

Definición 2.1 (Producto cartesiano de conjuntos). Sean A y B dos conjuntos, no vacíos, cualesquiera, se llama producto cartesiano de A por B y se denota $A \times B$, al conjunto de **todos los pares ordenados** (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$ entonces:

$$A \times A = A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times B = B^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Representación gráfica

El producto cartesiano de dos conjuntos se representa en los ejes de coordenadas cartesianas:

- En el eje de abscisas los elementos del primer conjunto (A).
- En el eje de ordenadas los elementos del segundo conjunto (B).

El conjunto de los puntos del plano recibe el nombre de **grafo** del producto cartesiano.

Los grafos de los ejemplos anteriores son (figuras 2.1 y 2.2):

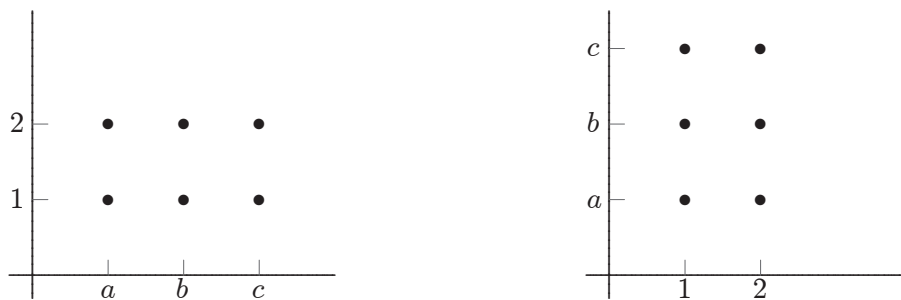


Figura 2.1: Grafo de los productos cartesiano $A \times B$ y $B \times A$

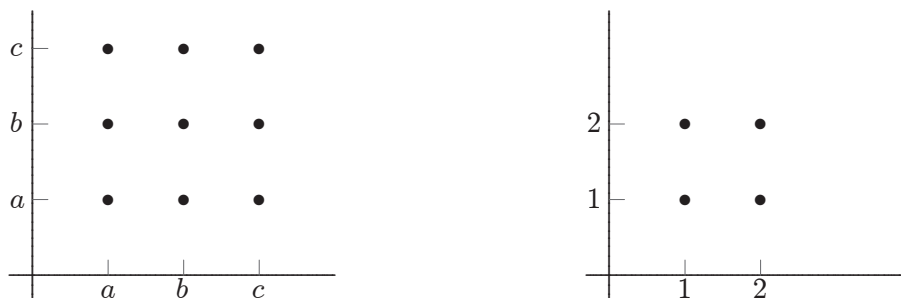


Figura 2.2: Grafo de los productos cartesiano $A \times A$ y $B \times B$

Definición 2.2 (Cardinal de un conjunto). Sea A un conjunto. se llama cardinal de A y se denota $\text{card}(A)$, al número de elementos del conjunto A

Ejemplo: Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$ entonces:

- | | |
|---|---|
| • $\text{card}(A) = 3$ | • $\text{card}(A \times A) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(A) = 9$ |
| • $\text{card}(B) = 2$ | • $\text{card}(B \times A) = \text{card}(B) \cdot \text{card}(A) = 6$ |
| • $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B) = 6$ | • $\text{card}(B \times B) = \text{card}(B) \cdot \text{card}(B) = 4$ |
-

Definición 2.3 (Correspondencia). Se llama correspondencia entre dos conjuntos A y B y se denota con la letra f , a cualquier subconjunto, no vacío, del producto cartesiano de $A \times B$.

La correspondencia **asocia** elementos del conjunto A con elementos del conjunto B

$$\boxed{f : A \longrightarrow B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{f} B}$$

NOMENCLATURA

- El conjunto A recibe el nombre de conjunto inicial de la correspondencia.
- El conjunto B recibe el nombre de conjunto final de la correspondencia.
- Si el par (a, b) pertenece a la correspondencia entonces:
 - a es el elemento origen de b
 - b es la imagen de a por f y se denota $f(a) = b$

Definición 2.4 (Aplicación entre conjuntos). *Dados dos conjuntos A y B , se llama **aplicación** entre A y B a toda correspondencia de A en B tal que:*

TODOS los elementos de A tienen **UNA Y SÓLO** una imagen en B .

Ejemplo: Razonar si las siguientes correspondencias entre los conjuntos A y B son aplicaciones.

Ejemplo 1: $G = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2)\}$

NO es una aplicación. El elemento a tiene dos imágenes: 1 y 2

Ejemplo 2: $G = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

SÍ es una aplicación. Todos los elementos de A tienen una y sólo una imagen. En este ejemplo: $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ y $f(c) = 1$.

Ejemplo 3: $G = \{(a, 1), (b, 2)\}$

NO es una aplicación. El elemento $c \in A$, NO tiene imagen.

Ejercicio: RAZONAR la siguiente afirmación :

Toda aplicación entre conjuntos es una correspondencia. El recíproco, en general, no es cierto

Clases de aplicaciones

Definición 2.5 (Aplicación inyectiva). La aplicación $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva si

$$a \longmapsto f(a) = b$$
 elementos distintos de A tienen distinta imagen.

$$f \text{ es inyectiva} \iff a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Es equivalente a:

$$f \text{ es inyectiva} \iff f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \quad (2.1)$$

(elementos que tengan la misma imagen, deben ser iguales)

Una condición necesaria, no suficiente, para que una aplicación sea inyectiva es:

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B) \quad \text{¿Por qué?}$$

Definición 2.6 (Aplicación exhaustiva o suprayectiva). La aplicación $f : A \longrightarrow B$ es

$$a \longmapsto f(a) = b$$
 suprayectiva si **TODOS** los elementos del conjunto final (B) tienen, al menos, una antiimagen.

$$f \text{ es suprayectiva} \iff \forall b \in B \quad \text{existe, al menos, un } a \in A \quad \text{tal que } f(a) = b$$

Una condición necesaria, no suficiente, para que una aplicación sea exhaustiva es:

$$\text{card}(A) \geq \text{card}(B) \quad \text{¿Por qué?}$$

Definición 2.7 (Aplicación biyectiva). La aplicación $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si es simultáneamente, inyectiva y exhaustiva

$$\begin{array}{ccc} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f(a) = b \end{array}$$

Una condición necesaria, no suficiente, para que una aplicación sea biyectiva es:

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) \quad \text{¿Por qué?}$$

Definición 2.8 (Función). Una función es una aplicación entre conjuntos numéricos.

Ejemplo:

Ejem. 1: Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n^2$. También se escribe:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array}$$

Ejem. 2: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ n & \longmapsto & 2 \cdot n \end{array}$$

Ejem. 3: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ x & \longmapsto & 3x + 2 \end{array}$$

Ejem. 4: $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ **NO ES FUNCIÓN.** ¿Por qué?

$$\begin{array}{ccc} & & \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Ejem. 5: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **NO ES FUNCIÓN.** ¿Por qué?

$$\begin{array}{ccc} & & \\ x & \longmapsto & +\sqrt{x} \end{array}$$

Definición 2.9 (Función real de variable real). Las aplicaciones tales que el conjunto inicial y final es el conjunto o un subconjunto de $\mathbb{R}$ reciben el nombre de función real de variable real.

Elementos de una función

Si $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{array}{ccc} & & \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

- x es la variable INDEPENDIENTE.
- $y = f(x)$ es la variable DEPENDIENTE.

Definición 2.10 (Dominio de una función). Se llama **dominio** de una función al subconjunto, no vacío, del conjunto inicial formado por los elementos que tienen imagen. Se denota por D_f .

Definición 2.11 (Imagen o recorrido de una función). Se llama **imagen (recorrido)** de una función al subconjunto, no vacío, del conjunto final formado por los elementos que tienen, al menos, una antiimagen. Se denota por $\text{Im}f$

2.1 Dominios de funciones

Para calcular los dominios de las funciones hay que aplicar la definición de función. Encontrar qué **números reales tienen imagen real**. Es conveniente repasar los siguientes conceptos:

- Definición de los conjuntos numéricos. Intervalos en la recta real.
- Identidades notables.
- Raíz o cero de un polinomio. Resolver ecuaciones.
- Regla de Ruffini. Factorizar polinomios.
- Resolver inecuaciones.

2.1.1 Funciones polinómicas

Sea $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, es decir un polinomio de grado menor o igual que n con coeficientes reales. El valor numérico de un polinomio es siempre un número real. Por lo tanto todos los números reales tienen imagen real. El dominio máximo de una función polinómica es $\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = P(x) \end{array}}$$

2.1.2 Fracciones algebraicas

Si la función viene expresada por una fracción algebraica $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, recordar que el valor numérico de una fracción algebraica es un número real **excepto cuando se anule el denominador** (NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO)

$$\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ entonces } D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}}$$

Ejemplo: Hallar el dominio máximo de la función: $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

La función es una fracción algebraica, por lo tanto:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\} \stackrel{(*)}{=} \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$$

(*) Las raíces reales de la ecuación $x^2 - 4 = 0$, son $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x+3}{x^2-4} \end{array}}$$

2.1.3 Funciones irracionales

La función dada es de la forma: $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$

- Si el índice (n) del radical es PAR, entonces la imagen es real si y sólo si: $P(x) \geq 0$. Por definición de aplicación, la imagen (raíz de índice par) deberá llevar sólo un signo: positivo (+) o negativo (-). Si no se pone signo se supone que las imágenes son todas positivas o cero.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \geq 0\}$$

(Concepto asociado: resolver inecuaciones)

- Si el índice (n) del radical es IMPAR, entonces la imagen es siempre un número real.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Ejemplos: Hallar los dominios máximos de las funciones:

(1) $f(x) = +\sqrt{x+3}$

Índice par ($n = 2$) $\implies D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\} \stackrel{(*)}{=} [-3, +\infty)$

(*) $x+3 \geq 0 \implies x \geq -3 \implies x \in [-3, +\infty)$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f : [-3, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = +\sqrt{x+3} \end{array}}$$

$$(2) f(x) = -\sqrt[4]{3x - x^2}$$

Índice par ($n = 4$) $\implies D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - x^2 \geq 0\} \stackrel{(*)}{=} [0, 3]$

(*) $3x - x^2 \geq 0$ Es una inecuación de grado dos. En primer lugar calculamos, si hay, los ceros reales del polinomio: $P(x) = 3x - x^2 = 0$, $x = 0$ y $x = 3$. Factorizamos el polinomio $P(x) = -x \cdot (x - 3)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 P(x) = -x \cdot (x - 3) & & - & & 0 & & + & & 0 & & - \\
 \hline
 & & x < 0 & & 0 & & 0 < x < 3 & & 3 & & x > 3
 \end{array}$$

$$\boxed{
 \begin{array}{lcl}
 f : [0, 3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \longmapsto & f(x) = -\sqrt[4]{3x - x^2}
 \end{array}
 }$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

Índice impar ($n = 3$) $\implies D_f = \mathbb{R}$

(4) ¿Cuáles son los recorridos de las funciones de los ejercicios anteriores? ¿Por qué?

NOTA

Para **definir una función** son necesarias dos condiciones:

- (1) Dominio de la función (D_f).
- (2) Establecer la relación que existe entre las variables independiente y dependiente ($y = f(x)$).

Una función $y = f(x)$ puede tener infinitos dominios. Cuando se pregunta, *hallar el dominio de la función*, hay que calcular su dominio MÁXIMO.

Definición 2.12 (Igualdad de funciones). Dos funciones $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ son iguales si y sólo si:

$$\begin{array}{lcl}
 g : D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 x & \longmapsto & g(x)
 \end{array}$$

- Sus dominios son iguales: $D_f = D_g$.
- $\forall x \in D_f = D_g \implies f(x) = g(x)$

Ejemplo: Las funciones $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$, ¿son iguales?

Sus dominios son: $D_f = \mathbb{R}$ y

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Los dominios son distintos, por lo tanto las funciones NO SON IGUALES.

2.2 Gráficas de funciones

Definición 2.13 (Grafo de una función). Se llama grafo de una función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, a cualquier subconjunto del producto cartesiano $D_f \times \mathbb{R}$, se denota: G_f .

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

En un sistema de coordenadas cartesianas se pueden representar los pares de puntos del grafo. La figura que resulta de unir *suavemente* los puntos representados recibe el nombre de **gráfica** de la función.

Gráficas de funciones elementales

Gráfica de la función lineal (función de proporcionalidad directa) Para dibujar una recta aplicamos el concepto geométrico siguiente: *por dos puntos del plano pasa una y sólo una recta*. Es suficiente hallar las imágenes de dos valores reales y trazar la gráfica de la función.

Gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ Aplicar los conocimientos de los cursos anteriores. Su gráfica es una parábola.

Gráfica de la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ Dominio de la función: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tabla de valores.

Dibujar gráficas de funciones por traslación

La pregunta es: ¿cómo están relacionadas entre sí, las gráficas de las funciones:

$f(x)$, $f(x+k)$, $f(x-k)$, $f(x)+k$, $f(x)-k$ y $f(x \pm k_1) \pm k_2$, siendo k, k_1, k_2 positivos?

- Gráfica de la función $f(x+k)$. A la variable independiente (x), se le **SUMA** k unidades. La gráfica se traslada en el eje de abscisas OX , k unidades a la **IZQUIERDA**.
- Gráfica de la función $f(x-k)$. A la variable independiente (x), se le **RESTA** k unidades. La gráfica se traslada en el eje de abscisas OX , k unidades a la **DERECHA**.
- Gráfica de la función $f(x)+k$. A la variable dependiente (y), se le **SUMA** k unidades. La gráfica se traslada en el eje de ordenadas OY , k unidades hacia **ARRIBA**.
- Gráfica de la función $f(x)-k$. A la variable dependiente (y), se le **RESTA** k unidades. La gráfica se traslada en el eje de abscisas OY , k unidades hacia **ABAJO**.
- Gráfica de la función $f(x \pm k_1) \pm k_2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variable independiente: } \begin{cases} k_1 > 0 \implies \text{Eje de abscisas } k_1 \text{ unidades a la izquierda} \\ k_1 < 0 \implies \text{Eje de abscisas } k_1 \text{ unidades a la derecha} \end{cases} \\ \text{Variable dependiente: } \begin{cases} k_2 > 0 \implies \text{Eje de ordenadas } k_2 \text{ unidades hacia arriba} \\ k_2 < 0 \implies \text{Eje de ordenadas } k_2 \text{ unidades hacia abajo} \end{cases} \end{array} \right.$$

Las traslaciones nos recuerda el movimiento del joystick (figura 2.3):

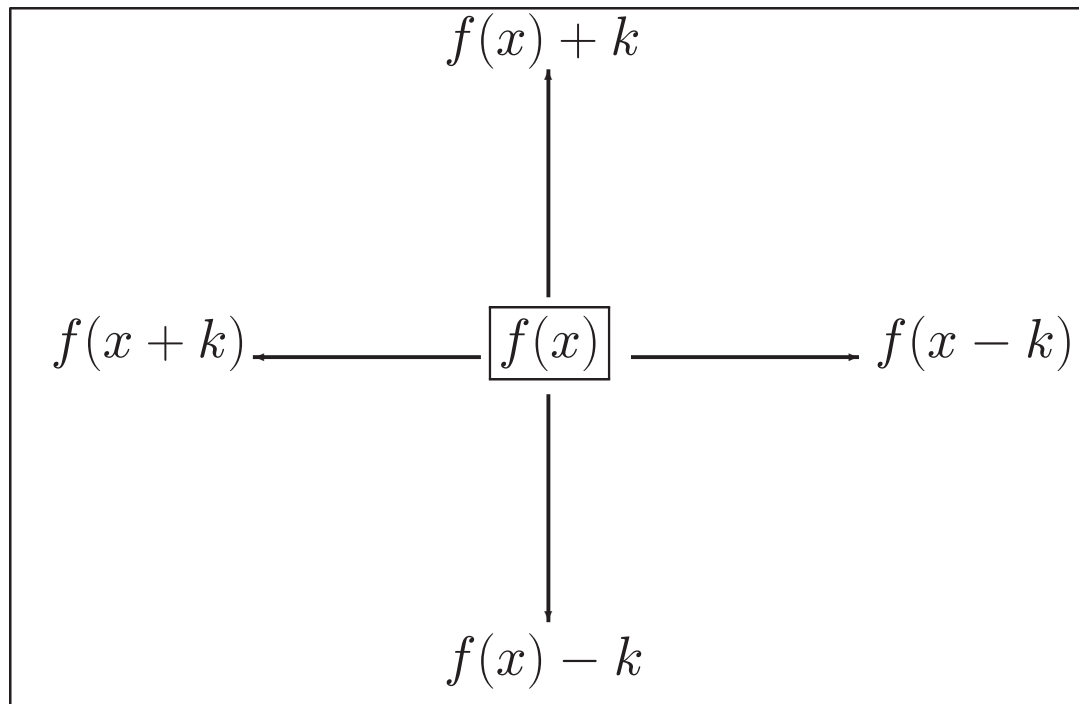


Figura 2.3: Gráficas por traslación.

Gráfica de la función opuesta

Los puntos de ordenada $\begin{cases} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{cases}$ en la gráfica de la función $\boxed{f(x)}$ tendrán ordenada $\begin{cases} \text{negativa} \\ \text{positiva} \end{cases}$ en la gráfica de la función $\boxed{-f(x)}$.

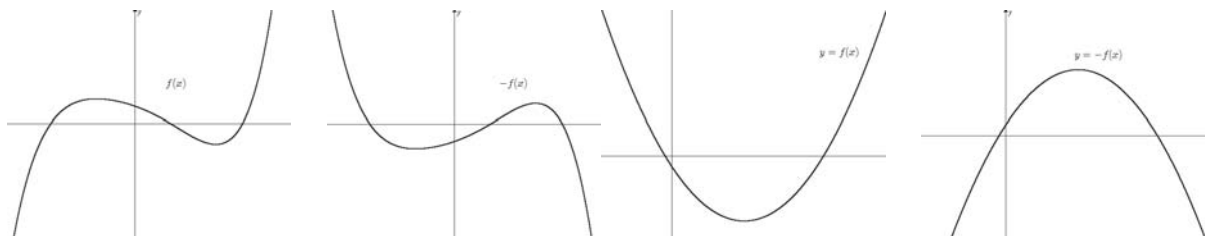
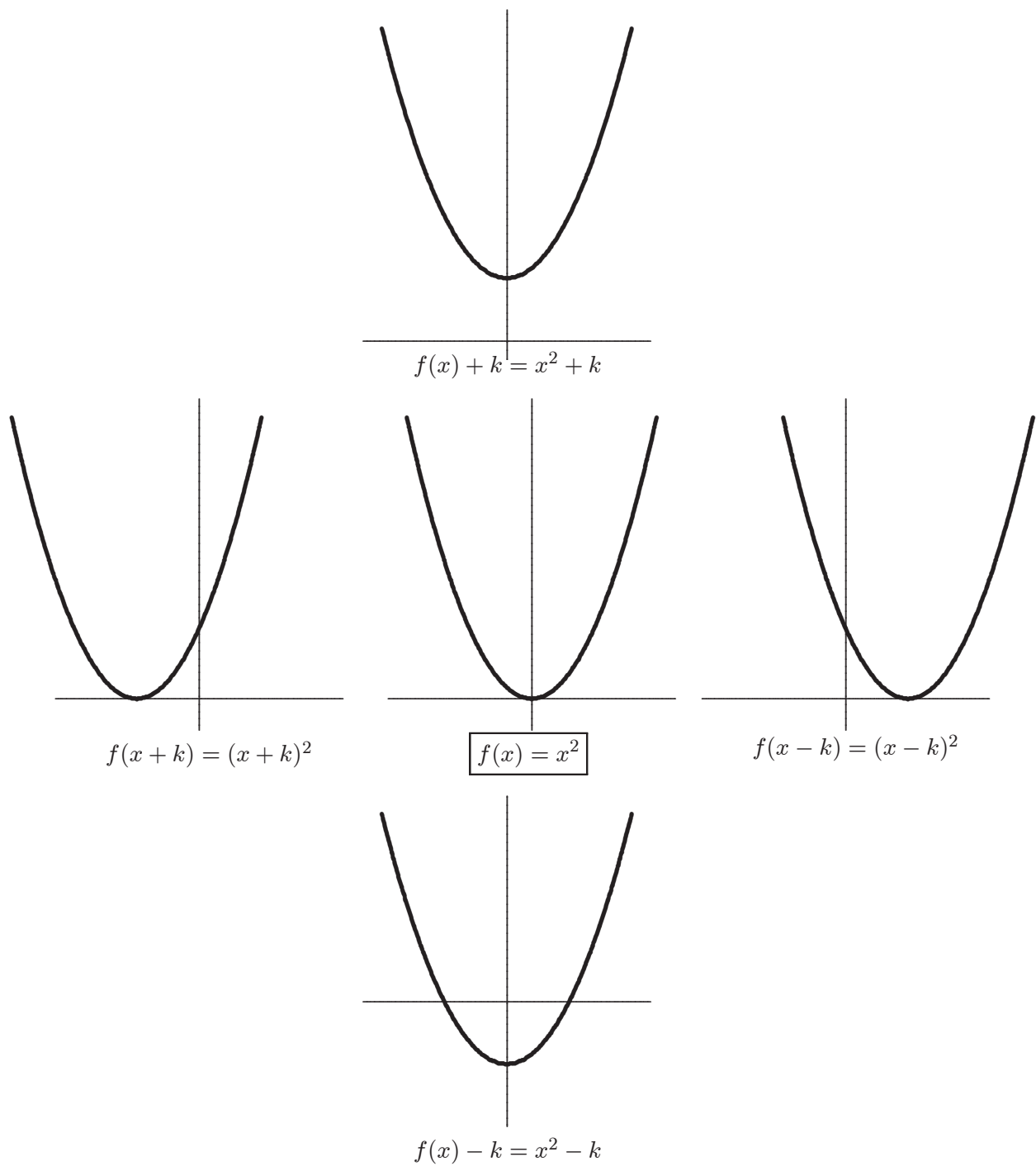


Figura 2.4: Gráficas de una función y su opuesta

Los ejemplos que siguen se corresponden con las funciones de cuadrática y proporcionalidad inversa. A lo largo del curso se aplicará con cualquiera de las funciones explicadas.



(a) $f_a(x) = \frac{1}{x}$

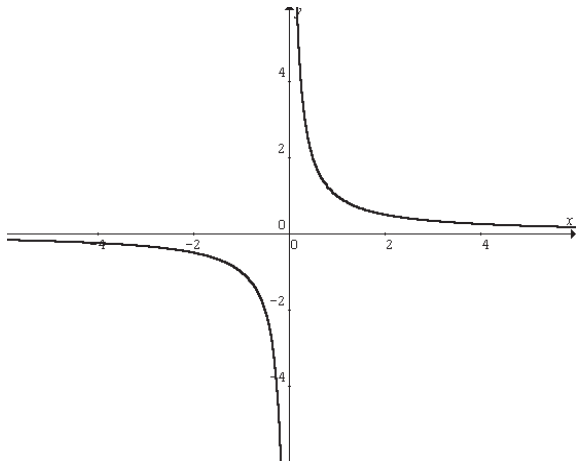
(c) $f_c(x) = f(x+k) = \frac{1}{x+k}$

(e) $f_e(x) = f(x) - k = \frac{1}{x} - k$

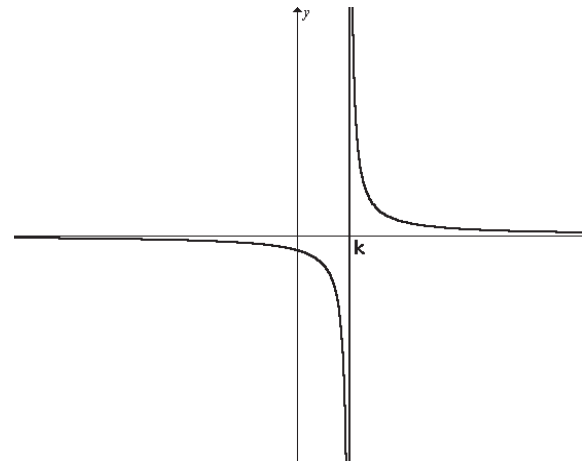
(b) $f_b(x) = f(x-k) = \frac{1}{x-k}$

(d) $f_d(x) = f(x) + k = \frac{1}{x} + k$

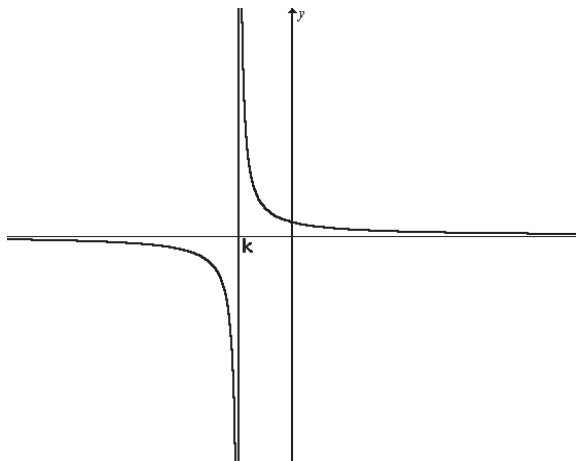
(f) $f_f(x) = f(x-k_1)+k_2 = \frac{1}{x-k_1}+k_2$



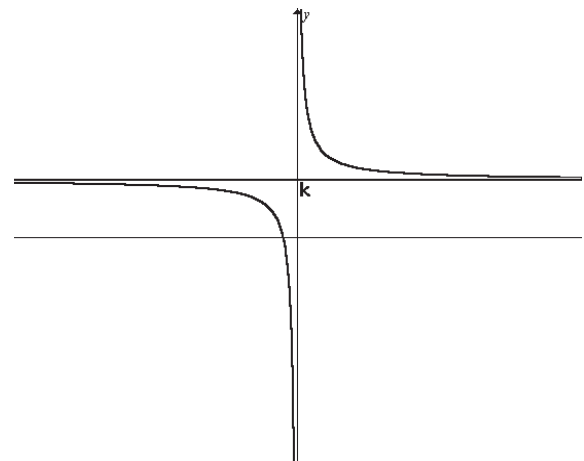
(a)



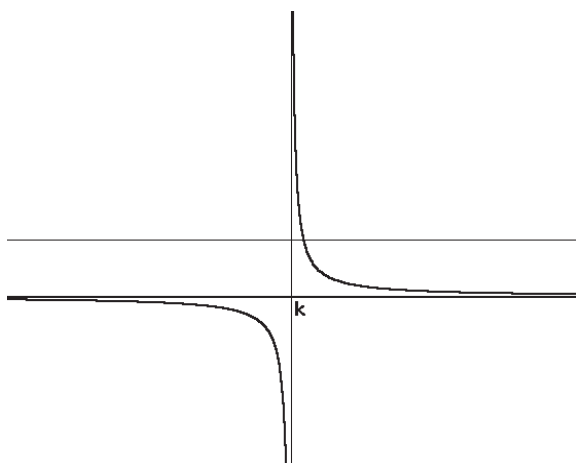
(b)



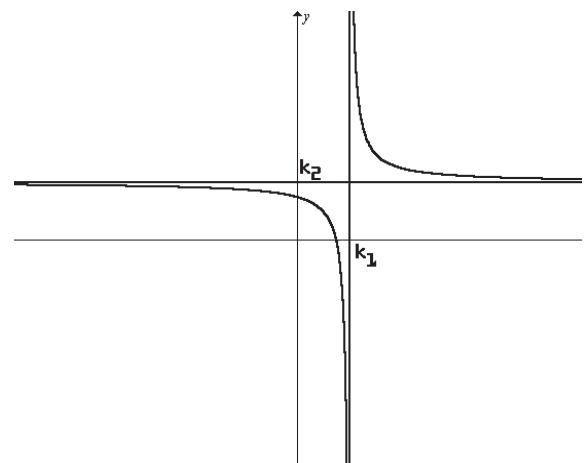
(c)



(d)



(e)



(f)

Funciones $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$: Son de proporcionalidad inversa.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \stackrel{*}{=} \pm k_2 \pm \frac{A}{x+k_1}$$

(*) Se divide la fracción: $\begin{array}{r} ax+b \\ \text{(resto } R) \mid \frac{cx+d}{k_2} \end{array}$ Aplicando el algoritmo de Euclides:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = k_2 \pm \frac{R}{cx+d} \text{ donde } k_1 = -\frac{d}{c} \text{ y } A = R/c$$

Funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$: Funciones cuadráticas, su gráfica es una parábola. Se completan cuadrados:

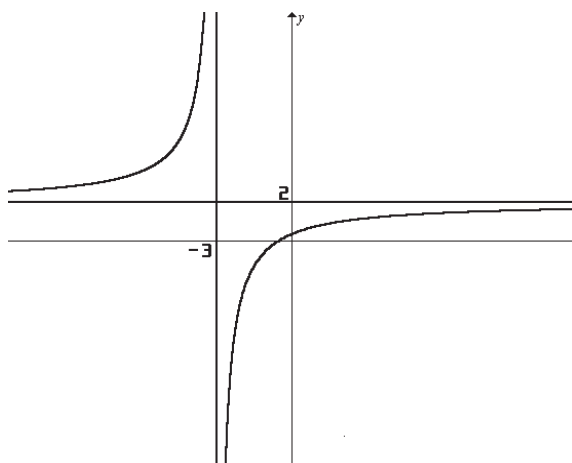
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot (x \pm k_1)^2 \pm k_2$$

Ejemplos:

1. Dibujar la gráfica de la función: $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$. Es un cociente de polinomios de grado uno. Su gráfica es de proporcionalidad inversa (asociada a la gráfica $y = \frac{\pm 1}{x}$).

- Dominio $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
- Corte con el eje de abscisas ($y = 0$). Antiimagen, si existe, de 0. Resolver la ecuación:
 $\frac{2x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Punto de corte $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
- Corte con el eje de ordenadas ($x = 0$). Imagen, si existe, de 0. $f(x=0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}$. Punto de corte $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
- División: $\begin{array}{r} 2x+1 \\ -2x-6 \mid \frac{x+3}{2} \\ \hline -5 \end{array} \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{-5}{x+3} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = 2 \uparrow \\ \boxed{-5} \\ \text{opuesta} \end{array} \right.$

Su gráfica:



2. Dibujar la gráfica de la función: $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$. Es una función cuadrática, su gráfica una parábola.

- Dominio $D_f = \mathbb{R}$
- Coeficiente cuadrático $a = 2 > 0 \Rightarrow \cup$

- Corte con el eje de abscisas ($y = 0$). Antiimagen(s), si existe, de 0. Resolver la ecuación:

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Puntos de corte } (1, 0) \text{ y } \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

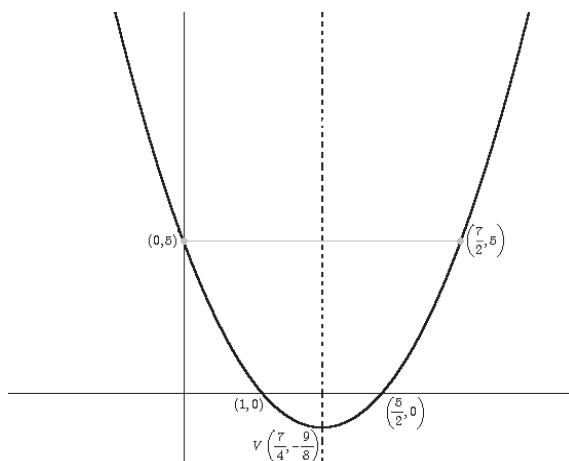
- Corte con el eje de ordenadas ($x = 0$). Imagen, si existe, de 0. $f(x = 0) = 5$. Punto de corte $(0, 5)$
- Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 7x + 5 = 2 \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} \right) = 2 \left[\left(x - \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{5}{2} \right] = \\ &= 2 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{8} + 5 = 2 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{k_1 = \frac{7}{4}} \\ k_2 = -\frac{9}{8} \\ \downarrow \end{matrix}$

Las coordenadas del vértice: $V \left(\frac{7}{4}, -\frac{9}{8} \right)$, el eje de simetría de la parábola es la recta de ecuación $x = \frac{7}{4}$

Su gráfica:



Funciones a trozos (piecewise-defined functions)

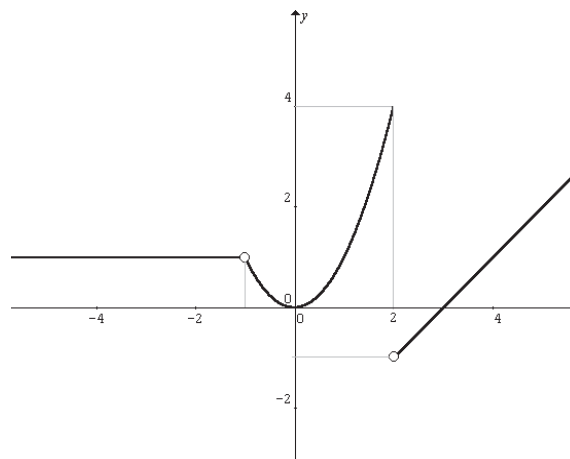
Reciben el nombre de funciones a *trozos* debido a estar definidas por varias funciones.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in D_2 \\ f_3(x) & \text{si } x \in D_3 \\ \dots & \dots \\ f_n(x) & \text{si } x \in D_n \end{cases}$$

El dominio de la función es: $D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n$

Gráfica de la función:

Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



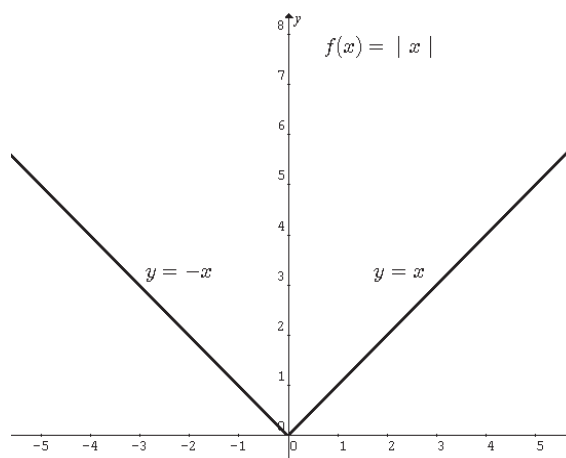
- El dominio de la función: $D_f = (-\infty, -1) \cup ((-1, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- A la vista de la gráfica el recorrido de la función: $\text{Im}(f) = (-1, +\infty)$

Dos funciones especiales

La función **valor absoluto** de la variable independiente es una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de valor absoluto de un número real.

Definición 2.14 (Función valor absoluto). Se llama función valor absoluto y se representa $| \cdot |$, a la función real de dominio $\mathbb{R}$ y sus imágenes vienen dadas por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



El conjunto imagen de la función valor absoluto: $\text{Im}f = \mathbb{R}^+$. Su gráfica:

En general: $F(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$

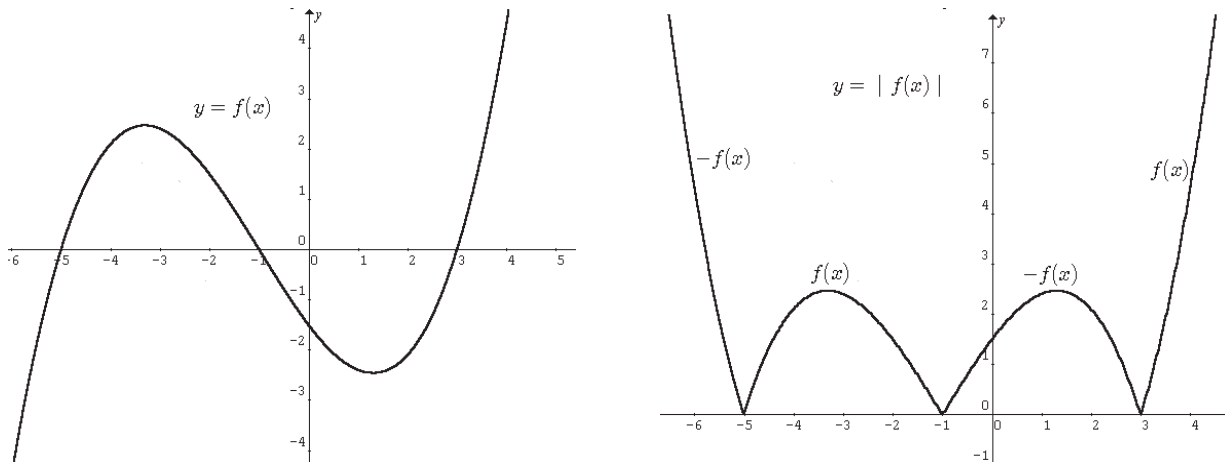


Figura 2.5: Funciones $f(x)$ y $|f(x)|$

Definición 2.15 (Función parte entera). Se llama función parte entera de un número real a la función de dominio $\mathbb{R}$ tal que la imagen de x es igual al **mayor entero igual o menor que x** .

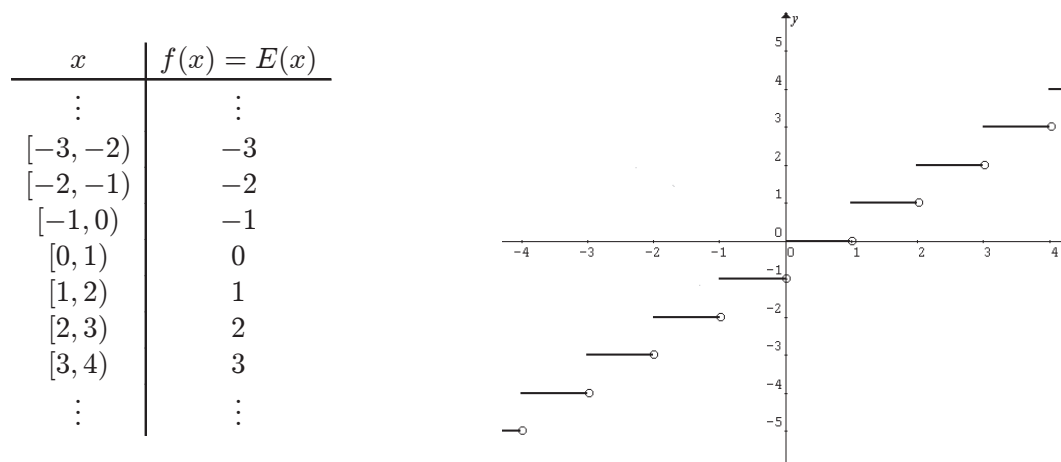


Figura 2.6: Función parte entera

El conjunto imagen de la función parte entera: $\text{Im}f = \mathbb{Z}$.

Clases de funciones

Por definición las funciones son aplicaciones, por lo tanto las funciones pueden ser:

- Inyectiva (definición 2.5)
- Suprayectiva o exhaustiva (definición 2.6). Basta definir la función entre su dominio y el conjunto imagen. $f : D_f \longrightarrow \text{Im}f$ La función, así definida, siempre es suprayectiva.

$$x \longmapsto f(x)$$
- Biyectiva (definición 2.7)

Ejemplos:

- (1) Razonar si $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ es una función inyectiva.

En primer lugar calculamos su dominio máximo: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aplicando la definición 2.1: $f(a) = f(b) \stackrel{?}{\implies} a = b$

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \frac{2a-3}{a-1} = \frac{2b-3}{b-1} \implies (2a-3) \cdot (b-1) = (2b-3) \cdot (a-1) \\ &\implies 2ab - 2a - 3b + 3 = 2ab - 2b - 3a + 3 \implies \boxed{a = b} \end{aligned}$$

La función definida SÍ es inyectiva

- (2) Hallar el conjunto imagen o recorrido de la función anterior

Aplicando la definición de función suprayectiva 2.6, ¿qué números reales tienen al menos una antiimagen?:

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} = b &\implies 2x-3 = (x-1) \cdot b \implies 2x-3 = xb-b \text{ (despejando } x \text{ en función de } b) \\ bx-2x &= b-3 \implies x = \frac{b-3}{b-2} \end{aligned}$$

x será un número real siempre que $b \neq 2$, por lo tanto $\boxed{\text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$

- (3) Razonar si la función: $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ es biyectiva.

$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

- (4) Razonar si $f(x) = x^2 + 2$ es una función inyectiva. Su dominio máximo es $D_f = \mathbb{R}$ (función polinómica).

$$f(a) = f(b) \implies a^2 + 2 = b^2 + 2 \implies a^2 = b^2 \implies \boxed{a = \pm b}$$

La función definida NO es inyectiva

- (5) DEFINIR la función $f(x) = x^2 + 2$ si necesitamos que sea inyectiva. Para que la función sea inyectiva tendremos que restringir el dominio máximo, por ejemplo $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 + 2$$

Así definida es inyectiva.

Funciones simétricas

Definición 2.16 (Funciones pares). La función, $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función par si

$$\boxed{f(-x) = f(x), \forall x \in D_f}$$

En la gráfica de una función par si el punto $(x, f(x))$ pertenece a su gráfica, también está el punto $(-x, f(x))$, es decir presenta simetría respecto del **eje de ordenadas**. Recíprocamente si la gráfica de una función es simétrica respecto del eje de ordenadas, la función es par.

Definición 2.17 (Funciones impares). La función, $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función impar si

$$\boxed{f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f}$$

En la gráfica de una función impar si el punto $(x, f(x))$ pertenece a su gráfica, también está el punto $(-x, -f(x))$, es decir presenta simetría respecto del **origen de coordenadas**. Recíprocamente si la gráfica de una función es simétrica respecto del origen de coordenadas, la función es impar.

Ejemplos:

1. Razonar si la función $f(x) = x^2 - 4$ es par

El dominio de la función $D_f = \mathbb{R}$. Aplicando la definición:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Verifica la definición por lo tanto **FUNCIÓN PAR**. Su gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas.

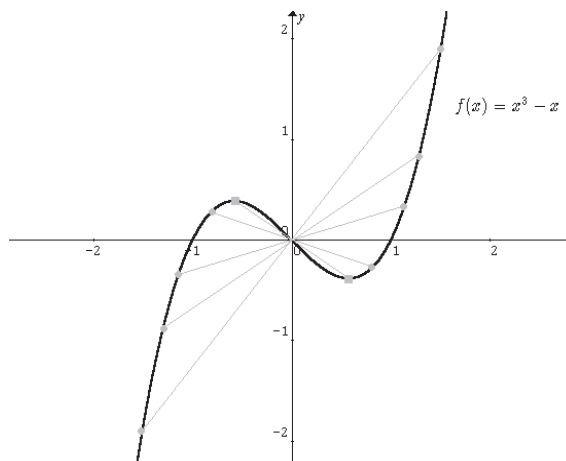
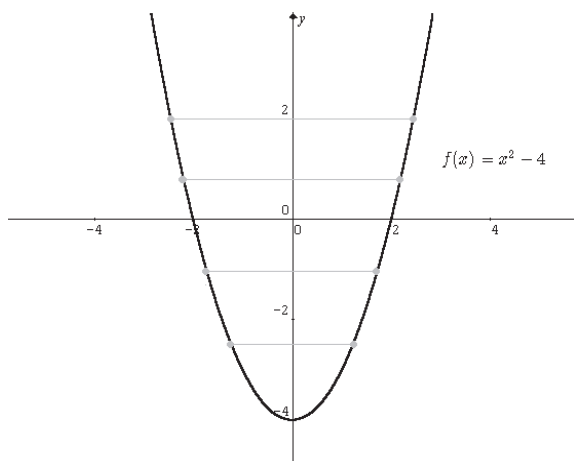


Figura 2.7: Función par e impar

2. Razonar si la función $f(x) = x^3 - x$ es impar

El dominio de la función $D_f = \mathbb{R}$. Aplicando la definición:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Verifica la definición por lo tanto **FUNCIÓN IMPAR**. Su gráfica simétrica respecto del origen de coordenadas.

3. ¿Qué **condición necesaria**, no suficiente, debe verificar el dominio, D_f , de una función para que sea par o impar?

Funciones periódicas

Definición 2.18 (Función periódica). La función, $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función periódica de periodo $t \in \mathbb{R}_*^+$ si

$$f(x+t) = f(x), \forall x \in D_f$$

Es trivial que si t es periodo de la función todos sus múltiplos enteros $2t, 3t, 4t, \dots$, salvo el 0, son también periodos de la función.

Definición 2.19 (Periodo principal). Sea función, $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica, se llama periodo principal de la función, se denota T al **menor** de los periodos de la función.

La gráfica adjunta corresponde con una función f tal que:

- Dominio $D_f = \mathbb{R}$
- Recorrido $\text{Im}(f) = [0, 2]$
- Periódica. Periodo principal $T = 2$

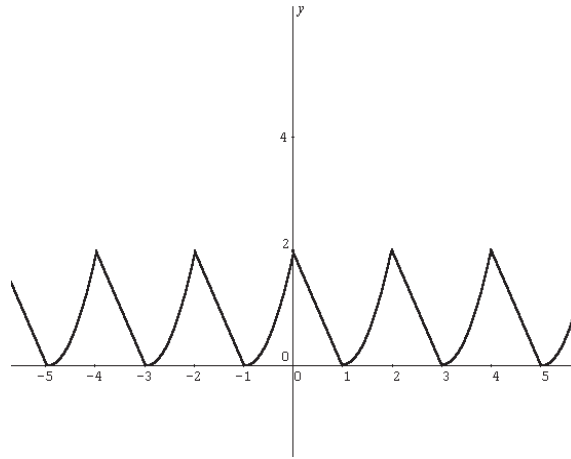
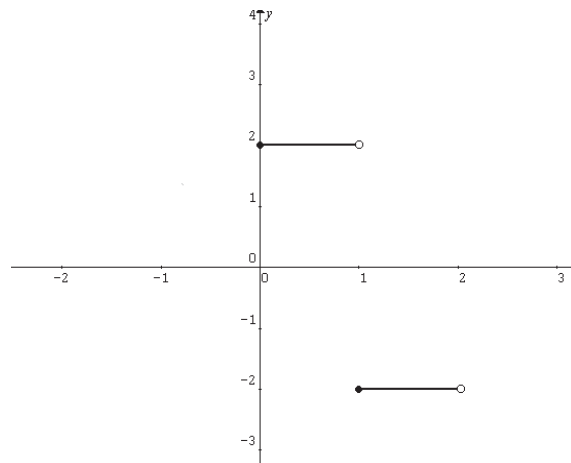


Figura 2.8: Función periódica

Ejercicio:

La gráfica adjunta corresponde con una función f en $[0, 2)$:

1. Hallar la $\text{Im}f$.
2. Dibujar su gráfica si es PAR.
3. Dibujar su gráfica si es IMPAR.
4. Dibujar su gráfica si es PERIÓDICA de periodo $T = 2$.



2.3 Operaciones con funciones

Sean las funciones: $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x)$ $x \longmapsto g(x)$

Definición 2.20 (Suma de funciones). Se llama función suma de f y g , se denota con $f + g$ a la función:

- **DOMINIO:** $D_{f+g} = D_f \cap D_g \neq \emptyset$
- **Relación entre las variables:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D_{f+g}$

Ejemplos:

1. Hallar la función suma de las funciones: $f(x) = \frac{x}{x+2}$ y $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\} \end{array} \right\} \text{Por definición} \quad \left. \begin{array}{l} D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} \\ (f+g)(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{2x+1}{x-3} = \frac{3x^2+2x+2}{x^2-x+6} \end{array} \right\}$$

2. Definir, si es posible, la función suma de las funciones: $f(x) = +\sqrt{-x}$ y $g(x) = -\sqrt{x-2}$

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \geq 0\} = (-\infty, 0] \\ D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \geq 0\} = [2, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 0] \cap [2, +\infty) = \emptyset$$

NO ES POSIBLE DEFINIR LA FUNCIÓN SUMA DE f y g

Propiedades de la suma de la funciones

Asociativa: $(f + g) + h = f + (g + h)$, $\forall f, g, h$ y $D_f \cap D_g \cap D_h \neq \emptyset$

Elemento neutro: La función nula : $0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el elemento neutro de la suma de
 $x \longmapsto 0(x) = 0$
 funciones: $0 + f = f + 0 = f$, $\forall f$.

Elemento opuesto: $\forall f, \exists (-f)$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = 0$ función nula.

Conmutativa: $f + g = g + f$, $\forall f, g$

Todas las propiedades hay que demostrarlas a partir de la igualdad de funciones y recordando las propiedades de la suma de números reales.

La diferencia de funciones se define como la suma de una función con la función opuesta de la otra.
 $f - g = f + (-g)$.

Definición 2.21 (Producto de funciones). Se llama función producto de f y g , se denota con $f \cdot g$ a la función de:

- **DOMINIO:** $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \neq \emptyset$
- **Relación entre las variables:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; $\forall x \in D_{f \cdot g}$

Propiedades del producto de funciones

Asociativa: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \forall f, g, h$ y $D_f \cap D_g \cap D_h \neq \emptyset$

Elemento neutro: La función unidad : $1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el elemento neutro del producto de funciones: $1 \cdot f = f \cdot 1 = f, \forall f$.

$$x \longmapsto 1(x) = 1$$

Elemento inverso: En general, no existe.

Si $f(x) \neq 0 \forall x \in D_f$ entonces $\exists \frac{1}{f}$ tal que $f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot f = 1$ función unidad

Conmutativa: $f \cdot g = g \cdot f, \forall f, g$

Definición 2.22 (Cociente de funciones). Se llama función cociente de f y g , se denota con $\frac{f}{g}$ al producto de la función f por la inversa de la función g , tal que:

- **DOMINIO:** $D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$
- **Relación entre las variables:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}; \forall x \in D_{\frac{f}{g}}$

Ejemplo:

1. Hallar, razonadamente, el dominio máximo de la función: $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-5x}$

La función dada es el cociente de dos funciones: $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, siendo:

$$f_1(x) = \sqrt{3-x} \xrightarrow{\text{raíz índice par}} D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3-x \geq 0\} \implies D_{f_1} = (-\infty, 3]$$

$$f_2(x) = x^2 - 5x \xrightarrow{\text{polinomio}} D_{f_2} = \mathbb{R}$$

Aplicando la definición:

$$D_f = \{(-\infty, 3] \cap \mathbb{R}\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x = 0\} = (-\infty, 3] \setminus \{0, 5\} = (-\infty, 3] \setminus \{0\}$$

2. Hallar, razonadamente, el dominio máximo de la función: $f(x) = \frac{x^2-5x}{\sqrt{3-x}}$

La función dada es el cociente de dos funciones: $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, siendo:

$$f_1(x) = x^2 - 5x \xrightarrow{\text{polinomio}} D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = \sqrt{3-x} \xrightarrow{\text{raíz índice par}} D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3-x \geq 0\} \implies D_{f_2} = (-\infty, 3]$$

Aplicando la definición:

$$D_f = \{(-\infty, 3] \cap \mathbb{R}\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3-x} = 0\} = (-\infty, 3] \setminus \{3\} = (-\infty, 3)$$

Definición 2.23 (Producto de un número real por una función). Se llama función producto de $\alpha \in \mathbb{R}$ y f , se denota con $\alpha \cdot f$ a la función:

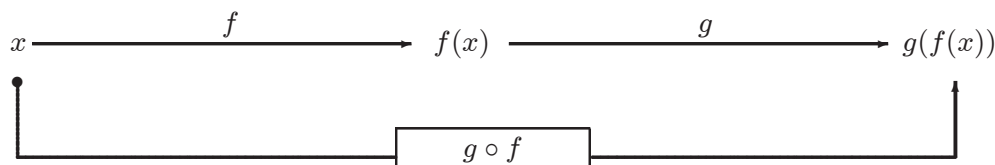
- **DOMINIO:** $D_{\alpha \cdot f} = D_f$
- **Relación entre las variables:** $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall x \in D_f$

Composición de funciones

Sean las funciones: $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\text{Im}f \subseteq D_g$
 $x \longmapsto f(x)$ $x \longmapsto g(x)$

Definición 2.24 (Función compuesta f con g). Se llama función compuesta f con g , se denota con $g \circ f$ a la función:

- **DOMINIO:** $D_{g \circ f} \subseteq D_f$
- **Relación entre las variables:** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Se lee:
imagen por la función g de la imagen por la función f de la variable x



Ejemplos: Sean las funciones tales que $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = +\sqrt{x}$, calcular:

1. $(g \circ f)(4)$. Por definición: $g(f(4)) = g(9) = \sqrt{9} = 3$
2. $(f \circ g)(4)$. Por definición: $f(g(4)) = f(\sqrt{4}) = f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
 ¿Qué propiedad se puede deducir de los ejemplos anteriores?
3. $(g \circ f)(-5)$. Por definición: $g(f(-5)) = g(-9) = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$
4. Definir la función f compuesta con g . Por definición: $g(f(x)) = g(2x + 1) = +\sqrt{2x + 1}$ y su dominio máximo:

$$D_{g \circ f} \subseteq D_f = D_f \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \geq 0\} = \mathbb{R} \cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$g \circ f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = +\sqrt{2x + 1}$$

5. Definir la función g compuesta con f . Por definición: $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$ y su dominio máximo:

$$D_{f \circ g} \subseteq D_g = D_g \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$$

$$f \circ g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = 2\sqrt{x} + 1$$

6. Descomponer la función $F(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Para descomponer la función es muy importante leer correctamente:

Las imágenes por F son la raíz cúbica $\boxed{\text{DE}}$ x^2 más dos

El $\boxed{\text{DE}}$ nos indica la composición de las funciones: $\begin{cases} \text{raíz cúbica} \implies g(x) = \sqrt[3]{x} \\ x^2 \text{ más dos} \implies f(x) = x^2 + 2 \end{cases}$

Efectivamente: $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Propiedades de la composición de funciones

Asociativa: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$. Siempre que sea posible la doble composición.

Elemento neutro: Función identidad : $Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el elemento neutro de la

$$x \longmapsto Id(x) = x$$

 composición de funciones: $Id \circ f = f \circ Id = f, \forall f$.

Función recíproca: En general, no existe.

NO CONMUTATIVA: $f \circ g \neq g \circ f$. Ver ejemplos anteriores.

FUNCIÓN RECÍPROCA

Definición 2.25. La condición necesaria para que una función real posea función recíproca es que sea inyectiva. En este caso, existe $f^{-1} : Im\ f \longrightarrow D_f$ verificando: $\begin{cases} f \circ f^{-1} = Id \\ f^{-1} \circ f = Id \end{cases}$

$$x \longmapsto f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Gráficas de una función y su recíproca

Las gráficas de una función y su recíproca, son simétricas respecto la bisectriz del primer y tercer cuadrante (gráfica de la función identidad $y = x$).

En efecto si el punto $(x_1, y_1 = f(x_1))$ pertenece a la gráfica de la función f , por definición de la función recíproca, el punto $(y_1, f^{-1}(y_1) = x_1)$ pertenece a la gráfica de la función recíproca f^{-1}

Ejemplos:

1. Hallar, si existe, la función recíproca de $f(x) = 3x + 5$

Dominio de la función f Por ser una función polinómica: $D_f = \mathbb{R}$

¿Es inyectiva la función f ? Aplicando la definición $f(a) = f(b) \stackrel{?}{\implies} a = b$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = 3a + 5 \\ f(b) = 3b + 5 \end{array} \right\} \text{igualando las imágenes } 3a + 5 = 3b + 5 \implies a = b$$

Por ser inyectiva posee recíproca.

Recorrido de la función f

$$3x + 5 = b \implies x = \frac{b - 5}{3}$$

Cualquiera que sea el valor de b existe su antiimagen x . Por lo tanto $Im(f) = \mathbb{R}$

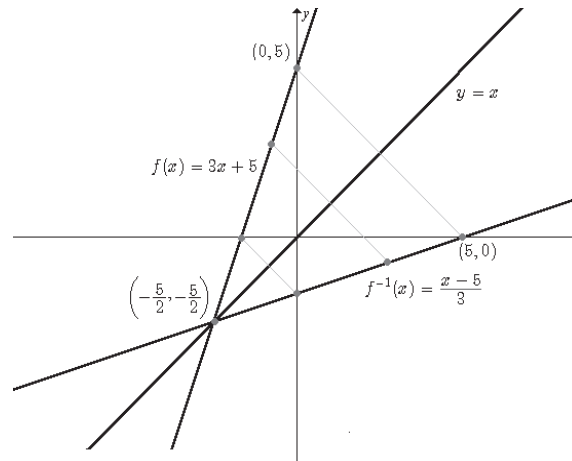
La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y exhaustiva, por lo tanto BIYECTIVA.

$$x \longmapsto f(x) = 3x + 5$$

Definición de la función recíproca

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{3} \end{array}}$$

Sus gráficas:



2. Hallar, si existe, la función recíproca de $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$

Dominio de la función f Por ser una función racional: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

¿Es inyectiva la función f ? Aplicando la definición $f(a) = f(b) \stackrel{?}{\Rightarrow} a = b$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = \frac{3a+5}{a-2} \\ f(b) = \frac{3b+5}{b-2} \end{array} \right\} \text{igualando las imágenes } \frac{3a+5}{a-2} = \frac{3b+5}{b-2} \xrightarrow{\text{operando}} a = b$$

Por ser inyectiva posee recíproca.

Recorrido de la función f

$$\frac{3x+5}{x-2} = b \Rightarrow 3x+5 = b(x-2) \text{ despejando } x = \frac{2b+5}{b-3}$$

$\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ existe su antiimagen x . Por lo tanto $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

La función $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ es inyectiva y exhaustiva, por lo tanto

$$x \longmapsto f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

BIYECTIVA.

Definición de la función recíproca

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3} \end{array}}$$

3. Comprobar con las funciones anteriores que $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ y $f^{-1} \circ f = \text{Id}$

4. Hallar, si existe, la función recíproca de $f(x) = x^2$

Dominio de la función f Por ser una función polinómica: $D_f = \mathbb{R}$

¿Es inyectiva la función f ? Aplicando la definición $f(a) = f(b) \stackrel{?}{\Rightarrow} a = b$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a^2 \\ f(b) = b^2 \end{array} \right\} \text{igualando las imágenes } a^2 = b^2 \xrightarrow{\text{operando}} a = \pm b$$

NO ES INYECTIVA (No existe recíproca)

5. Definir la función $f(x) = x^2$ para que sea inyectiva y hallar la función recíproca asociada

Dominio Si definimos la función: $f : [0, +\infty) = \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = x^2$ entonces la función SÍ es inyectiva y posee recíproca.

Recorrido de la función f

$$x^2 = b \implies x = \pm\sqrt{b}$$

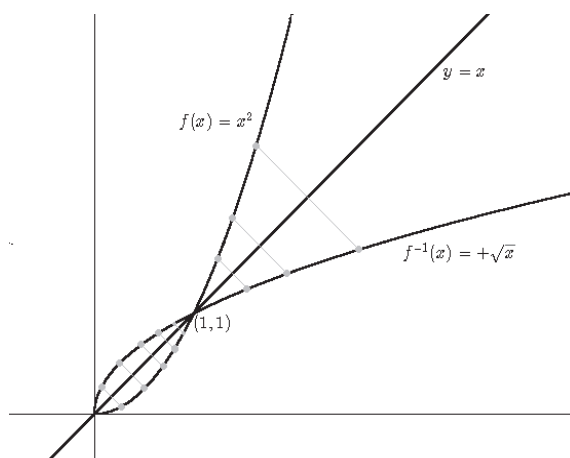
El dominio de la función son los reales positivos, $x \in \mathbb{R}^+$, por lo tanto $x = +\sqrt{b} : \text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$

La función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \longmapsto f(x) = x^2$ es inyectiva y exhaustiva (biyectiva).

Definición de la función recíproca

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = +\sqrt{x} \end{array}}$$

Sus gráficas:



También podemos definir otra recíproca:

Dominio Si definimos la función: $f : (-\infty, 0] = \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = x^2$ entonces la función SÍ es inyectiva y posee recíproca.

Recorrido de la función f

$$x^2 = b \implies x = \pm\sqrt{b}$$

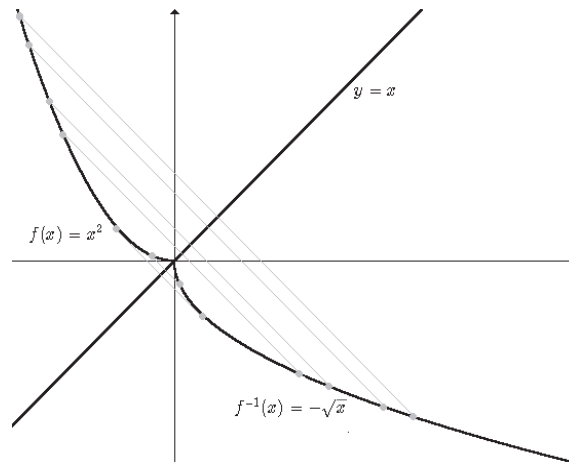
El dominio de la función son los reales negativos, $x \in \mathbb{R}^-$, por lo tanto $x = -\sqrt{b} : \text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$

La función $f : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \longmapsto f(x) = x^2$ es inyectiva y exhaustiva (biyectiva).

Definición de la función recíproca

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^- \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{array}}$$

Sus gráficas:



6. Hallar, si existe, la función recíproca de $f(x) = x^3$

Dominio de la función f Por ser una función polinómica: $D_f = \mathbb{R}$

¿Es inyectiva la función f ? Aplicando la definición $f(a) = f(b) \stackrel{?}{\implies} a = b$

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a^3 \\ f(b) = b^3 \end{array} \right\} \text{igualando las imágenes } a^3 = b^3 \stackrel{\text{operando}}{\implies} a = b$$

Por ser inyectiva posee recíproca.

Recorrido de la función f

$$x^3 = b \text{ despejando } x = \sqrt[3]{b}$$

$\forall b \in \mathbb{R}$ existe su antiimagen x . Por lo tanto $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = x^3$ es inyectiva y exhaustiva, por lo tanto BIYECTIVA.

Definición de la función recíproca

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \end{array}}$$

Sus gráficas:

