

① Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones cuyo término general es:

a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto a_n = (-1)^n(n^2 + n)$$

$$1 \mapsto a_1 = -2$$

$$2 \mapsto a_2 = 6$$

$$3 \mapsto a_3 = 12$$

$$4 \mapsto a_4 = 20$$

c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto a_n = \frac{2}{3}(n-1)^2$$

$$1 \mapsto a_1 = 0$$

$$2 \mapsto a_2 = \frac{2}{3}$$

$$3 \mapsto a_3 = \frac{8}{3}$$

$$4 \mapsto a_4 = 6$$

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto a_n = \frac{2n+1}{3n}$$

$$1 \mapsto a_1 = \frac{1}{3}$$

$$2 \mapsto a_2 = \frac{5}{6}$$

$$3 \mapsto a_3 = \frac{7}{9}$$

$$4 \mapsto a_4 = \frac{9}{12}$$

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ -1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$1 \mapsto a_1 = -1$$

$$2 \mapsto a_2 = 0$$

$$3 \mapsto a_3 = -1$$

$$4 \mapsto a_4 = 0$$

② Hallar el término general de las sucesiones:

a) 4, 7, 10, 13, 16, ... Progresión aritmética de diferencia $d = 3$ y $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3n + 1$

b) $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots$ Cociente de dos progresiones aritméticas de diferencias: 2, 1, aplicando la fórmula para calcular el término general: $a_n = \frac{2n+1}{n}$

c) 1, -3, 5, -7, 9, -11, ... En valor absoluto es una progresión aritmética de diferencia, $d = 2$. Los términos impares, negativos y los pares, positivos: $a_n = (-1)^{n+1}(2n-1)$

d) 6, 8, 10, 12, 14, ... es una progresión aritmética de diferencia, $d = 2$, $a_n = 2(n+2)$.

e) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \dots$ Los numeradores son los cuadrados de los números naturales y los denominadores las potencias de base 2: $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

③ Sea la sucesión de término general $a_n = \frac{3n+2}{2n+1}$:

a) Demostrar que la sucesión es estrictamente decreciente.

Definición de estrictamente decreciente: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)+1} - \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{(3n+5)(2n+1) - (3n+2)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{\cancel{6n^2+13n+5} - \cancel{6n^2+13n-6}}{(2n+3)(2n+1)} = \\ &= \boxed{\frac{-1}{(2n+3)(2n+1)}} \end{aligned}$$

El cociente $\frac{-1}{(2n+3)(2n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. La sucesión (a_n) es **estrictamente decreciente**.

b) Razonar si $k = \frac{3}{4}$ y $k = 1$ son cotas inferiores de la sucesión.

Definición de cota inferior:

$k \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de la sucesión (a_n) si $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple $k < a_n \iff \boxed{a_n - k > 0}$.

$$\begin{aligned} a_n - \frac{3}{4} &= \frac{3n+2}{2n+1} - \frac{3}{4} = \frac{12n+8-6n-3}{4(2n+1)} = \frac{6n+5}{4(2n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n - 1 &= \frac{3n+2}{2n+1} - 1 = \frac{3n+2-2n-1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Entonces $k = \frac{3}{4}$ y $k = 1$ son dos cotas inferiores de la sucesión.

c) ¿Se puede afirmar que existe $\lim_n a_n$? Razonar la respuesta.

La sucesión de término general $a_n = \frac{3n+2}{2n+1}$ verifica las dos condiciones:

■ Es estrictamente decreciente.

■ Está acotada inferiormente.

Se puede afirmar que $\boxed{\exists \lim_n a_n}$.