

Capítulo 6

Función real de variable real

① Razonar si las siguientes correspondencias entre conjuntos numéricos son funciones,

$$a) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & f(n) = 2n + 3 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & f(n) = n - 3 \end{array}$$

$$c) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & f(n) = \frac{n+2}{n-1} \end{array}$$

$$d) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & f(n) = \sqrt{n} \end{array}$$

$$e) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f(n) = \sqrt[3]{3n+5} \end{array}$$

$$f) \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & f(n) = \frac{n+1}{n^2+2} \end{array}$$

- a) Es una función, *todo número natural tiene imagen natural*
- b) No es una función, *la imagen de $f(1) = -2 \notin \mathbb{N}$*
- c) No es una función, *la imagen de $f(1) = \frac{3}{0} \notin \mathbb{Z}$*
- d) No es una función, *la imagen de $f(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*
- e) Es una función, *todo número entero su imagen es un número real*
- f) Es una función, *todo número racional tiene imagen racional*

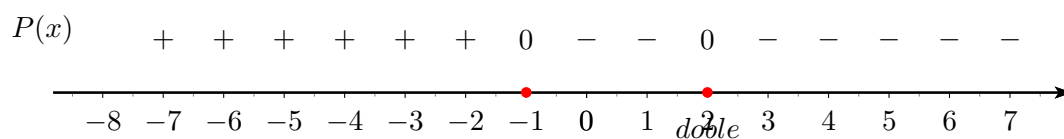
② Hallar, razonadamente, el dominio máximo de la función: $f(x) = \sqrt{-x^3 + 3x^2 - 4} + \sqrt{x+5}$

La función $f(x)$ es la suma de dos funciones $f(x) = g(x) + h(x)$, aplicando la definición de suma de funciones $D_f = D_g \cap D_h$

- La función $g(x)$ es la raíz cuadrada DE un polinomio. Su dominio es:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 + 3x^2 - 4 \geq 0\}$$

La descomposición factorial del polinomio es: $P(x) = -(x+1)(x-2)^2$ y la solución de la inecuación:



$$D_g = (-\infty, -1] \cup \{2\}$$

- La función $h(x)$ es la raíz cuadrada DE un polinomio. Su dominio es:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid -x + 5 \geq 0\} = [-5, +\infty)$$

El dominio de la función es la intersección de los dominios obtenidos:

$$D_f = D_g \cap D_h = \{(-\infty, -1] \cup \{2\}\} \cap [-5, +\infty) = [-5, -1] \cup \{2\}$$

③ Hallar el dominio máximo de las funciones:

a) $f(x) = +\sqrt{3x^4 - 11x^3 + 6x^2 + 12x - 8}$.

c) $f(x) = -\sqrt{\frac{3-x}{x^2+6x+5}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{3x^3-5x^2+2x}}$

a) Las imágenes se hallan calculando la RAÍZ de índice PAR del valor numérico de un polinomio:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^4 - 11x^3 + 6x^2 + 12x - 8 \geq 0\}$$

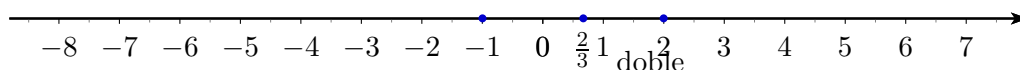
- Raíces (ceros) del polinomio: $3x^4 - 11x^3 + 6x^2 + 12x - 8 = 0$

-1	3	-11	6	12	-8
-1	3	-14	20	-8	8
2	3	-14	20	-8	8
2	3	-8	4	-4	0
2	3	-2	0	2	0
2/3	3	0	0	0	0

Las raíces del polinomio son: $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2(\text{doble}) \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

- Solución de la inecuación $3x^4 - 11x^3 + 6x^2 + 12x - 8 \geq 0$:

$$3(x+1)(x-2)^2(x-\frac{2}{3}) \quad + \quad + \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + 0 \quad + \quad + \quad +$$



$$D_f = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

b) Las imágenes se hallan calculando la RAÍZ de índice IMPAR del valor numérico de un polinomio:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^3 - 5x^2 + 2x \neq 0\}$$

- Raíces (ceros) del polinomio:

$$3x^3 - 5x^2 + 2x = 0 \implies x(3x^2 - 5x + 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1, \frac{2}{3} \right\}$$

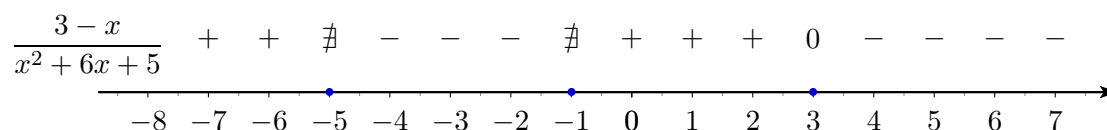
- c) Las imágenes se hallan calculando la RAÍZ de índice PAR del valor numérico de una fracción algebraica:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-x}{x^2+6x+5} \geq 0 \wedge x^2+6x+5 \neq 0 \right\}$$

- Ceros de los polinomios del numerador y denominador:

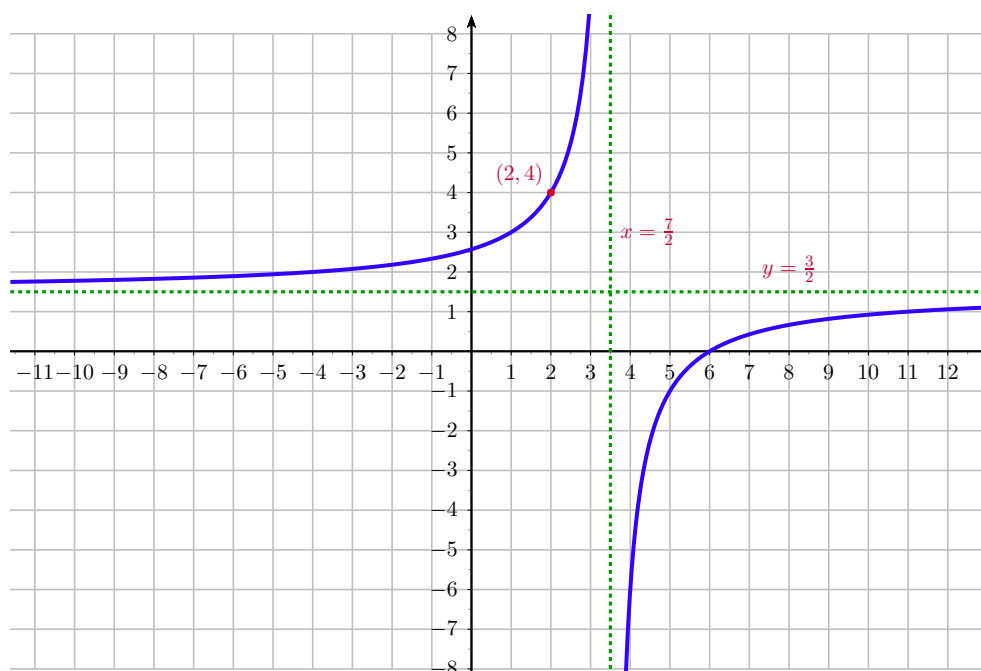
$$\begin{cases} 3-x=0 \implies x=3 \\ x^2+6x+5=0 \implies x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x=-1 \\ x=-5 \end{cases} \end{cases}$$

- Solución de la inecuación:



$$D_f = (-\infty, -5) \cup (-1, 3]$$

- ④ La gráfica adjunta corresponde con una función de **proporcionalidad inversa**, definir la función $f(x)$.



La función es $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. El vector traslación es $\vec{u} = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y el punto $P(2,4)$ pertenece a la gráfica de la función: $f(2) = 4$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} + \frac{k}{x - \frac{7}{2}} \\ f(2) = 4 \end{cases} \implies \frac{3}{2} + \frac{k}{2 - \frac{7}{2}} = 4 \implies \boxed{k = -\frac{21}{4}}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{21}{4}}{x - \frac{7}{2}} \implies f(x) = \frac{3x - 18}{2x - 7}$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \text{ tal que } f(x) = \frac{3x - 18}{2x - 7}$$

- ⑤ a) Definir la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7$ tal que posea recíproca (rama principal). Definir la función $f^{-1}(x)$.
 b) Dibujar la gráfica de la función $f(x)$.
 c) Razonar la gráfica de la función $f^{-1}(x)$.

a) La función es cuadrática y no es inyectiva. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 14) = \frac{1}{2}((x+3)^2 - 9 + 14) = \frac{1}{2}((x+3)^2 + 5) = \\ &= \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{5}{2} \implies V\left(-3, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f : [-3, +\infty) & \longrightarrow & \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \\ x \longmapsto & f(x) = & \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7 \end{array} \quad \text{es biyectiva}$$

Cálculo de las antiimágenes:

$$\frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{5}{2} = b \implies (x+3)^2 + 5 = 2b \implies (x+3)^2 = 2b - 5 \implies x = -3 \pm \sqrt{2b - 5}$$

La función recíproca es:

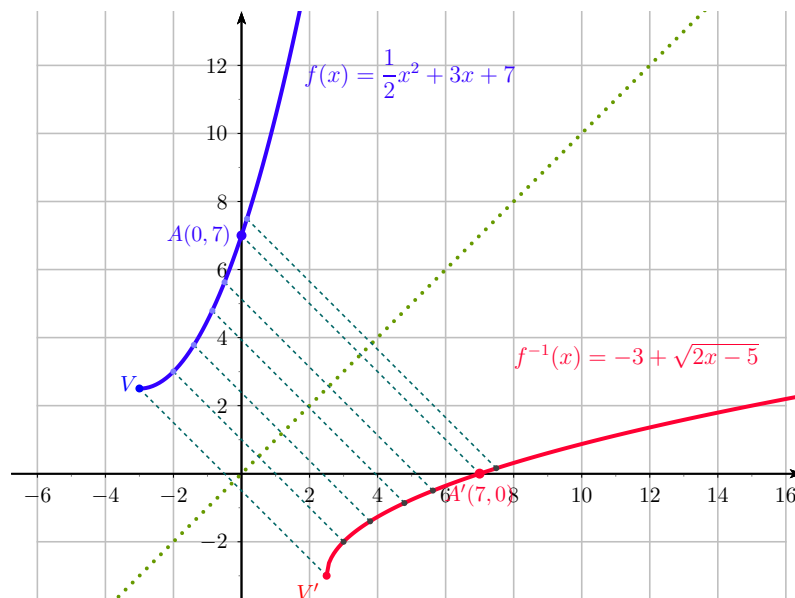
$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) & \longrightarrow & [-3, +\infty) \\ x \longmapsto & f^{-1}(x) = & -3 \boxed{+} \sqrt{2x - 5} \end{array}$$

b) Gráfica de la función $f(x)$.

La gráfica es una semiparábola de vértice $V\left(-3, \frac{5}{2}\right)$, el coeficiente cuadrático $a > 0 \implies \cup$ y $f(0) = 7$.

c) Gráfica de la función $f^{-1}(x)$.

Las gráficas de las funciones inversas son simétricas respecto la bisectriz del primer y tercer cuadrante (función identidad).



⑥ Sea la función $f(x) = +\sqrt{5-3x}$:

- Hallar, razonadamente, su dominio máximo.
- Demostrar que la función es inyectiva.
- Calcular el recorrido (conjunto imagen) de la función.
- Definir la función de tal forma que sea biyectiva.

a) Dominio máximo:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | 5 - 3x \geq 0\} = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$$

b) Por definición si $f(a) = f(b) \implies a = b$:

$$\sqrt{5-3a} = \sqrt{5-3b} \implies 5-3a = 5-3b \implies a = b$$

La función es inyectiva

c) Por definición de la función $f(x) \geq 0$ y $\sqrt{5-3x} = b \implies b^2 = 5-3x \implies x = \frac{5-b^2}{3}$

$$Im f = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$$

d) Definición de la función biyectiva:

$$f: \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$x \longmapsto f(x) = +\sqrt{5-3x}$$