

① Hallar el dominio máximo de la función $f(x) = \sqrt{-8x^2 + 3x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x}$.

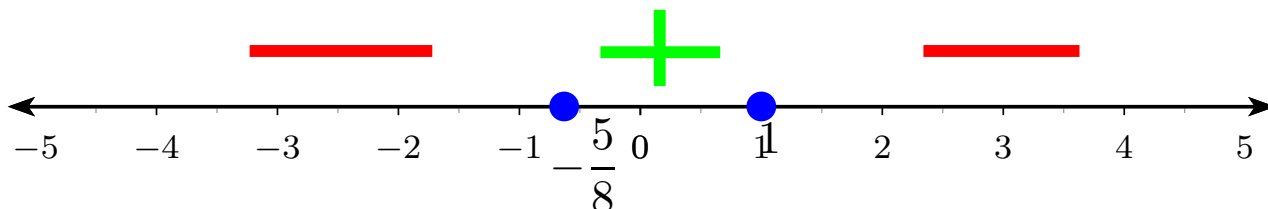
La función f es la diferencia de dos funciones entonces $D_f = D_g \cap D_h$ siendo $\begin{cases} g(x) = \sqrt{-8x^2 + 3x + 5} \\ h(x) = \sqrt{x^2 - 3x} \end{cases}$

- La función g es la composición de una función polinómica con una función irracional de índice PAR.

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -8x^2 + 3x + 5 \geq 0 \right\}$$

Las raíces de la ecuación $8x^2 - 3x - 5 = 0$ son $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{3 \pm 13}{16} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{5}{8} \end{cases}$

SIGNO del polinomio $P(x) = -8 \left(x + \frac{5}{8} \right) \cdot (x - 1)$



El dominio de la función g es

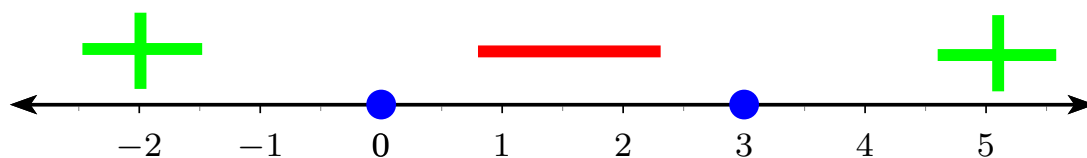
$$D_g = \left[-\frac{5}{8}, 1 \right]$$

- La función h es la composición de una función polinómica con una función irracional de índice PAR.

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x \geq 0 \right\}$$

Raíces de la ecuación $x^2 - 3x = 0 \implies x(x - 3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

SIGNO del polinomio $Q(x) = x \cdot (x - 3)$



El dominio de la función h es

$$D_h = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$$

$$D_f = D_g \cap D_h = \left[-\frac{5}{8}, 1 \right] \cap \left\{ (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \right\} = \left[-\frac{5}{8}, 0 \right]$$

② Sea la función $f(x) = x^2 - 8x + 14$

a) Demostrar que NO es inyectiva.

La función es inyectiva si: $a \neq b \implies f(a) \neq f(b) \iff f(a) = f(b) \implies a = b$

$$f(a) = f(b) \implies a^2 - 8a + 14 = b^2 - 8b + 14 \implies a^2 - b^2 = -8(a - b) \implies (a + b) \cdot (a - b) = -8(a - b)$$

$$\text{si } a \neq b \text{ entonces } a + b = -8 \implies \boxed{a = -b - 8}$$

La función NO es inyectiva, valores reales distintos tienen la misma imagen.

b) Dibujar, completando cuadrados, la gráfica de la función.

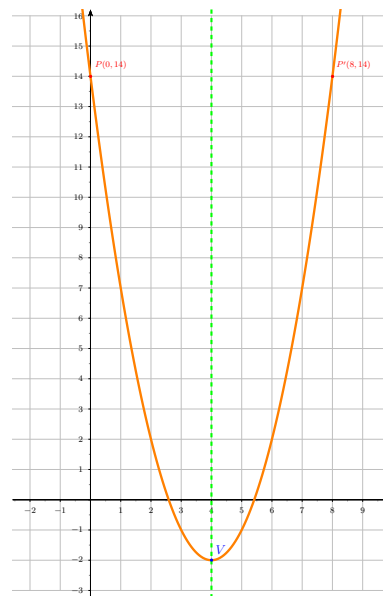
$$f(x) = (x - 4)^2 - 16 + 14 = (x - 4)^2 - 2$$

■ Coeficiente cuadrático: $a = 1 > 0 \implies \cup$

■ Parábola de vértice $V(4, -2)$.

■ Eje de simetría, la recta $x = 4$.

$$\text{■ } f(0) = 14 \implies \begin{cases} P(0, 14) \\ P'(8, 14) \end{cases}$$



c) DEFINIR la función de tal forma que sea BIYECTIVA.

■ INYECTIVA: la función es inyectiva si su dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que cumpla la definición de inyectiva, por ejemplo:

$$\boxed{D_f = [4, +\infty)}$$

■ EXHAUSTIVA: la función es exhaustiva si el conjunto final es igual al recorrido, conjunto imagen, de la función: $\boxed{Im f = [-2, +\infty)}$

■ La función es biyectiva si: $\boxed{f : [4, +\infty) \longrightarrow [-2, +\infty)}$

d) DEFINIR la función recíproca.

■ La función $f : [4, +\infty) \longrightarrow [-2, +\infty)$ así definida posee inversa.

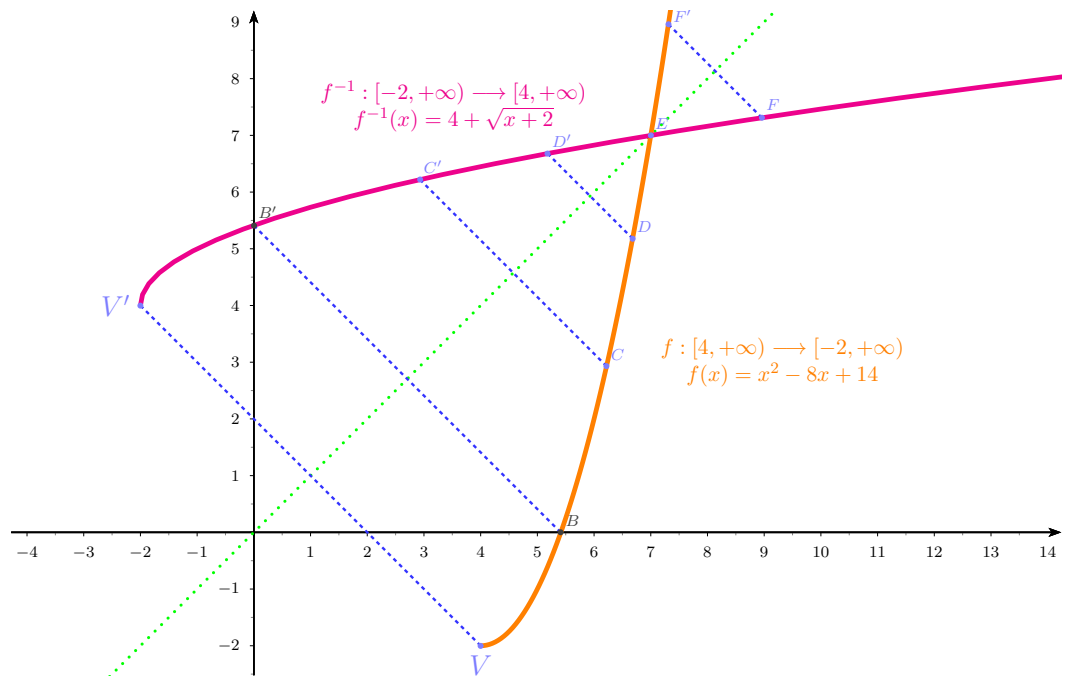
■ Cálculo de las imágenes por la inversa:

$$(x - 4)^2 - 2 = b \implies (x - 4)^2 = b + 2 \implies x - 4 = \pm\sqrt{b + 2} \implies x = 4 \pm \sqrt{b + 2}$$

El recorrido de la función f es el dominio de f^{-1} y el dominio de f es el recorrido de f^{-1} :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f^{-1} : [-2, +\infty) & \longrightarrow & [4, +\infty) \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{x + 2} \end{array}}$$

e) Representar las gráficas de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Las gráficas de las funciones recíprocas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (gráfica de la función identidad).



f) Comprobar que $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in D_f$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(x^2 - 8x + 14) = 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 14 + 2} = 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \\ &= 4 + \sqrt{(x-4)^2} = 4 + x - 4 = x = Id(x) \end{aligned}$$