

- ① Razonar si las siguientes expresiones corresponden a la ecuación de una circunferencia y, en caso afirmativo, calcular el centro y el radio.

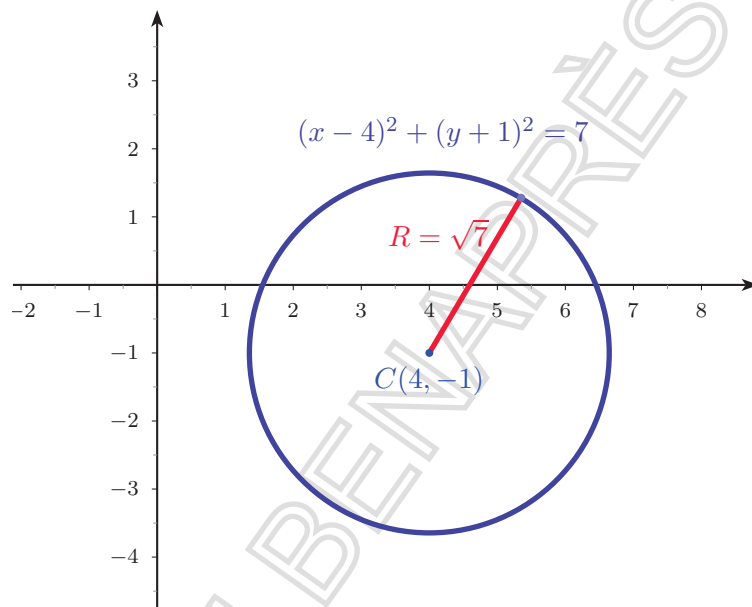
a) Completando cuadrados:

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 10 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 7$$

$$\begin{cases} \text{Centro: } C(4, -1) \\ \text{Radio: } R = \sqrt{7} \end{cases}$$



b) NO es una circunferencia: $x^2 \boxed{-} y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$.

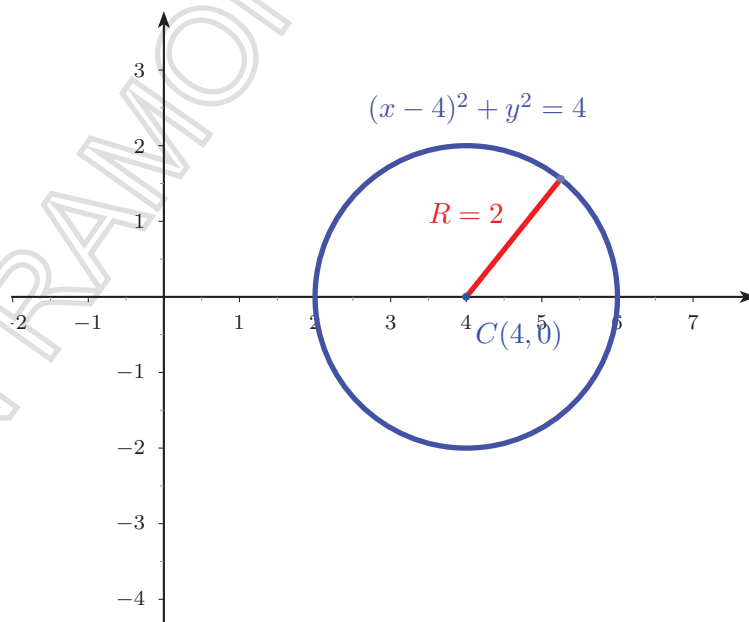
c) Simplificando y completando cuadrados:

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + y^2 + 12 = 0$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} \text{Centro: } C(4, 0) \\ \text{Radio: } R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$



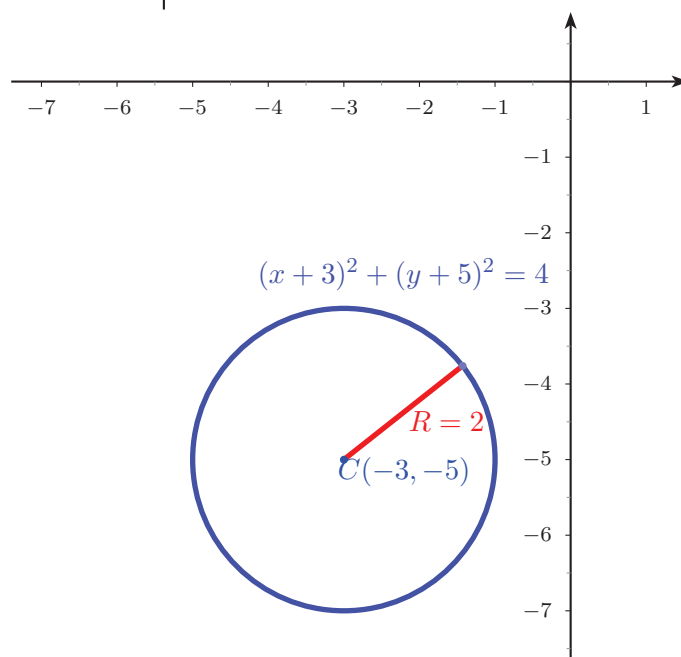
d) Completando cuadrados:

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y + 5)^2 - 25 = -30$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$$

$$\begin{cases} \text{Centro: } C(-3, -5) \\ \text{Radio: } R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$



- ② El diámetro de una circunferencia tiene de extremos los puntos $P(1,2)$ y $Q(3,6)$. Hallar, razonadamente, su ecuación.

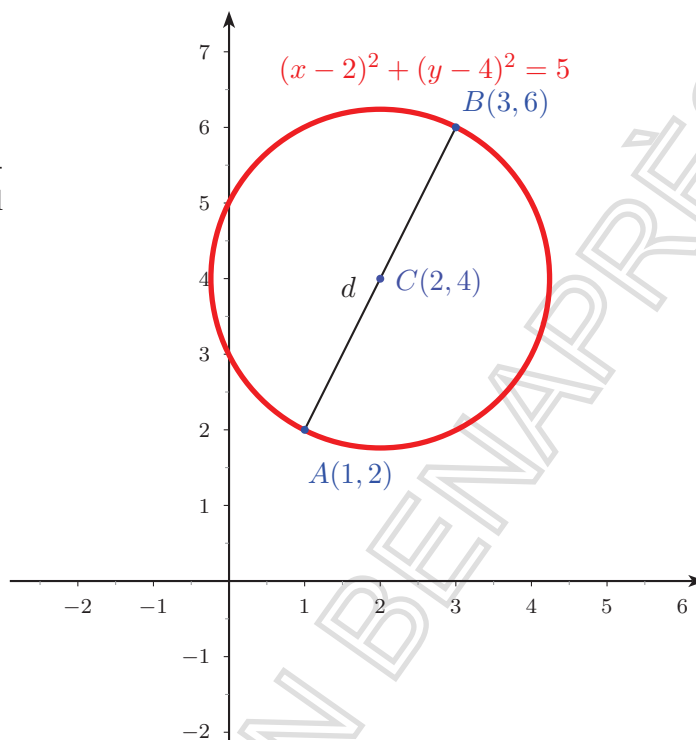
El segmento $\overline{PQ}$ es un diámetro de la circunferencia. El punto medio del segmento es el centro: $C\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2,4)$

El radio es la mitad del diámetro:

$$R = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Ecuación de la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$$



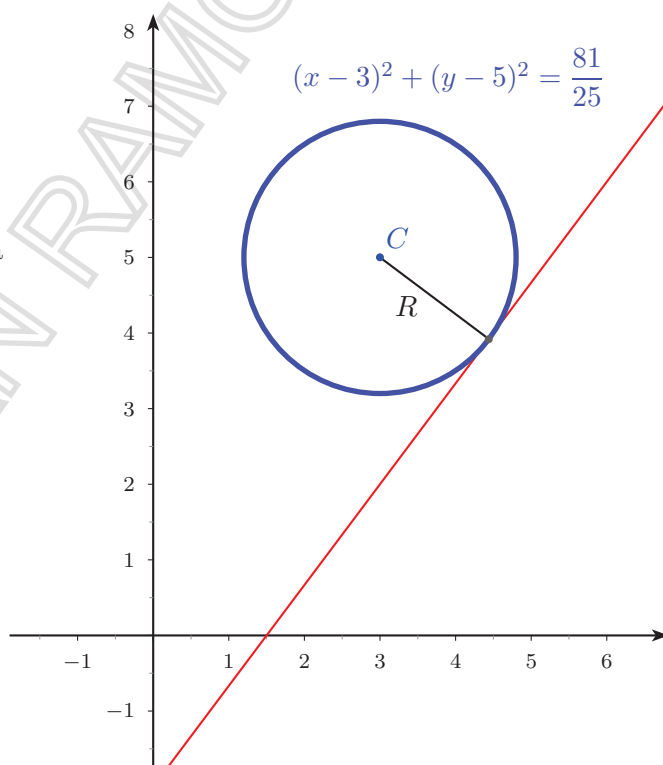
- ③ El centro de una circunferencia está situado en el punto $C(3,5)$ y es tangente a la recta $4x - 3y - 6 = 0$, calcular su ecuación.

El radio es la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = d(C, r) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{9}{5}$$

Ecuación de la circunferencia:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = \frac{81}{25}$$



- ④ a) Demostrar que los puntos $A(7, 5)$, $B(4, -2)$ y $C(-3, 1)$ no están alineados.

Vectorialmente: $\overrightarrow{AB} = (-3, -7)$ y $\overrightarrow{AC} = (-10, -4)$ son linealmente independientes. Los puntos no están alineados.

- b) Hallar la ecuación de la circunferencia determinada por los tres puntos.

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son cuerdas de la circunferencia. El centro de la circunferencia es el punto intersección de las mediatrices de las dos cuerdas:

- Mediatriz de la cuerda $\overline{AB}$.

Punto medio: $M_{AB} = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Perpendicular en el punto medio. El vector $\overrightarrow{AB} = (-3, -7) \parallel (3, 7)$ es el vector característico de todas las perpendiculares:

$$3\left(x - \frac{11}{2}\right) + 7\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{3x + 7y - 27 = 0}$$

- Mediatriz de la cuerda $\overline{AC}$.

Punto medio: $M_{AC} = (2, 3)$.

Perpendicular en el punto medio. El vector $\overrightarrow{AC} = (-10, -4) \parallel (5, 2)$ es el vector característico de todas las perpendiculares:

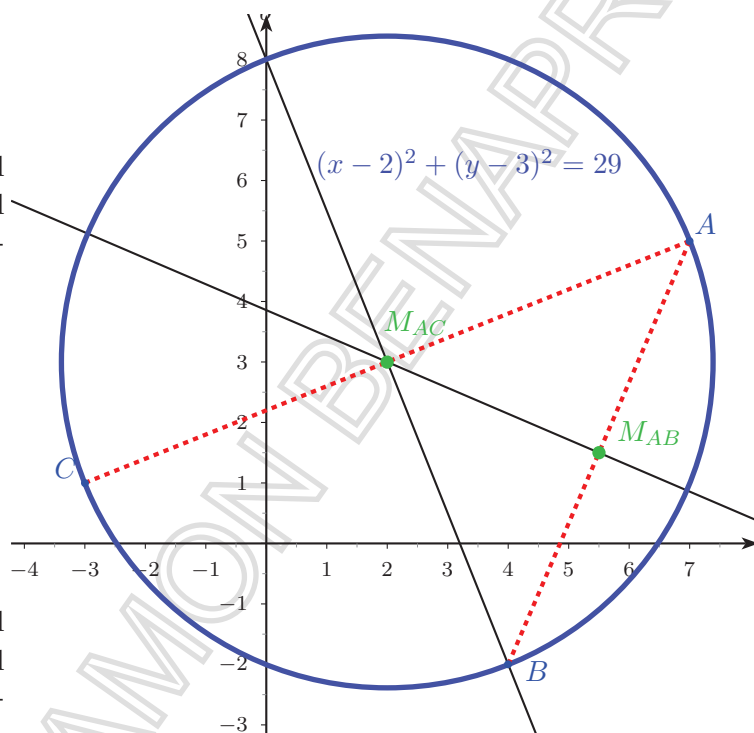
$$5(x - 2) + 2(y - 3) = 0$$

$$\boxed{5x + 2y - 16 = 0}$$

El centro es el punto intersección: $\begin{cases} 3x + 7y - 27 = 0 \\ 5x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Centro } C_e(2, 3)$

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los puntos dados: $R = d(C_e, A) = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

Ecuación de la circunferencia: $\boxed{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 29}$



RAZONAR las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el centro de la circunferencia es el punto medio del segmento $\overline{AC}$?
- ¿Qué triángulo forman los puntos A, B y C ? ¿Por qué?