \{R, S, T\}$. Son los puntos.
- El resto de vectores son libres, no hay equipolencia entre ellos.

- ② ¿La familia $\mathfrak{F} = \{\vec{a}, \vec{z}, \vec{u}\}$ es libre o ligada?

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{z}$ tienen la misma dirección, son linealmente dependientes, por lo tanto, la familia es LIGADA. Los vectores son LINEALMENTE DEPENDIENTES.

- ③ Escribe todas las bases de V_2 que se pueden formar con los vectores. RAZONA la respuesta.

En el plano vectorial, V_2 , dos vectores, no nulos, que tengan distinta dirección forman una base del plano.

- ④ Escribe la combinación lineal que hay entre los vectores: $\vec{e}$, $\vec{d}$ y $\vec{f}$.

Los vectores tienen la misma dirección: $\vec{e} \parallel \vec{d} \parallel \vec{f}$.

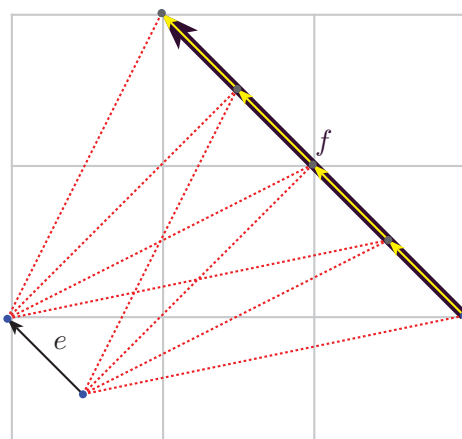
Los vectores $\vec{e}$ y $\vec{d}$ tienen el mismo módulo y sentido contrario: $\vec{e} = -\vec{d}$ o $\vec{d} + \vec{e} = \vec{0}$.

Los vectores $\vec{e}$ y $\vec{f}$ tienen el mismo sentido y su módulo es cuatro veces:

$$\boxed{\vec{f} = 4 \cdot \vec{e}}$$

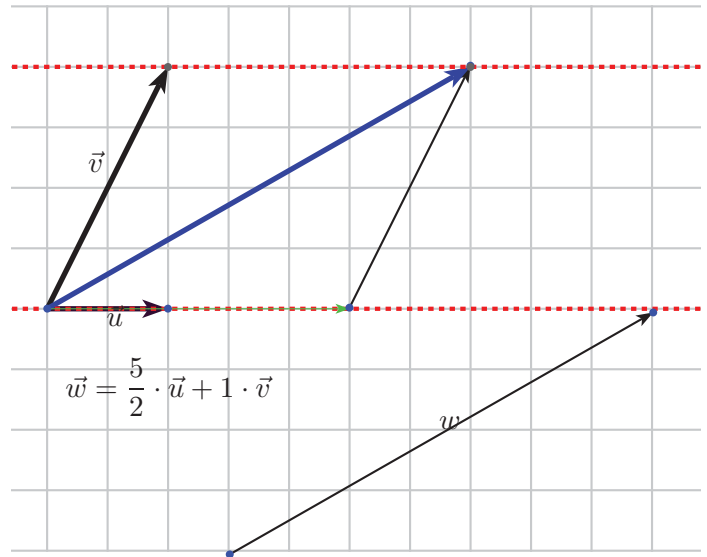
y por el apartado anterior:

$$\boxed{\vec{f} = -4 \cdot \vec{d}}$$



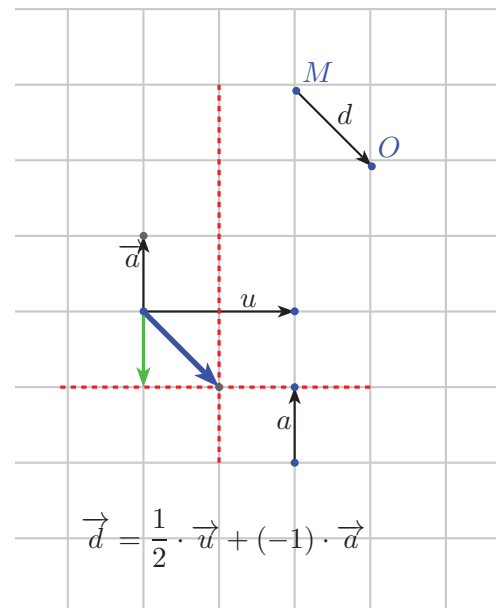
- ⑤ Consideremos la base: $\mathfrak{B}_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ escribir el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$. Trasladando los vectores a un origen común, vectores equipolentes, y trazando rectas paralelas a las direcciones de los vectores de la base desde el extremo del vector $\vec{w}$, se expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$.

$$\vec{w} = \frac{5}{2} \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$$



- ⑥ Consideremos la base: $\mathfrak{B}_2 = \{\vec{u}, \vec{a}\}$ escribir el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathfrak{B}_2$. Trasladando los vectores a un punto de origen común y trazando las rectas paralelas igual que en el apartado anterior:

$$\vec{d} = \frac{1}{2} \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{a}$$



① Dada la recta $r \equiv 5x + 3y - 8 = 0$:

a) Hallar una forma paramétrica de la recta.

La ecuación implícita de la recta es un sistema de una ecuación lineal con dos incógnitas. La solución depende de un parámetro. Despejando:

$$5x + 3y - 8 = 0 \implies 3y = 8 - 5x \implies y = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x \implies \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = \frac{8}{3} - 5\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Un vector director de la recta es $\vec{u}_r = (3, -5)$.

b) Calcular la pendiente de la recta.

- Si la recta la expresamos en forma explícita: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{8}{3}$, la pendiente es el coeficiente de x ,

$$\boxed{m = -\frac{5}{3}}.$$

- Si tenemos un vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, -5) \parallel \left(1, -\frac{5}{3}\right) \implies \boxed{m = -\frac{5}{3}}.$

c) Hallar la ordenada en el origen. La recta en forma explícita: $\boxed{n = \frac{8}{3}}.$

d) Escribir la ecuación de la recta r en forma segmentaria.

$$r \equiv 5x + 3y = 8 \implies \frac{5x}{8} + \frac{3y}{8} = 1 \implies \boxed{\frac{x}{\frac{8}{5}} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1}$$

② Dados los puntos del plano $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(3, 7)$:

a) Demostrar que forman un triángulo.

Si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no tienen la misma dirección (linealmente independientes) entonces los tres puntos del plano formaran un triángulo.

$$\begin{cases} \vec{AB} = (3, 1) \\ \vec{AC} = (2, 6) \end{cases} \quad \text{sus componentes NO son proporcionales, entonces tienen distinta dirección}$$

b) El vector equipolente a $\vec{AB}$ que tenga su extremo en el punto $D(-2, 5)$.

Si dos vectores son equipolentes entonces tienen las mismas componentes respecto de la misma base. Sea $E(\alpha, \beta)$ el origen del vector equipolente a $\vec{AB}$.

$$\vec{AB} \sim \vec{ED} \iff (3, 1) = (-2 - \alpha, 5 - \beta) \implies \begin{cases} -2 - \alpha = 3 \implies \alpha = -5 \\ 5 - \beta = 1 \implies \beta = 4 \end{cases}$$

Las coordenadas del extremo: $\boxed{E(-5, 4)}$

c) Ecuación vectorial de la recta determinada por los puntos A y B .

$$r_{AB} \equiv (x, y) = (1, 1) + \alpha(3, 1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

d) Ecuación continua de la recta determinada por los puntos A y C . Un vector director de la recta es: $\vec{AC} = (2, 6) \parallel (1, 3)$, un punto de la recta, A :

$$r_{AC} \equiv \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{3}$$

e) Ecuación general de la recta determinada por los puntos B y C .

Un vector director de la recta $\overrightarrow{BC} = (-1, 5)$ y la ecuación continua es: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-2}{5}$, multiplicando:

$$\boxed{r_{BC} \equiv 5x + y - 22 = 0}$$

f) Hallar las pendientes de las tres rectas anteriores. Expresando las rectas en forma explícita o con los vectores directores de las rectas:

$$\boxed{\begin{cases} m_{AB} = \frac{1}{3} \\ m_{AC} = 3 \\ m_{BC} = -5 \end{cases}}$$

g) Ecuación del haz de rectas de vértice B .

■ En forma punto pendiente: $\begin{cases} y - 2 = m(x - 4), \forall m \in \mathbb{R} \\ x = 4 \end{cases}$

■ En forma implícita: $A(x - 4) + B(y - 2) = 0, \forall (A, B) \in \mathbb{R}^2$

h) Ecuación de las tres medianas del triángulo ABC .

■ Mediana trazada desde el vértice C :

Punto medio del lado AB : $M_{AB} \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right)$

Vector director de la mediana: $\overrightarrow{MC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2} \right) \parallel (1, 11)$

Ecuación de la mediana: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{11} \implies 11x - 33 = y - 7 \implies \boxed{11x - y - 26 = 0}$

■ Mediana trazada desde el vértice B :

Punto medio del lado AC : $M_{AC} (2, 4)$

Vector director de la mediana: $\overrightarrow{MB} = (2, -2) \parallel (1, -1)$

Ecuación de la mediana: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-1} \implies x - 4 = -y + 2 \implies \boxed{x + y - 6 = 0}$

■ Mediana trazada desde el vértice A :

Punto medio del lado BC : $M_{BC} \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right)$

Vector director de la mediana: $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2} \right) \parallel (5, 7)$

Ecuación de la mediana: $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{7} \implies 7x - 7 = 5y - 5 \implies \boxed{7x - 5y - 2 = 0}$

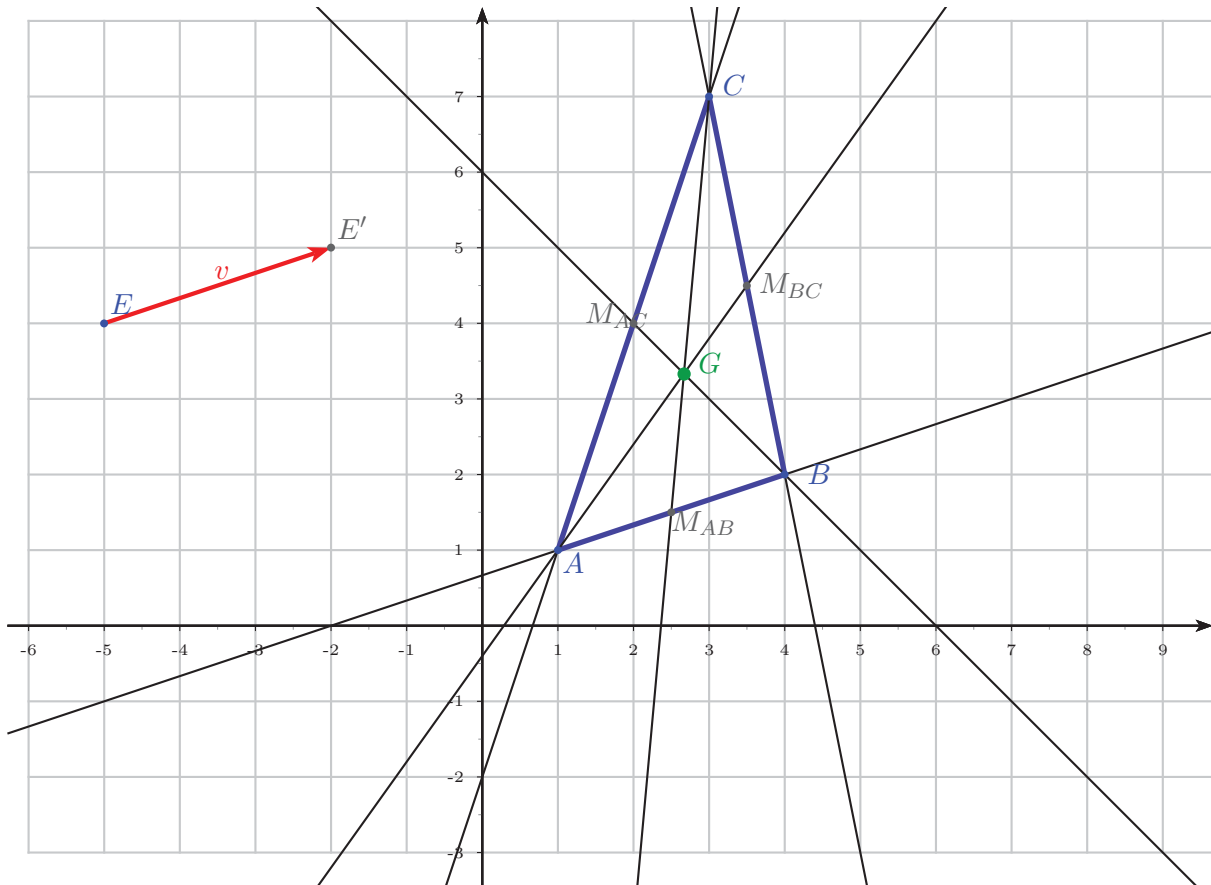
i) *Coordenadas del baricentro del triángulo.*

- Fórmula teórica: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{1+4+3}{3}, \frac{1+2+7}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$.
- Intersección de dos de las medianas:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 6 \\ 11x - y & = & 26 \\ \hline 12x & = & 32 \end{array} \implies x = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} \text{ sustituyendo en una de las ecuaciones: } y = \frac{10}{3}$$

$$G\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

Aplicación de las TIC. El ejercicio se puede resolver íntegramente con el GEOGEBRA:



- ① Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 14$, $|\vec{u}| = 11$ y $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{4}$, hallar: $|\vec{v}|$.

Definición clásica del producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 11 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 14 \implies \|\vec{v}\| = \frac{14}{11 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{11}$$

- ② Si $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 6$, $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{2}{3}$, hallar: $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

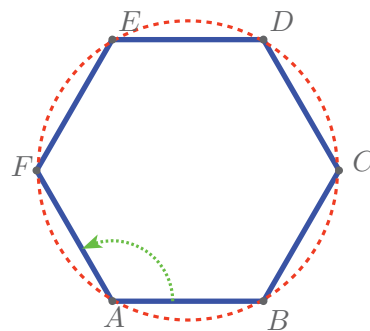
$$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \stackrel{(1)}{=} \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{(2)}{=} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 36 + 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 36 + 24 = 60$$

Razonamientos

- (1) Propiedad distributiva del producto escalar de vectores.
 (2) definición de norma de un vector: $\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

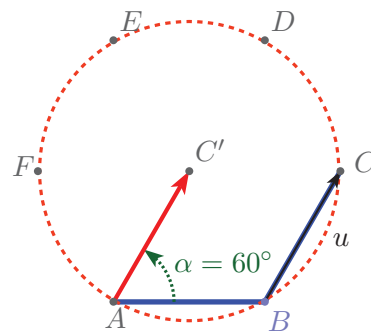
- ③ Los puntos A, B, C, D, E, F son los vértices de un exágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Calcular:

Los ángulos interiores de un exágono regular miden 120°



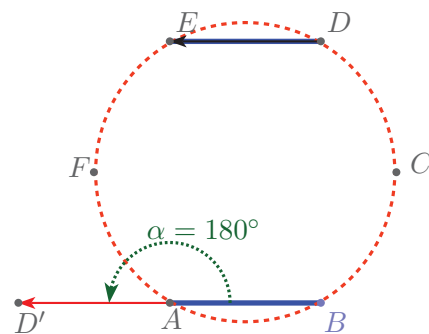
- (a) $\overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[BC]}$ Los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC'}$ son equipolentes. El ángulo que forman los vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ es de 60° .

$$\overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[BC]} = \overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[AC']} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC'}\| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



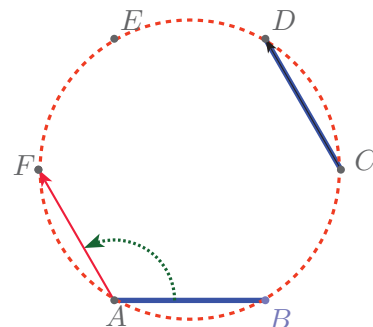
- (b) $\overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[DE]}$ Los vectores $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{AD'}$ son equipolentes. El ángulo que forman los vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DE}$ es de 180° .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[DE]} &= \overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[AD']} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD'}\| \cdot \cos 180^\circ = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$



- (c) $\overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[CD]}$ Los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AF}$ son equipolentes. El ángulo que forman los vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$ es de 120° .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[CD]} &= \overrightarrow{[AB]} \cdot \overrightarrow{[AF]} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AF}\| \cdot \cos 120^\circ = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

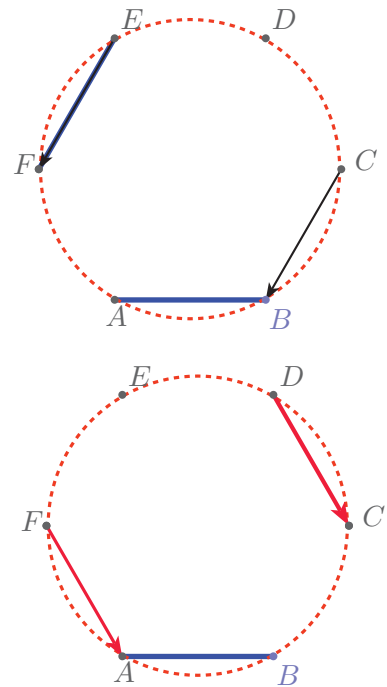


- (d) $[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{EF}]$. El vector $\overrightarrow{EF}$ tiene el mismo módulo, dirección pero sentido contrario del vector $\overrightarrow{BC}$. Teniendo en cuenta el apartado (a):

$$[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{EF}] = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}$$

- (e) $[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{FA}]$. El vector $\overrightarrow{FA}$ tiene el mismo módulo y dirección que el vector $\overrightarrow{CD}$, pero sentido contrario. Teniendo en cuenta el apartado (c):

$$[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{FA}] = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



- ④ Hallar el punto de intersección de la recta $r \equiv x - y = 0$ con la recta que pasando por el punto $P(3, 2)$ es perpendicular a r .

Dos rectas, r y s , son perpendiculares si $\vec{n}_r \perp \vec{n}_s \iff \vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = 0$.

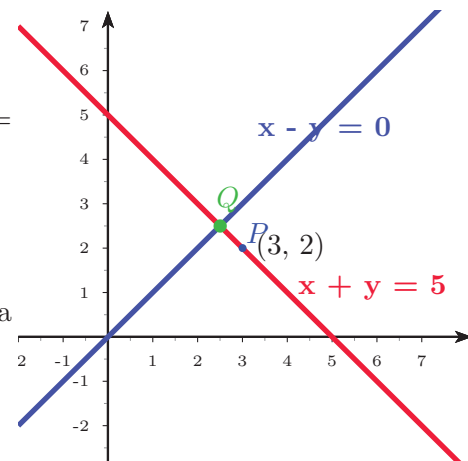
$$r \equiv x - y = 0 \implies \vec{n}_r = (1, -1). \text{Entonces } \vec{n}_s = (1, 1)$$

El haz de rectas perpendiculares a r es $\boxed{1 \cdot (x - x_0) + 1 \cdot (y - y_0)} = 0, \forall (A, B) \in \mathbb{R}^2$. La recta s pasa por el punto $P(3, 2)$

$$s \equiv 1 \cdot (x - 3) + 1 \cdot (y - 2) = 0 \implies \boxed{s \equiv x + y - 5 = 0}$$

El punto intersección de las dos rectas se calcula resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$



El punto $Q = r \cap s = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

- ⑤ Calcular $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la recta $x - \alpha y + 1 = 0$ sea perpendicular a la recta $(2 - \alpha)x - \frac{4}{3}y + 2 = 0$.

$$r \perp s \iff \vec{n}_r \perp \vec{n}_s \iff \vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = 0$$

$$\begin{cases} \vec{n}_r = (1, -\alpha) \\ \vec{n}_s = \left(2 - \alpha, -\frac{4}{3}\right) \end{cases} \quad (1, -\alpha) \cdot \left(2 - \alpha, -\frac{4}{3}\right) = 0 \implies 2 - \alpha + \frac{4}{3}\alpha = 0 \implies \boxed{\alpha = -6}$$

- ⑥ Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo PQR siendo $P(0, 0)$, $Q(4, 1)$, $R(2, 4)$.

El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de las alturas.

- Altura trazada desde el vértice $P(0, 0)$, recta perpendicular al lado QR . El vector $\overrightarrow{QR} = (-2, 3)$ es el vector normal, $\overrightarrow{n_{h_P}}$, de la altura h_P

$$h_P \equiv -2(x - 0) + 3(y - 0) = 0 \implies \boxed{h_P \equiv 2x - 3y = 0}$$

- Altura trazada desde el vértice $Q(4, 1)$, recta perpendicular al lado PR . El vector $\overrightarrow{PR} = (2, 4) \parallel (1, 2)$ es el vector normal, $\overrightarrow{n_{h_Q}}$, de la altura h_Q

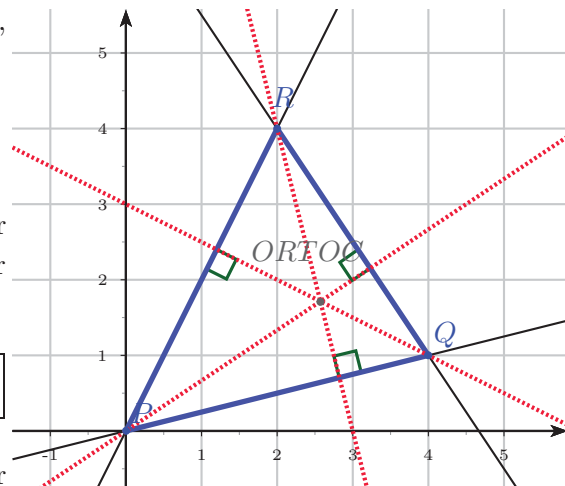
$$h_Q \equiv 1(x - 4) + 2(y - 1) = 0 \implies \boxed{h_Q \equiv x + 2y - 6 = 0}$$

- Altura trazada desde el vértice $R(2, 4)$, recta perpendicular al lado PQ . El vector $\overrightarrow{PQ} = (4, 1)$ es el vector normal, $\overrightarrow{n_{h_R}}$, de la altura h_R

$$h_R \equiv 4(x - 2) + 1(y - 4) = 0 \implies \boxed{h_R \equiv 4x + y - 12 = 0}$$

Intersección de dos de las alturas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{18}{7} \\ y = \frac{12}{7} \end{cases} \implies \boxed{\text{ORTO} = \left(\frac{18}{7}, \frac{12}{7}\right)}$$



- ① Dos lados de un triángulo están situados en las rectas $r \equiv x + y - 3 = 0$ y $s \equiv 2x - y + 9 = 0$ y su baricentro es el punto $G\left(-\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

(a) Hallar las coordenadas del vértice A del triángulo.

Si $A = r \cap s$ entonces:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -9 \end{cases} \quad \text{sumando:}$$

$3x = -6 \implies x = -2$ y sustituyendo en una de las ecuaciones del sistema $y = 5 \implies \boxed{A(-2, 5)}$

(b) Calcular las coordenadas del punto medio del lado BC . Propiedad del baricentro de un triángulo: *diste un tercio del lado y dos tercios del vértice*. Si $M_{BC}(\alpha, \beta)$ es el punto medio del lado BC se cumple: $\overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$, entonces:

$$\left(-\frac{1}{3} + 2, \frac{16}{3} - 5\right) = 2\left(\alpha + \frac{1}{3}, \beta - \frac{16}{3}\right) \implies \begin{cases} -\frac{1}{3} + 2 = 2\alpha + \frac{2}{3} \implies \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{16}{3} - 5 = 2\beta - \frac{32}{3} \implies \beta = \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{M_{BC}\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)}$$

(c) Hallar las coordenadas de los vértices B y C .

El vértice $B(\alpha_1, \beta_1) \in r$ y el vértice $C(\alpha_2, \beta_2) \in s$ entonces:
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 3 \\ 2\alpha_2 - \beta_2 = -9 \end{cases}.$$

El punto medio del segmento BC es $M_{BC}\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$, entonces:
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 11 \end{cases}.$$
 Resolviendo el sistema

formado por las cuatro ecuaciones:
$$\begin{cases} B(1, 2) \\ C(0, 9) \end{cases}$$

(d) Hallar la ecuación implícita del lado BC .

El vector director de la recta es $\overrightarrow{BC} = (-1, 7)$, su vector normal es: $\vec{n}_{BC} = (7, 1)$:

$$BC \equiv 7 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 9) = 0 \implies \boxed{7x + y - 9 = 0}$$

(e) Calcular el perímetro del triángulo y su superficie.

- Perímetro. Suma de las longitudes de los lados del triángulo.

$$P = d(A, B) + d(A, C) + d(B, C) = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \text{ u}$$

- Superficie. Considerando el lado BC como base del triángulo, la altura relativa es la distancia del vértice A al lado BC .

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC}\| \cdot d(A, BC) = \frac{1}{2} \sqrt{50} \cdot \frac{|-14 + 5 - 9|}{\sqrt{50}} = 9 \text{ u}^2$$

(f) Calcular el área de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC . El centro de la circunferencia circunscrita es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.

Mediatriz del lado BC :

$$\begin{cases} \text{Punto medio: } M_{BC}\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) \\ \text{Vector normal de la mediatriz: } \vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-1, 7) \\ \text{Ecuación de la mediatriz: } (-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \left(y - \frac{11}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x - 7y + 38 = 0}$$

Mediatriz del lado BC :

$$\begin{cases} \text{Punto medio: } M_{AB} \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right) \\ \text{Vector normal de la mediatriz: } \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (3, -3) \parallel (1, -1) \\ \text{Ecuación de la mediatriz: } (1) \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right) + (-1) \cdot \left(y - \frac{7}{2} \right) = 0 \\ \boxed{x - y + 4 = 0} \end{cases}$$

Coordenadas del circuncentro. Solución del sistema formado por dos de las mediatrices del triángulo:

$$\begin{cases} x - 7y + 38 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \implies -6y + 34 = 0 \implies y = \frac{17}{3} \text{ sustituyendo en una de las ecuaciones:}$$

$$x = \frac{5}{3} \implies \boxed{CIRCUN \left(\frac{5}{3}, \frac{17}{3} \right)}$$

El radio de la circunferencia circunscrita es la distancia del circuncentro a uno de los vértices:

$$\begin{aligned} R_{\text{circun}} &= d(CIRCUN, B) = \\ &= +\sqrt{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{17}{3}\right)^2} = \\ &= +\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{121}{9}} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \\ \text{Área: } S &= \pi \cdot R^2 = \frac{125\pi}{9} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

