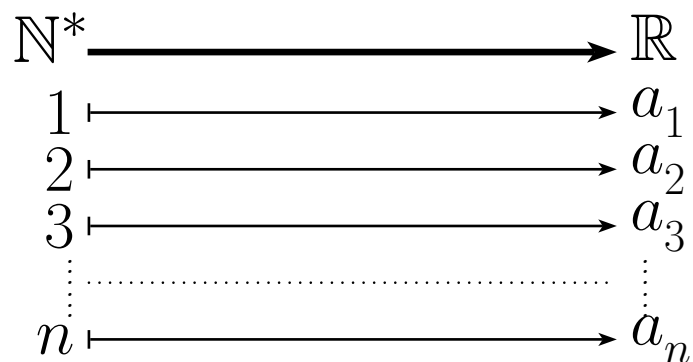


Definición 7.1 (Sucesión de números reales) Se llama sucesión de números reales, a un aplicación del conjunto $\mathbb{N}^*$ (números naturales excluido el cero) en el conjunto $\mathbb{R}$ (números reales):



Generalmente se representa la sucesión por sus imágenes:

$$\left(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \right) = \left(a_n \right)$$

Definición 7.2 (Términos de una sucesión) Cada uno de los elementos de la sucesión (a_n) recibe el nombre de término de la sucesión.

a_1 primer término de la sucesión

a_2 segundo término de la sucesión

a_3 tercer término de la sucesión

$\vdots$

a_n **término n -ésimo de la sucesión o término general**

7.1. Determinación de una sucesión

Una sucesión viene determinada por:

- Por el término general a_n .

Ejemplos

1. La sucesión de término general $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Los primeros términos son:

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2}; \quad a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2 + 1} = \frac{7}{3}; \quad a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3 + 1} = \frac{9}{4}; \dots$$

2. La sucesión de término general $a_n = \frac{4}{3^n}$

$$a_1 = \frac{4}{3^1} = \frac{4}{3}; \quad a_2 = \frac{4}{3^2} = \frac{4}{9}; \quad a_3 = \frac{4}{3^3} = \frac{4}{27}; \dots$$

3. La sucesión de término general $a_n = (-1)^n \cdot n$

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 = -1; \quad a_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2; \quad a_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3; \dots$$

- Por una propiedad característica.

Ejemplos

1. Sucesión de los números pares:

$$(a_n) = (2, 4, 6, 8, \dots) \implies a_n = 2n$$

2. Sucesión de los números impares:

$$(a_n) = (1, 3, 5, 7, \dots) \implies a_n = 2n - 1$$

3. Sucesión de los inversos de los cuadrados de los números naturales:

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right) \implies a_n = \frac{1}{n^2}$$

- Por una ley de recurrencia. Cada término se obtiene del anterior (o anteriores) según la ley enunciada.

Ejemplos

1. Sucesión (a_n) siendo $a_1 = 3$ y cada término es igual al doble del anterior menos 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 2 \cdot a_1 - 4 = 6 - 4 = 2, a_3 = 2 \cdot a_2 - 4 = 4 - 4 = 0, a_4 = 2 \cdot a_3 - 4 = 2 \cdot 0 - 4 = -4, \dots$$

$$(a_n) = (3, 2, 0, -4, \dots, \boxed{a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 4}, \dots)$$

2. Sucesión (a_n) siendo $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y cada término es igual a la suma de los dos anteriores (sucesión de Fibonacci).

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2, a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3, a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 8, a_7 = a_5 + a_6 = 13, \dots$$

$$(a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, \boxed{a_n = a_{n-2} + a_{n-1}}, \dots)$$

7.2. Cálculo del término general

Si de una sucesión conocemos los primeros términos no significa que se puede determinar el término general unívocamente.

Ejemplo

Sea $(1, 3, 5, 7, \dots)$ entonces la solución no es única:

$$1. (1, 3, 5, 7, 8, 8, 8, 8, 8, \dots) \Rightarrow a_n = \begin{cases} 1, 2, 5, 7 & \text{si } n = 1, 2, 3, 4 \\ 8 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

$$2. (1, 3, 5, 7, 32, 64, 128, 256, \dots) \Rightarrow a_n = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } 1 \leq n \leq 4 \\ 2^n & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

$$3. (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots) \Rightarrow a_n = 2n - 1, \forall n$$

Es muy útil hallar el término general de una sucesión de un conjunto ordenado de números.

Casos particulares

Progresiones aritméticas: Cada término de la sucesión es igual al anterior **MÁS** una constante (diferencia de la progresión (d)), entonces el término general de la sucesión es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, \quad \forall n$$

Ejemplo

Hallar el término general de la sucesión $(a_n) = (-8, -5, 2, 1, 4, 7, 10, \dots)$:

- Cada término se obtiene del anterior sumándole $d = 3$, es una progresión aritmética.
- El término general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -8 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 11, \quad \forall n$

Progresiones geométricas: Cada término de la sucesión es igual al anterior **POR** una constante (razón de la progresión (r)), entonces el término general de la sucesión es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad \forall n$$

Ejemplo

Hallar el término general de la sucesión $(a_n) = (3, 2, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots)$:

- Cada término se obtiene del anterior multiplicando por $r = \frac{2}{3}$, es una progresión geométrica.
- El término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \forall n$

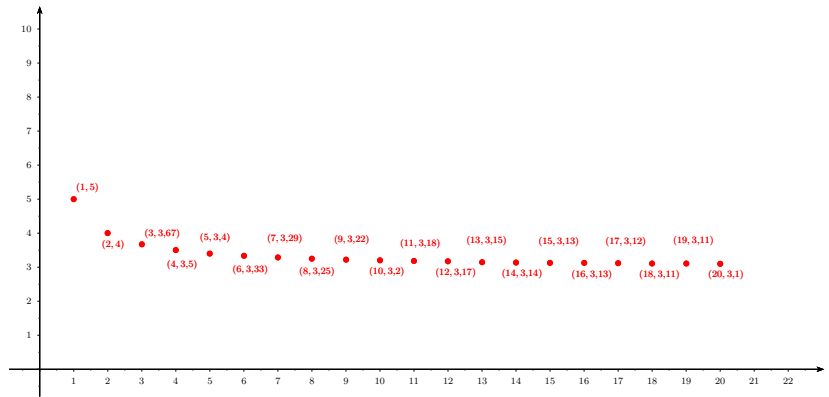
7.3. Representación de una sucesión

Coordenadas cartesianas. Por definición de sucesión como aplicación se puede representar en el plano cartesiano, pares de puntos ordenados $P(n, a_n)$, $\forall n$.

Ejemplos

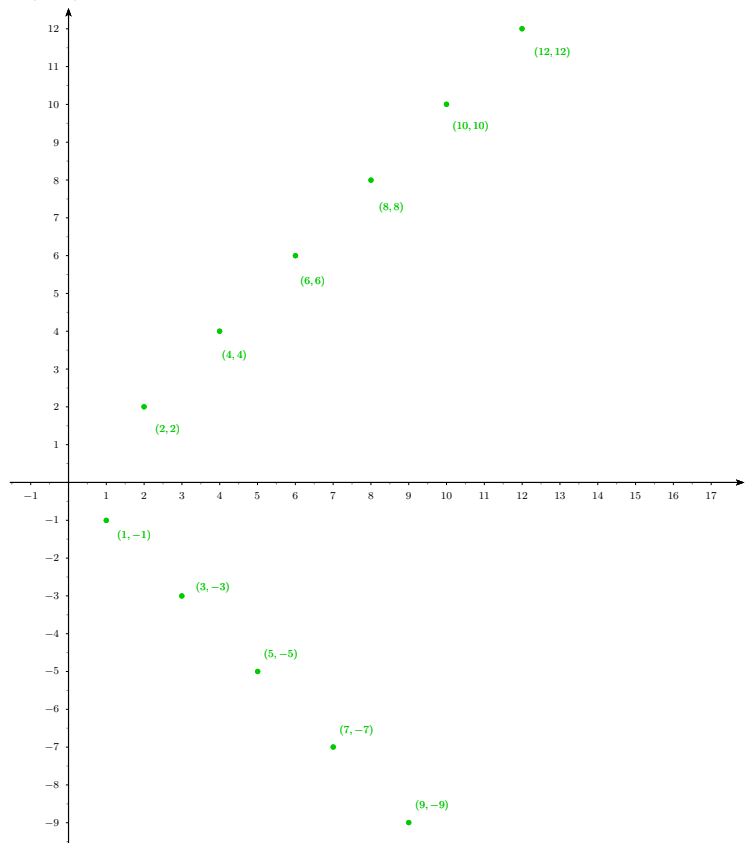
1. Sucesión de término general $a_n = \frac{3n+2}{n}$

n	a_n
1	$a_1 = 5$
2	$a_2 = 4$
3	$a_3 = \frac{11}{3}$
4	$a_4 = \frac{14}{4}$
5	$a_5 = \frac{17}{5}$
6	$a_6 = \frac{20}{6}$
$\vdots$	$\vdots$



2. Sucesión de término general $a_n = (-1)^n \cdot n$

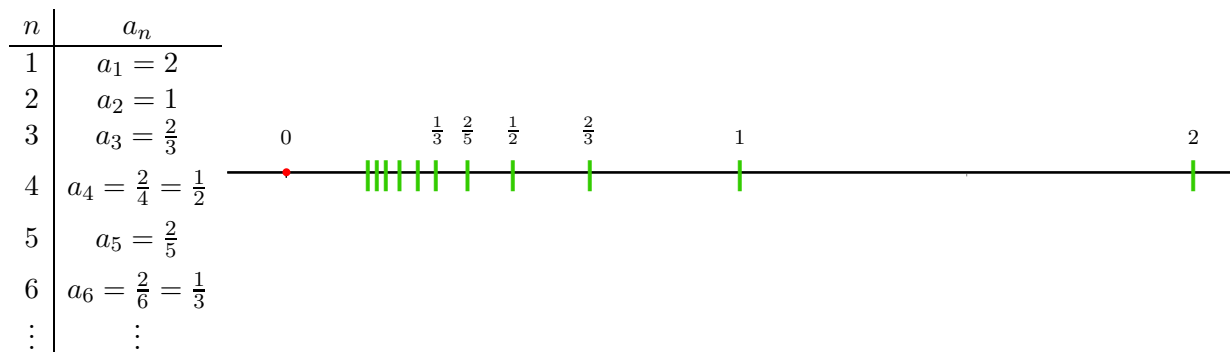
n	a_n
1	$a_1 = -1$
2	$a_2 = 2$
3	$a_3 = -3$
4	$a_4 = 4$
5	$a_5 = -5$
6	$a_6 = 6$
$\vdots$	$\vdots$



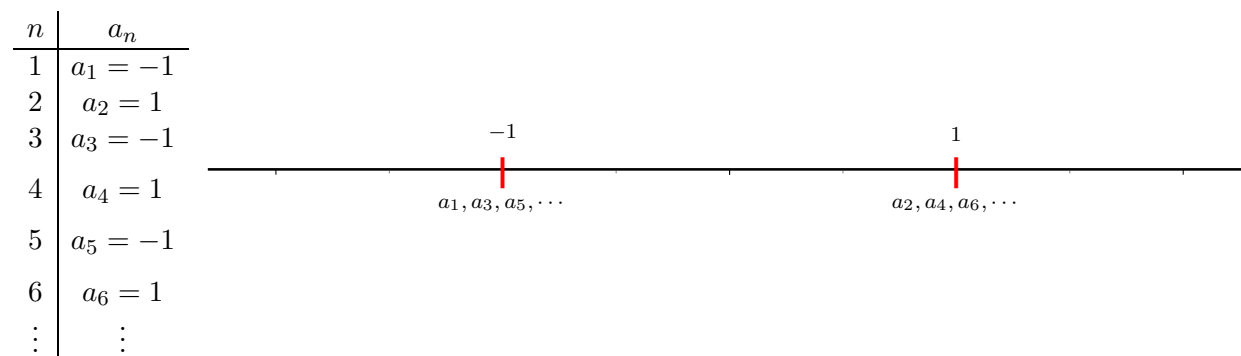
Representación en diagrama lineal. La representación de la sucesión (a_n) sobre la recta real.

Ejemplos

1. Sucesión de término general $a_n = \frac{2}{n}$.



2. Sucesión de término general $a_n = (-1)^n$.



Definición 7.3 (Igualdad de sucesiones) Dos sucesiones (a_n) y b_n son iguales, se escribe $(a_n) = (b_n)$, si se cumple que $a_j = b_j$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

7.4. Operaciones con sucesiones

7.4.1. Suma de sucesiones

Definición 7.4 Sean las sucesiones (a_n) y (b_n) , se llama suma de sucesiones, se escribe $(a_n) + (b_n)$, a la sucesión de término general $a_n + b_n$.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots); \quad (b_n) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots)$$

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $(a_n) = 2n - 1$ y $(b_n) = \frac{3n^2 + 2}{2n + 1}$, definir la sucesión suma.

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = \left(2n - 1 + \frac{3n^2 + 2}{2n + 1}\right) = \left(\frac{(2n - 1)(2n + 1) + 3n^2 + 2}{2n + 1}\right) =$$

$$= \left(\frac{4n^2 - 1 + 3n^2 + 2}{2n + 1}\right) = \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1}\right)$$

7.4.2. Propiedades de la suma de sucesiones

- Asociativa: $\left[(a_n) + (b_n)\right] + (c_n) = (a_n) + \left[(b_n) + (c_n)\right]$.
- Conmutativa: $(a_n) + (b_n) = (b_n) + (a_n)$.
- Elemento neutro. Se llama sucesión cero y se escribe (0) la sucesión que tiene todos sus términos nulos:

$$(0) = (0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \text{ entonces } (a_n) + (0) = (a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Elemento opuesto. Se llama sucesión opuesta de (a_n) y se escribe $-(a_n)$ la sucesión cuyo término general es $(-a_n)$. Entonces:

$$(a_n) + (-a_n) = [a_n + (-a_n)] = (0)$$

Las propiedades anteriores se demuestran por las propiedades de la suma de números reales y la igualdad de sucesiones.

La existencia del elemento opuesto en la suma permite efectuar la definición de sustracción.

7.4.3. Sustracción de sucesiones

Definición 7.5 Sean las sucesiones (a_n) y (b_n) , se llama sustracción de sucesiones, se escribe $(a_n) - (b_n)$, a la suma de la sucesión (a_n) con la opuesta de la sucesión (b_n) .

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots); \quad (b_n) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots)$$

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4, \dots, a_n - b_n, \dots)$$

7.4.4. Producto de sucesiones

Definición 7.6 Sean las sucesiones (a_n) y (b_n) , se llama producto de sucesiones, se escribe $(a_n) \cdot (b_n)$, a la sucesión de término general $a_n \cdot b_n$.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots); \quad (b_n) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots)$$

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4, \dots, a_n \cdot b_n, \dots)$$

7.4.5. Propiedades del producto de sucesiones

- Asociativa: $\left[(a_n) \cdot (b_n)\right] \cdot (c_n) = (a_n) \cdot \left[(b_n) \cdot (c_n)\right]$.
- Conmutativa: $(a_n) \cdot (b_n) = (b_n) \cdot (a_n)$.
- Elemento unidad. Se llama sucesión uno y se escribe (1) la sucesión que tiene todos sus términos son la unidad:

$$(1) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \text{ entonces } (a_n) \cdot (1) = (a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Elemento inverso. Sucesiones inversibles.

Una sucesión (a_n) posee inversa (es inversible) si $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Entonces

Si llama sucesión inversa de (a_n) y se escribe $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{1}{a_n}\right)$. Entonces:

$$(a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right) = \left[a_n \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)\right] = (1)$$

Distributiva del producto respecto de la suma

Dadas las sucesiones (a_n) , (b_n) y (c_n) se cumple

$$(a_n) \cdot [(b_n) + (c_n)] = (a_n) \cdot (b_n) + (a_n) \cdot (c_n)$$

Definición 7.7 (Cociente de sucesiones) Si (b_n) es una sucesión inversible, se llama cociente de la sucesión (a_n) y (b_n) y se denota: $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ al producto de la sucesión (a_n) POR la sucesión inversa de (b_n) .

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots); \quad (b_n) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots) \quad b_j \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots\right)$$

Definición 7.8 (Producto de un número real por una sucesión) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y (a_n) una sucesión. Se llama producto del número real por la sucesión y se denota por $\alpha \cdot (a_n)$ a la sucesión de término general $\alpha \cdot a_n$.

$$\alpha \cdot (a_n) = (\alpha a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots, \alpha a_n, \dots)$$

7.4.6. Propiedades del producto de número real por una sucesión

- Distributiva respecto la suma de sucesiones: $\alpha [(a_n) + (b_n)] = \alpha(a_n) + \alpha(b_n)$.
- Distributiva respecto la suma de números reales: $(\alpha + \beta)(a_n) = \alpha(a_n) + \beta(a_n)$.
- Asociativa respecto el producto de números reales: $(\alpha \cdot \beta)(a_n) = \alpha(\beta a_n)$.
- Elemento unidad: $1 \cdot (a_n) = (a_n)$.

7.5. Sucesiones monótonas

Definición 7.9 La sucesión (a_n) de números reales es una sucesión:

$$\begin{cases} \text{creciente} \\ \text{estrictamente creciente} \\ \text{decreciente} \\ \text{estrictamente decreciente} \end{cases} \quad \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ se verifica } \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n \geq 0 \\ a_n < a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n > 0 \\ a_n \geq a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n \leq 0 \\ a_n > a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. Estudiar la monotonía de la sucesión de término general $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \boxed{a_{n+1} - a_n} &= \frac{2(n+1)+1}{n+1+1} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} \stackrel{(1)}{=} \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{2n^2 + 5n + 3 - (2n^2 + 5n + 2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{\cancel{2n^2} + 5\cancel{n} + 3 - \cancel{2n^2} - 5\cancel{n} - 2}{(n+2)(n+1)} = \boxed{\frac{1}{(n+2)(n+1)}} \end{aligned}$$

La diferencia $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \boxed{> 0} \forall n \in \mathbb{N}^*$ entonces la sucesión $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ es **estrictamente creciente**.

(1) Suma de fracciones. El m.c.m. de los denominadores es $(n+2) \cdot (n+1)$

2. Estudiar la monotonía de la sucesión de término general $a_n = \frac{n+3}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \boxed{a_{n+1} - a_n} &= \frac{n+1+3}{(n+1)^2} - \frac{n+2}{n^2} = \frac{n+4}{(n+1)^2} - \frac{n+3}{n^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{n^2(n+4) - (n+3)(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{n^3 + 4n^2 - (n+3)(n^2 + 2n + 1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^3} + 4n^2 - \cancel{n^3} - 2n^2 - n - 3n^2 - 6n - 3}{n^2(n+1)^2} = \\ &= \frac{-n^2 - 7n - 3}{n^2(n+1)^2} = \boxed{-\frac{n^2 + 7n + 3}{n^2(n+1)^2}} \end{aligned}$$

La diferencia $a_{n+1} - a_n = \boxed{-\frac{n^2 + 7n + 3}{n^2(n+1)^2}} \boxed{< 0} \forall n \in \mathbb{N}^*$ entonces la sucesión $\left(\frac{n+3}{n^2}\right)$ es **estrictamente decreciente**.

(1) Suma de fracciones. El m.c.m. de los denominadores es $(n+1)^2 \cdot n^2$

Definición 7.10 (Sucesiones constantes) La sucesión (a_n) es constante si es simultáneamente creciente y decreciente.

$$(a_n) \text{ es constante} \iff \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

7.6. Sucesiones acotadas

7.6.1. Sucesiones acotadas superiormente

Definición 7.11 (Sucesión acotada superiormente) La sucesión de números reales (a_n) está acotada superiormente, si existe un número real k tal que $a_n \leq k, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Definición 7.12 (Cota superior) Si la sucesión (a_n) está acotada superiormente por $k \in \mathbb{R}$ entonces k es **UNA** cota superior de la sucesión.

7.6.2. Sucesiones acotadas inferiormente

Definición 7.13 (Sucesión acotada inferiormente) La sucesión de números reales (a_n) está acotada inferiormente, si existe un número real k' tal que $a_n \geq k', \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Definición 7.14 (Cota inferior) Si la sucesión (a_n) está acotada inferiormente por $k' \in \mathbb{R}$ entonces k' es **UNA** cota inferior de la sucesión.

7.6.3. Sucesiones acotadas

Definición 7.15 (Sucesión acotada) La sucesión de números reales (a_n) está acotada si está acotada superior e inferiormente.

Es equivalente a decir que existen $k, k' \in \mathbb{R}$ tal que $k' \leq a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ejemplos

1. Demostrar que $k = 3$ es una cota superior de la sucesión de término general $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

Por la definición de sucesión acotada superiormente, $a_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \iff a_n - 3 \leq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2n+3}{n+1} - 3 = \frac{2n+3-3(n+1)}{n+1} = \frac{2n+3-3n-3}{n+1} = \boxed{-\frac{n}{n+1}} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} > 0 \implies \boxed{a_n - 3 \leq 0}$$

La sucesión está acotada superiormente.

2. Demostrar que $k = 2$ es una cota inferior de la sucesión de término general $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

Por la definición de sucesión acotada inferiormente, $a_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \iff a_n - 2 \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2n+3}{n+1} - 2 = \frac{2n+3-2(n+1)}{n+1} = \frac{2n+3-2n-2}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n+1}} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} > 0 \implies \boxed{a_n - 2 \geq 0}$$

La sucesión está acotada inferiormente.

3. La sucesión $\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$ está ACOTADA. Efectivamente: $\boxed{2 \leq \frac{2n+3}{n+1} \leq 3}$

Ejercicios

1. Demostrar que si k es una cota superior de la sucesión (a_n) entonces cualquier $k' > k$ es también una cota superior de la sucesión.
2. Demostrar que si k es una cota inferior de la sucesión (a_n) entonces cualquier $k' < k$ es también una cota inferior de la sucesión.