

- ① (a) Razonar que la ecuación $x^2 + y^2 + 4x = 11y + 12$ es una circunferencia y calcular las coordenadas del centro y el radio.

$$x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0 \xrightarrow{(1)} (x+2)^2 - (2)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = 4 + \frac{121}{4} + 12 \implies \boxed{(x+2)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{185}{4}}$$

La cónica es una circunferencia de centro $C\left(-2, \frac{11}{2}\right)$ y radio $R = +\sqrt{\frac{185}{4}} = \frac{\sqrt{185}}{2}$.

Razonamientos

- (1) Completando cuadrados.
 (b) Representar gráficamente la circunferencia.
 (c) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- Eje de abscisas: $y = 0$

$$(x+2)^2 + \left(0 - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{185}{4} \implies (x+2)^2 = 16$$

$$x+2 = \pm 4 \implies x = -2 \pm 4 \implies \begin{cases} x_1 = 2 \implies (2, 0) \\ x_2 = -6 \implies (-6, 0) \end{cases}$$

- Eje de ordenadas: $x = 0$

$$(0+2)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{185}{4} \implies \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$$

$$y - \frac{11}{2} = \pm \frac{13}{2} \implies y = \frac{11}{2} \pm \frac{13}{2} \implies \begin{cases} y_1 = -1 \implies (0, -1) \\ y_2 = 12 \implies (0, 12) \end{cases}$$

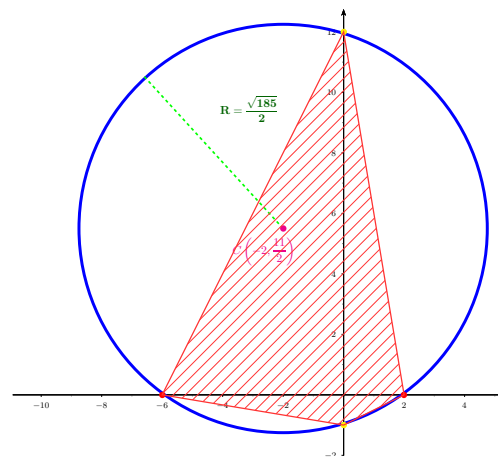
- (d) Calcular la superficie del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de corte con los ejes.

- El cuadrilátero se descompone en CUATRO TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:

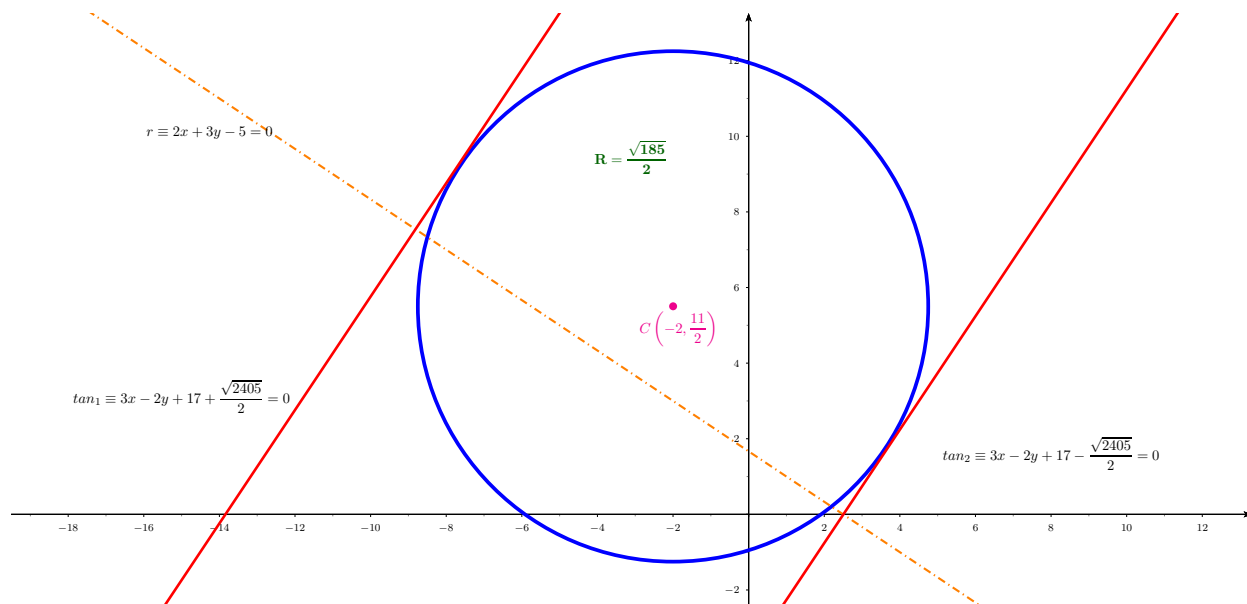
$$S_{\text{cuadrilátero}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{12 \cdot 6}{2} + \frac{12 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} = 52 \text{ u}^2$$

- El cuadrilátero se descompone en DOS TRIÁNGULOS:

$$S_{\text{cuadrilátero}} = S_1 + S_2 = \frac{8 \cdot 1}{2} + \frac{12 \cdot 8}{2} = 4 + 48 = 52 \text{ u}^2$$



- (e) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia que son perpendiculares a la recta de ecuación $r \equiv 2x + 3y - 5 = 0$.



- Condición de perpendicularidad entre rectas: $r \perp s \iff \vec{n}_r = (2, 3) \perp \vec{n}_s \implies \vec{n}_s = (3, -2)$.
- Haz de rectas perpendiculares: $3x - 2y + k = 0 \forall k \in \mathbb{R}$.
- Condición de recta tangente a la circunferencia: $d(C, \text{tangente}) = \text{Radio de la circunferencia}$:

$$d(C, \text{tangente}) = R \implies \frac{|3 \cdot (-2) - 2 \cdot \frac{11}{2} + k|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{185}}{2} \implies |-6 - 11 + k| = \frac{\sqrt{185} \cdot \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} -17 + k = \frac{\sqrt{2405}}{2} \implies k = 17 + \frac{\sqrt{2405}}{2} \\ -17 + k = -\frac{\sqrt{2405}}{2} \implies k = 17 - \frac{\sqrt{2405}}{2} \end{cases}$$

- Las ecuaciones de las recta tangentes son:

$$\boxed{\begin{aligned} \tan_1 &\equiv 3x - 2y + 17 + \frac{\sqrt{2405}}{2} = 0 \\ \tan_2 &\equiv 3x - 2y + 17 - \frac{\sqrt{2405}}{2} = 0 \end{aligned}}$$