

① Hallar, razonadamente, el término general de las sucesiones:

a) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{15}, \dots$

b) $\frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{-1}{4 \cdot 5}, \frac{-4}{5 \cdot 6}, \frac{-7}{6 \cdot 7}, \dots$

- a) La sucesión es alternada, los signos $+$ y $-$ se alternan. Los términos impares, $\{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ son POSITIVOS y los pares, $\{a_2, a_4, a_6, \dots\}$ son NEGATIVOS entonces $(-1)^{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
Los denominadores de las fracciones $3, 7, 11, 15, \dots$ son los términos de una progresión aritmética de diferencia $d = 4$, el término general de la progresión $b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$.

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{4n - 1} \forall n \in \mathbb{N}$

- b) El término general es el cociente de dos sucesiones $a_n = \frac{b_n}{c_n}$.
- Sucesión del numerador: $(b_n) = (2, -1, -4, -7, \dots)$, progresión aritmética de diferencia, $d = -3$, su término general $b_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = 5 - 3n$.
 - Sucesión del denominador: $(c_n) = (3 \cdot 4, 4 \cdot 5, 5 \cdot 6, \dots)$:
primer factor progresión aritmética de diferencia 1 y su primer término es 3 entonces, $n + 2$
segundo factor progresión aritmética de diferencia 1 y su primer término es 4 entonces, $n + 3$
El término general es $c_n = (n + 2) \cdot (n + 3) \forall n \in \mathbb{N}$

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{5 - 3n}{(n + 2)(n + 3)} \forall n \in \mathbb{N}$

② Sea la sucesión de término general $a_n = \frac{3n+5}{2n+7}$:

- a) Demostrar que la sucesión es creciente.
- b) Razonar si $k = 1$ es cota inferior de la sucesión.
- c) Razonar si $k = 3$ es cota superior de la sucesión.

a) La sucesión (a_n) es creciente si $a_{n+1} \geq a_n \iff a_{n+1} - a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)+5}{2(n+1)+7} - \frac{3n+5}{2n+7} = \frac{3n+8}{2n+9} - \frac{3n+5}{2n+7} = \frac{(3n+8)(2n+7) - (3n+5)(2n+9)}{(2n+9)(2n+7)} = \\ &= \frac{11}{(2n+9)(2n+7)} \end{aligned}$$

El numerador y el denominador son siempre positivos, $(2n+9) \cdot (2n+7) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

La sucesión (a_n) es estrictamente creciente

b) $k = 1$ será cota inferior de la sucesión si $a_n \geq 1 \iff a_n - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - 1 = \frac{3n+5}{2n+7} - 1 = \frac{3n+5-2n-7}{2n+7} = \frac{n-2}{2n+7}$$

Si $n = 1$ entonces $\frac{n-2}{2n+7} = -\frac{1}{9} < 0$

$k = 1$ NO es COTA INFERIOR de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n+5}{2n+7}$

c) $k = 3$ será cota superior de la sucesión si $a_n \leq 3 \iff a_n - 3 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - 3 = \frac{3n+5}{2n+7} - 3 = \frac{3n+5-6n-21}{2n+7} = \frac{-3n-16}{2n+7} = \boxed{-} \frac{3n+16}{2n+7}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $a_n - 3 < 0$

$k = 3$ ES UNA COTA SUPERIOR de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n+5}{2n+7}$

La sucesión, (a_n) , es estrictamente creciente y está acotada superiormente.