

El concepto de límite es uno de los más importantes de las matemáticas. El cálculo infinitesimal se basa en gran medida en la definición de límite de una función. A lo largo del curso estudiaremos la continuidad de una función, la derivada y la integral y otras asignaturas: física, química, mecánica, economía, ..., sus aplicaciones.

La definición matemática, de entrada, es una *galimatías de letras y símbolos*, el concepto es más fácil y el cálculo sistemático de límites muy sencillo.

Definición 3.1 (Entorno o bola). Sea $a \in \mathbb{R}$ se llama entorno de centro a y radio $r > 0$, se denota $B_r(a) = B(a, r)$ a:

$$B_r(a) = B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$$

el entorno en $\mathbb{R}$ es un intervalo simétrico respecto el centro a .

Ejemplo:

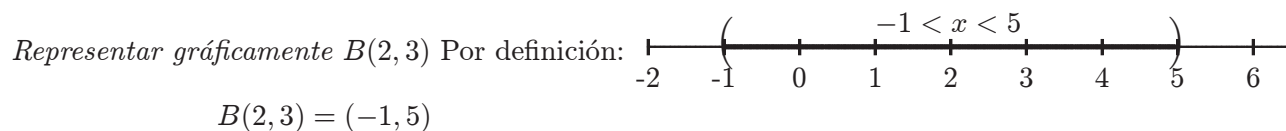


Figura 3.1: $B(2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - 3 < x < 2 + 3\} = (-1, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 3\}$

Definición 3.2 (Bola o entorno reducido). Sea $a \in \mathbb{R}$ se llama entorno reducido de centro a y radio $r > 0$, se denota $B_r^*(a) = B^*(a, r)$ al entorno sin el centro a .

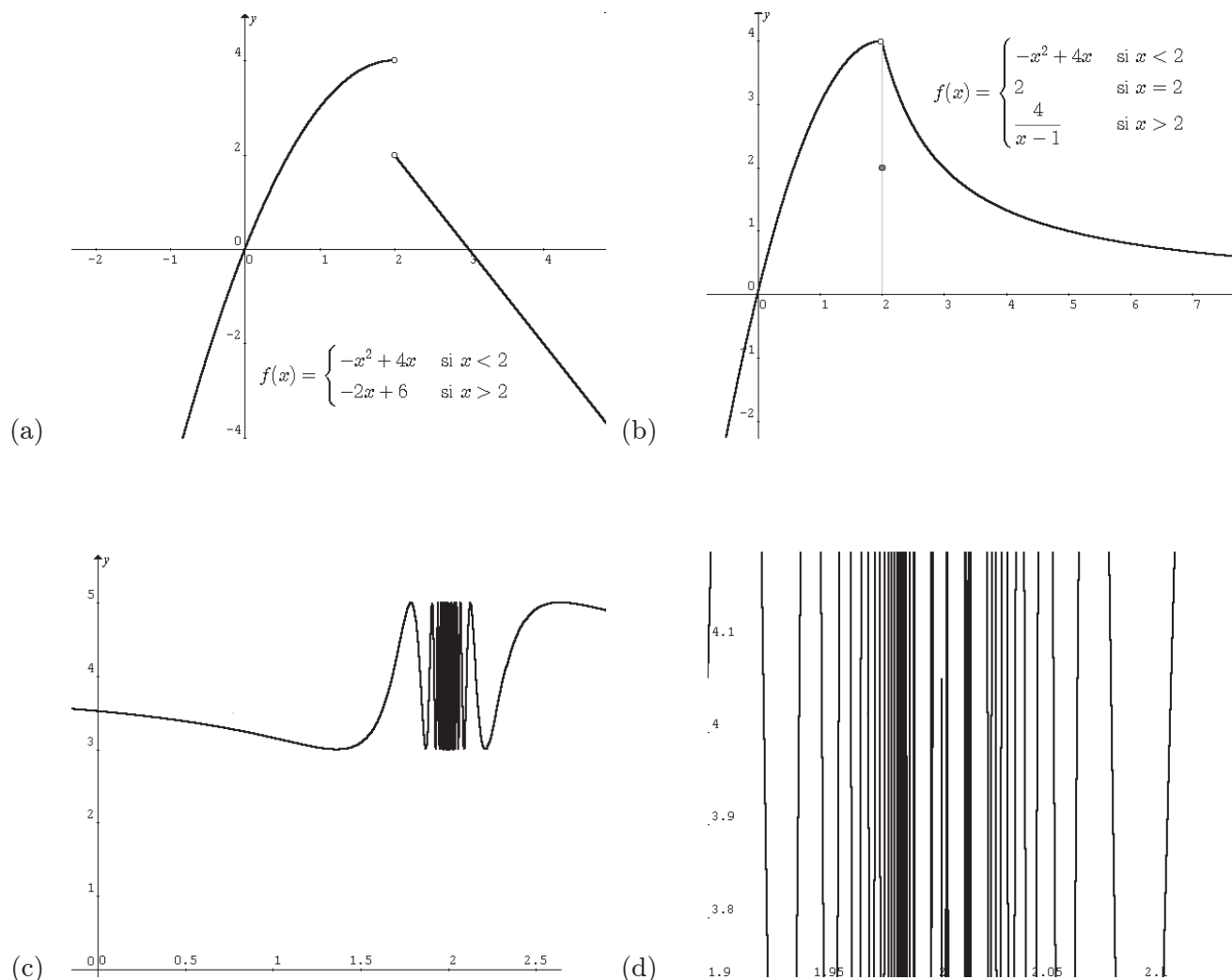
$$B_r^*(a) = B(a, r) \setminus \{a\} = (a - r, a + r) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < r\}$$

Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ si calculamos imágenes en los *alrededores* de $x = 2$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9668	3.9988978	1.9813	3.9996503	1.9964	3.999987	1.999544	3.9999979	1.999672	3.9999989
1.9669	3.9989044	1.9814	3.999654	1.9965	3.9999877	1.999545	3.9999979	1.999673	3.9999989
1.967	3.998911	1.9815	3.9996577	1.9966	3.9999884	1.999546	3.9999979	1.999674	3.9999989
1.9671	3.9989176	1.9816	3.9996614	1.9967	3.9999891	1.999547	3.9999979	1.999675	3.9999989
1.9672	3.9989242	1.9817	3.9996651	1.9968	3.9999898	1.999548	3.9999998	1.999676	3.9999999
1.9673	3.9989307	1.9818	3.9996688	1.9969	3.9999904	1.999549	3.9999998	1.999677	3.9999999
1.9674	3.9989372	1.9819	3.9996724	1.997	3.999991	1.99955	3.9999998	1.999678	3.9999999
1.9675	3.9989438	1.982	3.999676	1.9971	3.9999916	1.999551	3.9999998	1.999679	3.9999999
1.9676	3.9989502	1.9821	3.9996796	1.9972	3.9999922	1.999552	3.9999998	1.99968	3.9999999
1.9677	3.9989567	1.9822	3.9996832	1.9973	3.9999927	1.999553	3.9999998	1.999681	3.9999999
1.9678	3.9989632	1.9823	3.9996867	1.9974	3.9999932	1.999554	3.9999998	1.999682	3.9999999
1.9679	3.9989696	1.9824	3.9996902	1.9975	3.9999937	1.999555	3.9999998	1.999683	3.9999999
1.968	3.998976	1.9825	3.9996938	1.9976	3.9999942	1.999556	3.9999998	1.999684	3.9999999
1.9681	3.9989824	1.9826	3.9996972	1.9977	3.9999947	1.999557	3.9999998	1.999685	3.9999999
1.9682	3.9989888	1.9827	3.9997007	1.9978	3.9999952	1.999558	3.9999998	1.999686	3.9999999
1.9683	3.9989951	1.9828	3.9997042	1.9979	3.9999956	1.999559	3.9999998	1.999687	3.9999999
1.9684	3.9990014	1.9829	3.9997076	1.998	3.999996	1.99956	3.9999998	1.999688	3.9999999
1.9685	3.9990078	1.983	3.999711	1.9981	3.9999964	1.999561	3.9999998	1.999689	3.9999999
1.9686	3.999014	1.9831	3.9997144	1.9982	3.9999968	1.999562	3.9999998	1.99969	3.9999999
1.9687	3.9990203	1.9832	3.9997178	1.9983	3.9999971	1.999563	3.9999998	1.999691	3.9999999
1.9688	3.9990266	1.9833	3.9997211	1.9984	3.9999974	1.999564	3.9999998	1.999692	3.9999999
1.9689	3.9990328	1.9834	3.9997244	1.9985	3.9999977	1.999565	3.9999998	1.999693	3.9999999
1.969	3.999039	1.9835	3.9997277	1.9986	3.999998	1.999566	3.9999998	1.999694	3.9999999
1.9691	3.9990452	1.9836	3.999731	1.9987	3.9999983	1.999567	3.9999998	1.999695	3.9999999
1.9692	3.9990514	1.9837	3.9997343	1.9988	3.9999986	1.999568	3.9999998	1.999696	3.9999999
1.9693	3.9990575	1.9838	3.9997376	1.9989	3.9999988	1.999569	3.9999998	1.999697	3.9999999
1.9694	3.9990636	1.9839	3.9997408	1.999	3.999999	1.99957	3.9999998	1.999698	3.9999999
1.9695	3.9990697	1.984	3.999744	1.9991	3.9999992	1.999571	3.9999998	1.999699	3.9999999
1.9696	3.9990758	1.9841	3.9997472	1.9992	3.9999994	1.999572	3.9999998	1.9997	3.9999999
1.9697	3.9990819	1.9842	3.9997504	1.9993	3.9999995	1.999573	3.9999998	1.999701	3.9999999
1.9698	3.999088	1.9843	3.9997535	1.999424	3.99999967	1.999574	3.9999998	1.999702	3.9999999
1.9699	3.999094	1.9844	3.9997566	1.999425	3.99999967	1.999575	3.9999998	1.999703	3.9999999
1.97	3.9991	1.9845	3.9997597	1.999426	3.99999967	1.999576	3.9999998	1.999704	3.9999999

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.000001	1.999998	2.000034	1.999932	2.000067	1.999866	2.0001	1.9998	2.000133	1.999734
2.000002	1.999996	2.000035	1.99993	2.000068	1.999864	2.000101	1.999798	2.000134	1.999732
2.000003	1.999994	2.000036	1.999928	2.000069	1.999862	2.000102	1.999796	2.000135	1.99973
2.000004	1.999992	2.000037	1.999926	2.00007	1.99986	2.000103	1.999794	2.000136	1.999728
2.000005	1.99999	2.000038	1.999924	2.000071	1.999858	2.000104	1.999792	2.000137	1.999726
2.000006	1.999988	2.000039	1.999922	2.000072	1.999856	2.000105	1.99979	2.000138	1.999724
2.000007	1.999986	2.00004	1.99992	2.000073	1.999854	2.000106	1.999788	2.000139	1.999722
2.000008	1.999984	2.000041	1.999918	2.000074	1.999852	2.000107	1.999786	2.00014	1.99972
2.000009	1.999982	2.000042	1.999916	2.000075	1.99985	2.000108	1.999784	2.000141	1.999718
2.00001	1.99998	2.000043	1.999914	2.000076	1.999848	2.000109	1.999782	2.000142	1.999716
2.000011	1.999978	2.000044	1.999912	2.000077	1.999846	2.00011	1.99978	2.000143	1.999714
2.000012	1.999976	2.000045	1.99991	2.000078	1.999844	2.000111	1.999778	2.000144	1.999712
2.000013	1.999974	2.000046	1.999908	2.000079	1.999842	2.000112	1.999776	2.000145	1.99971
2.000014	1.999972	2.000047	1.999906	2.00008	1.99984	2.000113	1.999774	2.000146	1.999708
2.000015	1.99997	2.000048	1.999904	2.000081	1.999838	2.000114	1.999772	2.000147	1.999706
2.000016	1.999968	2.000049	1.999902	2.000082	1.999836	2.000115	1.99977	2.000148	1.999704
2.000017	1.999966	2.00005	1.9999	2.000083	1.999834	2.000116	1.999768	2.000149	1.999702
2.000018	1.999964	2.000051	1.999898	2.000084	1.999832	2.000117	1.999766	2.00015	1.9997
2.000019	1.999962	2.000052	1.999896	2.000085	1.99983	2.000118	1.999764	2.000151	1.999698
2.00002	1.99996	2.000053	1.999894	2.000086	1.999828	2.000119	1.999762	2.000152	1.999696
2.000021	1.999958	2.000054	1.999892	2.000087	1.999826	2.00012	1.99976	2.000153	1.999694
2.000022	1.999956	2.000055	1.99989	2.000088	1.999824	2.000121	1.999758	2.000154	1.999692
2.000023	1.999954	2.000056	1.999888	2.000089	1.999822	2.000122	1.999756	2.000155	1.99969
2.000024	1.999952	2.000057	1.999886	2.00009	1.99982	2.000123	1.999754	2.000156	1.999688
2.000025	1.99995	2.000058	1.999884	2.000091	1.999818	2.000124	1.999752	2.000157	1.999686
2.000026	1.999948	2.000059	1.999882	2.000092	1.999816	2.000125	1.99975	2.000158	1.999684
2.000027	1.999946	2.00006	1.99988	2.000093	1.999814	2.000126	1.999748	2.000159	1.999682
2.000028	1.999944	2.000061	1.999878	2.000094	1.999812	2.000127	1.999746	2.00016	1.99968
2.000029	1.999942	2.000062	1.999876	2.000095	1.99981	2.000128	1.999744	2.000161	1.999678
2.00003	1.99994	2.000063	1.999874	2.000096	1.999808	2.000129	1.999742	2.000162	1.999676
2.000031	1.999938	2.000064	1.999872	2.000097	1.999806	2.00013	1.99974	2.000163	1.999674
2.000032	1.999936	2.000065	1.99987	2.000098	1.999804	2.000131	1.999738	2.000164	1.999672
2.000033	1.999934	2.000066	1.999868	2.000099	1.999802	2.000132	1.999736	2.000165	1.99967

Observemos las gráficas siguientes:



La gráfica (a) corresponde con la función cuyas imágenes hemos buscado anteriormente.
¿Qué diferencias presenta cuando *nos acercamos* al valor $x = 2$ por valores más pequeños ($x < 2$ izquierda) y por valores un poco mayores que $x = 2$ ($x > 2$ derecha)?

Gráfica (a) $\begin{cases} \text{Si } x < 2 \text{ entonces sus imágenes se acercan o tienden a } \boxed{4} \\ 2 \notin D_f \\ \text{Si } x > 2 \text{ entonces sus imágenes se acercan o tienden a } \boxed{2} \end{cases}$

Gráfica (b) $\begin{cases} \text{Si } x < 2 \text{ entonces sus imágenes se acercan o tienden a } \boxed{4} \\ 2 \in D_f \text{ y } f(2) = 2 \\ \text{Si } x > 2 \text{ entonces sus imágenes se acercan o tienden a } \boxed{4} \end{cases}$

Gráfica (c) $\begin{cases} \text{Si } x < 2 \text{ entonces sus imágenes NO se acercan o tienden a ningún valor real} \\ 2 \notin D_f \\ \text{Si } x > 2 \text{ entonces sus imágenes NO se acercan o tienden a ningún valor real} \end{cases}$

Gráfica (d) Es una ampliación (zoom) de la gráfica anterior alrededor del punto $x = 2$, que confirma lo explicado anteriormente.

Una aproximación a la definición matemática podría ser:

Sea f una función definida a ambos lados de a , pero no necesariamente $a \in D_f$, diremos que las imágenes de la función tienden a un valor L cuando la variable independiente tiende a a si **para cualquier** entorno

que tomemos de centro L , **se puede construir** un entorno de centro a de tal manera que las imágenes de todos los valores de dicho entorno, excepto a , pertenezcan al entorno de L .

Definición 3.3 (Límite de una función). Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto y = f(x)$ diremos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } \forall x \in B^*(a, \delta) \implies f(x) \in B(L, \epsilon)$$

con valor absoluto:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

con intervalos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

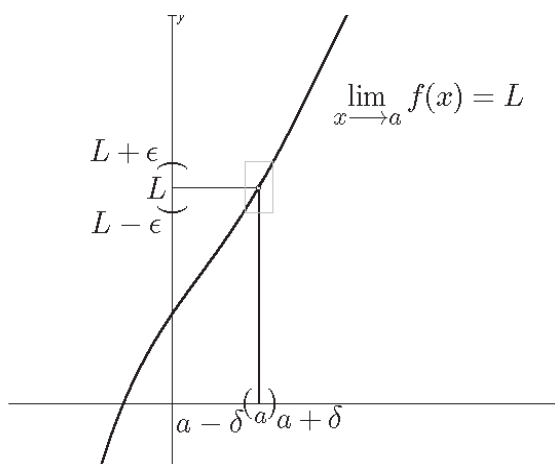


Figura 3.2: Límite de una función.

La gráfica de la función tiene que estar en el interior del rectángulo de lados 2ϵ y 2δ . La dificultad es encontrar el δ dependiente del ϵ tomado.

En las funciones cuyas gráficas nos han servido para, intuitivamente, dar una idea del límite, podemos afirmar:

Gráfica (a) El límite NO existe, no se cumple la definición. $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Gráfica (b) El límite SÍ existe, se cumple la definición $\forall \epsilon > 0. \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Gráfica (c) El límite NO existe, no se cumple la definición. $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

OBSERVACIÓN: Los radios de los entornos ϵ y δ son infinitesimales, del orden de 10^{-12}

Límites laterales

En la recta real *para acercarnos* a un valor a sólo lo podemos hacer por su izquierda $x < a$ y por su derecha $x > a$. Parece lógico que la existencia de un límite en un punto dependa de *la aproximación lateral*:

Definición 3.4 (Límites laterales). Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto y = f(x)$ diremos que existe el

límite lateral por la izquierda si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < \boxed{a - x} < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

límite lateral por la derecha si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < \boxed{x - a} < \delta \implies |f(x) - m| < \epsilon$$

Teorema 3.1 (Relación entre el límite y los límites laterales). *El $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si, y sólo si, existen los límites laterales y son iguales.*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

En las gráficas:

Gráfica (a) $\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2 \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 4 \end{array} \right\} \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ Gráfica (c) $\left\{ \begin{array}{l} \nexists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ \nexists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \end{array} \right\} \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Gráfica (b) $\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4 \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 4 \end{array} \right\} \implies \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Teorema 3.2 (Unicidad del límite). *El $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, si existe, es único.*

3.1 Álgebra de límites

Sea f y g dos funciones tales que $\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \end{array} \right\}$, entonces:

Suma (diferencia) de funciones Existe el límite de la función $f \pm g$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \pm m$$

El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites, SI EXISTE el límite de cada uno de los sumandos.

Producto de funciones Existe el límite de la función $f \cdot g$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \cdot m$$

El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites, SI EXISTE el límite de cada uno de los factores.

Cociente de funciones Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \neq 0$ entonces existe el límite del cociente $\frac{f}{g}$ y:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{m}$$

El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites, si existen los límites y el del denominador es NO NULO.

Producto de un real por una función Existe el límite de la función $k \cdot f$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f)(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot l$$

Todas los teoremas anteriores hay que demostrarlas aplicando las operaciones de funciones y la definición de límite. En cursos de grado superior será el momento adecuado para las demostraciones más matemáticas.

Ejemplos: Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$, hallar

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1 + 3 = 2$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} (f - 2g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1 - 6 = -7$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (-1) \cdot 3 = -3$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

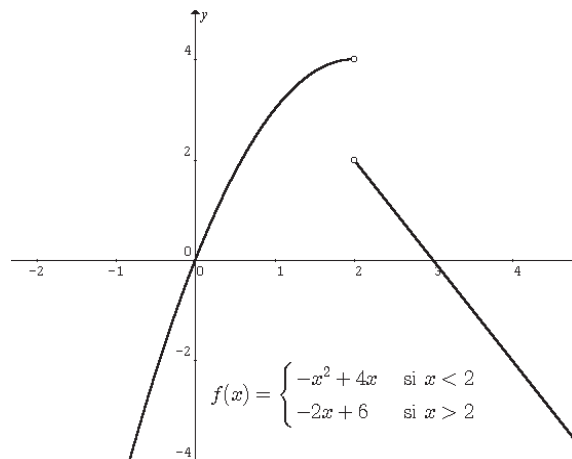
(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{h}{f} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{0}{-1} = 0$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{h} \right)(x)$ No se puede aplicar el teorema anterior: $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$.

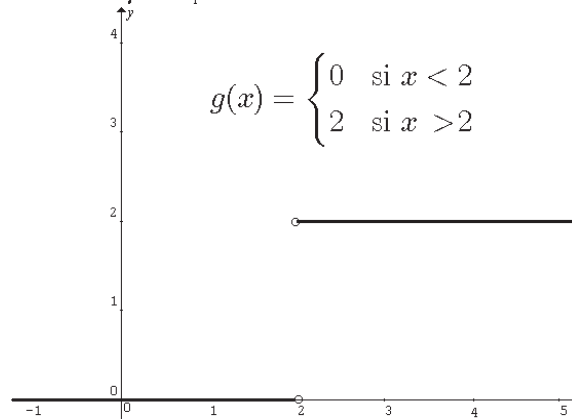
Observación: Los recíprocos de los teoremas anteriores, en general, no son ciertos:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

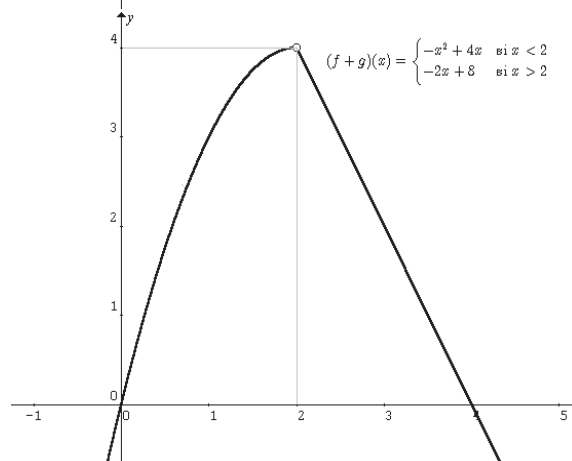


$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 2^-} (f+g)(x) = 4 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 2^+} (f+g)(x) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} (f+g)(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f+g)(x) = 4$$



Límite de la composición de funciones

Si $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \boxed{b}$ y $\exists \lim_{x \rightarrow \boxed{b}} g(x) = L$ entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = L$

Ejemplos: Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 3$, calcular:

(1) $\exists \lim_{x \rightarrow 3} (f \circ g)(x) = -2$

(2) El $\lim_{x \rightarrow 3} (g \circ f)(x)$ con los datos que tenemos no podemos afirmar nada.

(3) $\exists \lim_{x \rightarrow 3} (g \circ g)(x) = 3$

3.2 Límites de funciones elementales

Función constante En las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = k$ existe el límite $\forall a \in \mathbb{R}$ y es igual a k .

Dibujar la gráfica $f(x) = k$ y comprobar la definición.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k, \quad \forall a \in \mathbb{R}}$$

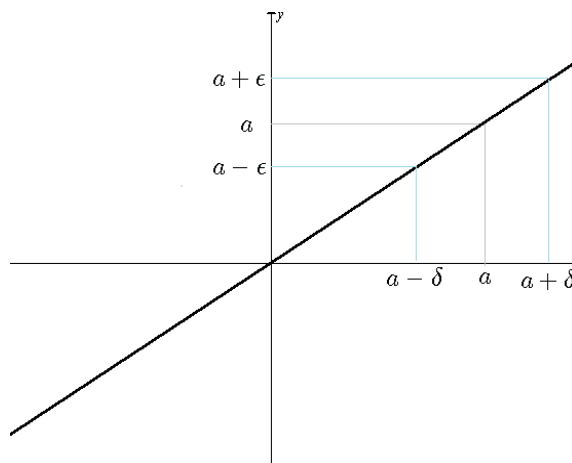
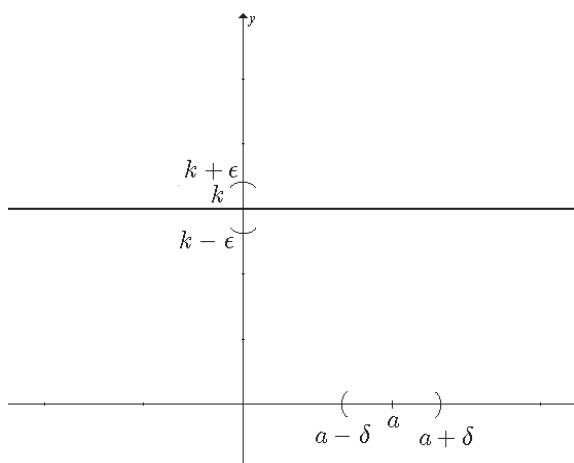


Figura 3.3: $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ y $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Función identidad La función $Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto Id(x) = x$ existe el límite $\forall a \in \mathbb{R}$ y es igual a a . Dibujar la gráfica $f(x) = x$ y comprobar la definición.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}}$$

Funciones potenciales Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = x^n$, existe el límite $\forall x \in \mathbb{R}$ y:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} x \stackrel{(n)}{=} \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \stackrel{(n)}{=} a^n$$

- $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, existe el límite $\forall x \in \mathbb{R}^*$ y:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} \stackrel{(n)}{=} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a} \stackrel{(n)}{=} \frac{1}{a^n}$$

Funciones polinómicas Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = P(x)$, siendo

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, entonces existe $\forall a \in \mathbb{R}$ el $\lim_{x \rightarrow a} P(x)$ y es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$. En efecto:

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow a} P(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n) \stackrel{(*)}{=} \\ &= a_0 \lim_{x \rightarrow a} x^n + a_1 \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + a_2 \lim_{x \rightarrow a} x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} a_n = \\ &= a_0 \cdot a^n + a_1 \cdot a^{n-1} + a_2 \cdot a^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot a + a_n = \boxed{P(x=a)} \end{aligned}$$

(*)Aplicando las propiedades del álgebra de límites.

Ejemplo: *Calcular*

$$\lim_{x \rightarrow -2} 3x^3 + 4x^2 - x + 1 = P(x = -2) = 3(-2)^3 + 4(-2)^2 - (-2) + 1 = -24 + 16 + 2 + 1 = -5$$

Funciones racionales Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. El dominio de la función es:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \text{ Entonces:}$$

- $\forall a \in D_f$, el límite existe y es igual a:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P(x)}{\lim_{x \rightarrow a} Q(x)} = \frac{P(x=a)}{Q(x=a)}$$

- Si $a \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un cero del denominador pero NO ES CERO DEL numerador, $P(x=a) \neq 0$, entonces al anular el denominador EL LÍMITE NO EXISTE.
- Si $a \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y también es cero del numerador: $P(x=a) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}, \boxed{\text{INDETERMINACIÓN}}$$

Observación: El prefijo *in* significa NO, por lo tanto no determinado. EN CADA CASO se debe determinar la existencia o no, del límite y hallar su valor.

Recordemos que la definición de límite NO importa lo que pasa en $x = a$. Lo importante es por su izquierda y derecha para valores infinitesimales. En el entorno reducido del punto a , la diferencia

$x - a$ es NO NULA $\forall x \in B^*(a, \delta)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) \cdot P_1(x)}{(x-a) \cdot Q_1(x)} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} =$$

$$= \begin{cases} \text{Si } Q_1(a) \neq 0 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \in \mathbb{R} \\ \text{Si } P_1(a) \neq 0 \text{ y } Q_1(a) = 0 \text{ entonces } \nexists \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} \\ \text{Si } P_1(a) = 0 \text{ y } Q_1(a) = 0 \text{ indeterminación } \frac{0}{0}(3) \end{cases}$$

(1) Descomponer por Ruffini.

(2) La diferencia $x - a \neq 0$ en $B(a, \delta)$ y se puede simplificar.

(3) Se repite todo el procedimiento.

Ejemplo: Calcular: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - x - 1}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - x - 1}} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación}$$

descomponiendo los polinomios por Ruffini

$\begin{array}{r rrrr} P(x) & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & -1 & & & \\ \hline P_1(x) & 1 & -2 & -3 & 0 \\ & -1 & & & \\ \hline P_2(x) & 1 & -3 & 0 & \\ & -1 & & & \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$	$\begin{array}{r rrrr} Q(x) & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & & & \\ \hline Q_1(x) & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & -1 & & & \\ \hline Q_2(x) & 1 & -1 & 0 & \\ & -1 & & & \\ \hline & 1 & -2 & & \end{array}$	$\begin{cases} P_2(x = -1) = -4 \\ Q_2(x = -1) = -2 \end{cases}$
---	---	--

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-3)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-4}{-2} = \boxed{2}$$

(1) Simplificamos el factor $(x+1)^2$. La variable independiente x tiende a -1 su valor NO es -1 . Por lo tanto $x+1 \neq 0$.

Funciones irracionales Las funciones $F(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ son la composición de la función polinómica $f(x) = P(x)$ con la irracional $g(x) = \sqrt[n]{x}$: $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(P(x)) = \sqrt[n]{P(x)}$.

Aplicando el límite de composición de funciones: $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{P(x)}$ y como el $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ siempre existe, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{P(x)} \text{ existe y es igual a } \sqrt[n]{P(a)} \iff P(a) \in D_g$$

Ejemplos: Calcular los límites:

- (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3x^2 - 5x + 1} = \sqrt{3(-1)^2 - 5(-1) + 1} = \sqrt{9} = 3$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x^2 - 5x + 1} = \sqrt{3 - 5 + 1} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \implies \text{NO EXISTE EL LÍMITE}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 1} = \sqrt[3]{3 - 5 + 1} = \sqrt[3]{-1} = -1$

La indeterminación $\frac{0}{0}$ en un cociente con suma (diferencia) de radicales **cuadráticos** se resuelve multiplicando numerador y denominador por el CONJUGADO correspondiente.

Ejemplo: Hallar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+7} - 9}$

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+7} - 3}} &= \frac{4 - 6 + 2}{\sqrt{2+7} - 3} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+7} - 3} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x+7} - 3) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)}{x + 7 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{(2)}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)(\sqrt{x+7} + 3)}{x - 2} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} ((x - 1) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)) = 1 \cdot (3 + 3) = \boxed{6} \end{aligned}$$

- (1) El conjugado del denominador es: $\sqrt{x+7} + 3$.
 (2) Descomponiendo por Ruffini el polinomio $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.
 (3) Simplificando el factor $x - 2$.
-

3.3 Límites infinitos

La función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ nos ayudará a comprender mejor los límites cuando la variable independiente sea tan grande como queremos: $x \rightarrow \pm\infty$, o cuando las imágenes también sean tan grandes como queramos: $f(x) \rightarrow \pm\infty$.

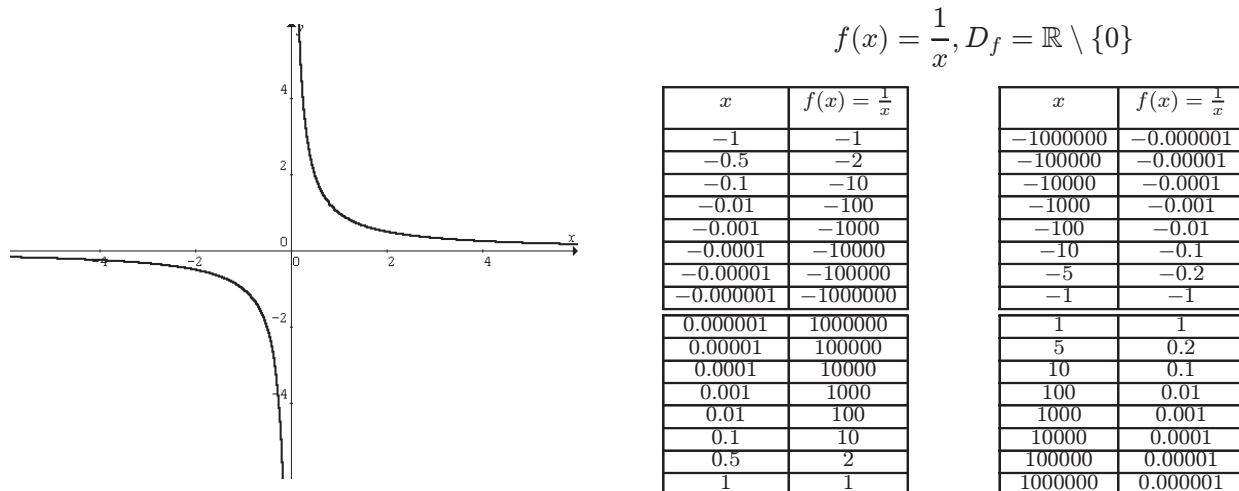


Figura 3.4: $f(x) = \frac{1}{x}$ y tabla de valores de la función

- Si $x \rightarrow 0^-$ entonces sus imágenes *son muy grandes NEGATIVAS*, tienden a $-\infty$
- $0 \notin D_f$
- Si $x \rightarrow 0^+$ entonces sus imágenes *son muy grandes POSITIVAS*, tienden a $+\infty$
- Si $x \rightarrow -\infty$ entonces sus imágenes *se acercan*, tienden a un valor finito 0
- Si $x \rightarrow +\infty$ entonces sus imágenes *se acercan*, tienden a un valor finito 0

Las definiciones de los límites son iguales a la definición (3.3), modificando ϵ y δ . M y K son números TAN GRANDES como se quieran, por ejemplo, $M = 10^{100}$, entonces:

Definición 3.5 (Límites infinitos). Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists K(\epsilon) > 0 \text{ tal que } x > K \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists K(\epsilon) > 0 \text{ tal que } x < -K \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists K(M) > 0 \text{ tal que } x > K \implies f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists K(M) > 0 \text{ tal que } x > K \implies f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists K(M) > 0 \text{ tal que } x < -K \implies f(x) < -L$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists K(M) > 0 \text{ tal que } x < -K \implies f(x) > L$$

Lo importante de las definiciones es LEERLAS correctamente, por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, con lenguaje normal:

Cuando la variable independiente se hace tan grande como queramos, las imágenes son tan negativas como queramos.

NOTA IMPORTANTE: Para hallar cualquier límite en cualquier punto $x = a$ o $x \rightarrow \pm\infty$ la función tiene que estar definida en un entorno del punto o para valores que tiendan a $\pm\infty$. La función $f(x) = +\sqrt{x}$ su dominio es: $D_f = [0, +\infty)$. Es absurdo calcular los límites cuando la variable independiente tienda a cualquier número negativo. Es correcto calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ pero NO $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, no está definida la función ni a la izquierda del cero ni para valores negativos.

En la función $f(x) = \frac{1}{x}$ como $\left\{ \begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \text{y} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$ entonces $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En estos casos se suele escribir

un infinito SIN SIGNO: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

3.4 Ampliación del álgebra de límites

Suma de funciones

$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$				
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$				
m	$l+m$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind	ind
$-\infty$	$-\infty$	ind	$-\infty$	ind
∞	∞	ind	ind	ind

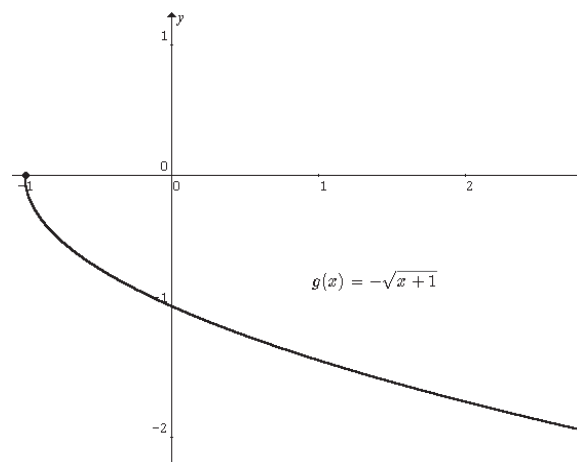
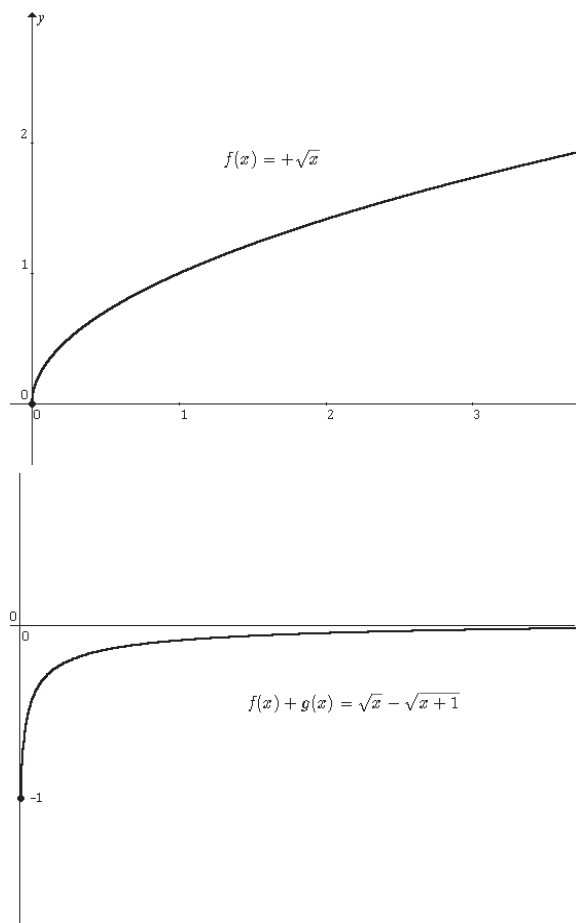
indeterminación: $\infty - \infty$

Diferencia de funciones

$\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x)$				
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$				
m	$l-m$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$+\infty$	$-\infty$	ind	$-\infty$	ind
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind	ind
∞	∞	ind	ind	ind

indeterminación: $\infty - \infty$

Ejemplo:



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty - \infty$ Indeterminación.
- Con la gráfica de la función $f + g$ podemos afirmar, **en este caso**, que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$$

Calcular, si es posible, los siguientes límites:

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} (f - g)(x)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow -1} (f + g)(x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ | (g) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$, para todo $a > 0$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$ | (h) $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x)$, para todo $a > 0$ |

Producto de funciones

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$					
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$					
$m \neq 0$	$l \cdot m$	0	$m > 0 \quad +\infty$ $m < 0 \quad -\infty$	$m > 0 \quad -\infty$ $m < 0 \quad +\infty$	∞
0	0	0	ind	ind	ind
$+\infty$	$l > 0 \quad +\infty$ $l < 0 \quad -\infty$	ind	$+\infty$	$-\infty$	∞
$-\infty$	$l > 0 \quad -\infty$ $l < 0 \quad +\infty$	ind	$-\infty$	$+\infty$	∞
∞	∞	ind	∞	∞	∞

indeterminación: $0 \cdot \infty$

Cociente de funciones

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x)$					
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$					
$m \neq 0$	l/m	0	$m > 0 \quad +\infty$ $m < 0 \quad -\infty$	$m > 0 \quad -\infty$ $m < 0 \quad +\infty$	∞
0	∞	ind	∞	∞	∞
$+\infty$	0	0	ind	ind	ind
$-\infty$	0	0	ind	ind	ind
∞	0	0	ind	ind	ind

indeterminaciones: $\begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$

Indeterminaciones: $\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$

Ejemplos:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$ indeterminación, multiplicando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} 1 \stackrel{(2)}{=} 1$$

- (1) La variable independiente tiende a cero, no vale cero, $x \neq 0$, simplificamos x .
- (2) Límite de la función constante $k = 1$ es igual a la constante 1.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty$ indeterminación, multiplicando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} x \stackrel{(2)}{=} 0$$

- (1) La variable independiente tiende a cero, no vale cero, $x \neq 0$, simplificamos x .
- (2) Límite de la función identidad cuando $x \rightarrow 0$ es igual a 0.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \cdot \infty$ indeterminación, multiplicando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \stackrel{(2)}{=} \infty$$

- (1) La variable independiente tiende a cero, no vale cero, $x \neq 0$, simplificamos x .
- (2) Límite de la función $\frac{1}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$, no existe, es un infinito sin signo.

3.4.1 Funciones elementales

Función constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{matrix} x & \longmapsto & f(x) = k \end{matrix} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k \end{cases}$$

Función identidad

$$Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{matrix} x & \longmapsto & Id(x) = x \end{matrix} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

Funciones potenciales Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{matrix} x & \longmapsto & f(x) = x^n \end{matrix}$ entonces aplicando las propiedades de las potencias: base (positiva o negativa), exponente (par o impar) signo correspondiente:

$$\bullet \quad \boxed{n \text{ es par}} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \end{cases} \quad \bullet \quad \boxed{n \text{ es impar}} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \end{cases}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$x \longmapsto f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\boxed{n \text{ es par}} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \end{array} \right. \quad \boxed{n \text{ es impar}} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \stackrel{(1)}{=} \infty \end{array} \right.$$

(1) Infinito sin signo, no existe el límite

Funciones polinómicas Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = P(x)$ y

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) \stackrel{(1)}{=} \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot a_0 = \begin{cases} \text{Si } a_0 > 0 \text{ entonces } +\infty \cdot a_0 = +\infty \\ \text{Si } a_0 < 0 \text{ entonces } +\infty \cdot a_0 = -\infty \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) \stackrel{(1)}{=} \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot a_0 = \begin{cases} n \text{ es par } \begin{cases} \text{Si } a_0 > 0 \text{ entonces } +\infty \cdot a_0 = +\infty \\ \text{Si } a_0 < 0 \text{ entonces } +\infty \cdot a_0 = -\infty \end{cases} \\ n \text{ es impar } \begin{cases} \text{Si } a_0 > 0 \text{ entonces } -\infty \cdot a_0 = -\infty \\ \text{Si } a_0 < 0 \text{ entonces } -\infty \cdot a_0 = +\infty \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) La indeterminación es siempre $\infty - \infty$. Factor común $x^{\text{grado del polinomio}} = x^n$.

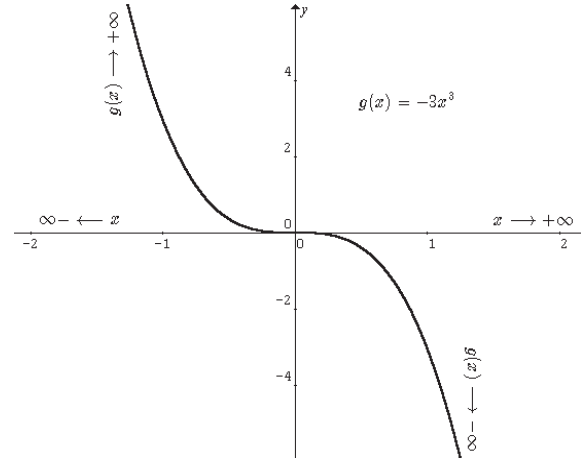
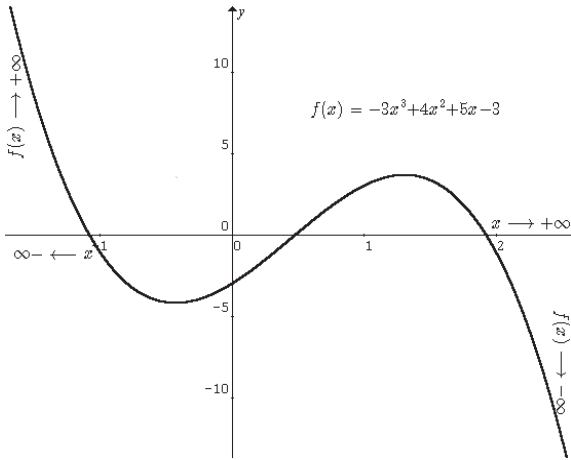
(2) Los límites: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Observación: En todos los casos el límite de los polinomios cuando $\boxed{x \rightarrow \pm\infty}$, depende del monomio principal del polinomio a_0x^n . En el infinito las funciones $f(x) = P(x)$ y $g(x) = a_0x^n$ tienen el mismo comportamiento. En la práctica se calculan de la siguiente forma:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n}$$

Ejemplos: Calcular los límites:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 4x^2 + 5x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = (-3) \cdot (+\infty)^3 = -3 \cdot (+\infty) = -\infty$$



$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 4x^2 + 5x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = (-3) \cdot (-\infty)^3 = -3 \cdot (-\infty) = +\infty$$

Funciones racionales Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. aplicando el apartado anterior:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = \pm\infty$, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminación}$$

Para resolver la indeterminación se sigue el procedimiento siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)} = \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \begin{cases} \text{Si } \text{grad}(P(x)) > \text{grad}(Q(x)) , m > n \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} \cdot x^{n-m} \stackrel{(3)}{=} \pm\infty \\ \text{Si } \text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x)) , m = n \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} x^0 = \frac{a_0}{b_0} \in \mathbb{R} \\ \text{Si } \text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x)) , m < n \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{1}{x^{m-n}} \stackrel{(3)}{=} 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(1) Factor común: $\begin{cases} \text{numerador: } x^{\text{grado del polinomio}} = x^n \\ \text{denominador: } x^{\text{grado del polinomio}} = x^m \end{cases}$

(2) Los límites: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

(3) Teniendo en cuenta los límites de los polinomios cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Observación: En todos los casos el límite de cociente de polinomios cuando $\boxed{x \rightarrow \pm\infty}$,

depende de los monomios principales de los polinomios: a_0x^n y b_0x^m . En el infinito las funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $g(x) = \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$ tienen el mismo comportamiento. En la práctica se calculan de la siguiente forma:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}} \quad (3.1)$$

Ejemplos: *Calcular los límites:*

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2x - 3}{4x^2 - 6} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4} \cdot x = \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot (-\infty) = \boxed{+\infty} \\ (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2x - 3}{4x^4 - 6} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4} \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot 0 = \boxed{0} \\ (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2x - 3}{4x^3 - 6} &\stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4} \cdot 1 = \boxed{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Funciones irracionales Las funciones $F(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ son la composición de la función polinómica $f(x) = P(x)$ con la irracional $g(x) = \sqrt[n]{x}$: $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(P(x)) = \sqrt[n]{P(x)}$.

Aplicando el límite de composición de funciones: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{P(x)}$ y como el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x)} \text{ entonces} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } n \text{ es PAR} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{P(x)} \\ \text{Si } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{P(x)} = +\infty \end{array} \right. \\ \text{Si } n \text{ es IMPAR} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{P(x)} = -\infty \\ \text{Si } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{P(x)} = +\infty \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ejemplos: *Calcular los límites:*

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-3x^2 - 5x + 1} &= \sqrt{-\infty} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-3x^2 - 5x + 1} \\ (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-3x^5 - x + 1} &= \sqrt{+\infty} = +\infty \\ (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{-3x^2 - 5x + 1} &= \sqrt[3]{-\infty} = -\infty \end{aligned}$$

Las indeterminaciones $\boxed{\infty - \infty}$ en un cociente de radicales **cuadráticos** se resuelve multiplicando numerador y denominador por el CONJUGADO correspondiente.

Ejemplos: *Calcular los límites:*

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3} - x)$

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3} - x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 3} + x)}{\sqrt{x^2 - 3} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 3} + x} = \frac{-3}{+\infty + \infty} = \frac{-3}{+\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

(1) Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado.

(2) Identidad notable: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - x}{3x + 2}$

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - x}{3x + 2}} &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 3} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)}{(3x + 2) \cdot (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3 - x^2}{(3x + 2) \cdot (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 3}{(3x + 2) \cdot (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 3}{3x + 2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 3} + x} \stackrel{(4)}{=} -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{+\infty} = -\frac{1}{3} \cdot 0 = \boxed{0} \end{aligned}$$

(3) Descomponemos el límite en el producto del límite de dos funciones.

(4) El primer límite es el cociente de dos polinomios del mismo grado.

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} + x}{3x + 2}$

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} + x}{3x + 2}} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)}{x \cdot \left(3 + \frac{2}{x} \right)} \stackrel{(6)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1} + 1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

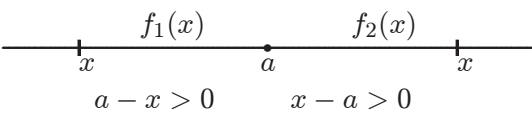
(5) Se resuelve de forma análoga al límite de cociente de polinomios. En este caso el factor común es x .

(6) Simplificamos el factor x . Hallamos los límites.

3.5 Cálculo práctico de los límites laterales

El teorema 3.1 nos permite razonar si el límite de una función en un punto existe y cuál es su valor.

En el caso de funciones a trozos en los puntos donde hay cambio de función es imprescindible calcular los límites laterales para poder afirmar la existencia o no, del límite en dichos puntos. La forma práctica para calcular es la siguiente:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < a \\ b & \text{si } x = a. \\ f_2(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$


Límite por la izquierda

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f_1(a - h) = l_1$$

(*) Al ser por la izquierda $x < a \implies \boxed{h = a - x > 0}$, cuando $x \rightarrow a$ entonces $h \rightarrow 0$ y $x = a - h$

Límite por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f_2(a + h) = l_2$$

(*) Al ser por la derecha $x > a \implies \boxed{h = x - a > 0}$, cuando $x \rightarrow a$ entonces $h \rightarrow 0$ y $x = a + h$

En los dos límites se calculan límites globales cuando $h \rightarrow 0$ y siempre $h > 0$.

Ejemplos:

$$1. \text{ Calcular, si existe, el } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ siendo } f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ 5 & \text{si } x = -1. \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} 3(-1 - h) + 5 = -3 + 5 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-1 + h)^2 + 1 = 1 + 1 = \boxed{2}$$

Existen los límites laterales y son iguales entonces $\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2}$

Por definición $f(-1) = 5$ y $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, ¿es correcto? ¿Por qué?

$$2. \text{ Calcular, si existe, el } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ siendo } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} ((2 - h)^2 - 2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = \boxed{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(2 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - (2 + h) - 2}{(2 + h)^2 - 2(2 + h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 2 - h - 2}{4 + 4h + h^2 - 4 - 2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h^2 + 2h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 3)}{h(h + 2)} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 3}{h + 2} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- (1) La indeterminación $\frac{0}{0}$ se resuelve sacando factor común h .
- (2) Simplificamos el factor h y sustituimos h por 0.

Existen los límites laterales en $x = 2$ pero son distintos, implica que $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3.6 Asíntotas

Sea $f : D_f \xrightarrow{x \mapsto f(x)} \mathbb{R}$

Definición 3.6 (Asíntota). La recta $y = mx + b$ es asíntota de la función si es tangente a su gráfica en el infinito.

Por definición las asíntotas son **RECTAS** y para hallarlas debemos calcular sus ecuaciones.

Definición 3.7 (Asíntota vertical). La recta $\boxed{x = a}$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si verifica una de las condiciones siguientes:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases}$$

Valores finitos de la variable independiente $x = a$ tal que, sus imágenes en un entorno de a tienden al infinito

Definición 3.8 (Asíntota horizontal). La recta $\boxed{y = b}$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$ si verifica una de las condiciones siguientes:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

Valores finitos de la variable dependiente $y = b$ cuando la variable independiente tienden al infinito

Observaciones:

- Asíntotas verticales una función puede tener infinitas.
- Asíntotas horizontales, como máximo, puede tener dos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La recta } y = b_1 \text{ si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_1 \\ \text{y} \\ \text{La recta } y = b_2 \text{ si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_2 \end{array} \right\}$$

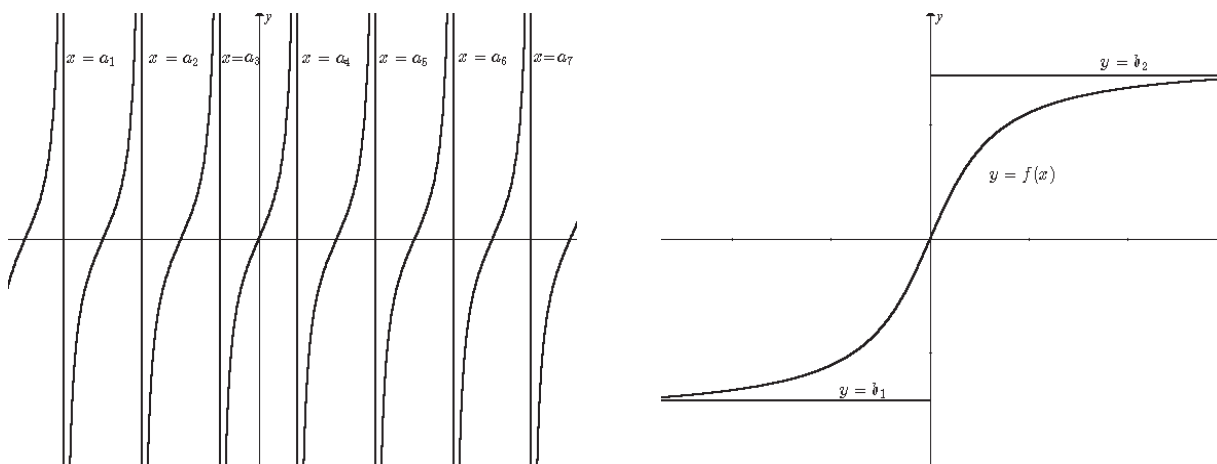


Figura 3.5: Asíntotas verticales y horizontales

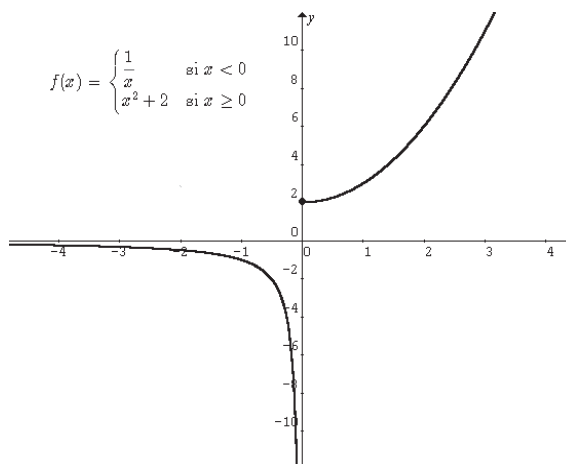
- Si una función tiene de dominio $\mathbb{R}$ puede tener asíntotas verticales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es: $D_f = \mathbb{R}$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \implies \text{la recta } x = 0$$

es asíntota vertical de la función.



Definición 3.9 (Asíntotas oblicuas). Sea la función $f(x)$ entonces la recta de ecuación: $g(x) = mx + b$ es asíntota oblicua de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - g(x)| = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - g(x)| = 0$$

Las imágenes por la función f tienden a confundirse con las imágenes en la recta g

La gráfica de la función f es tangente en el infinito a la recta $y = mx + b$

De las funciones estudiadas: rectas, parábolas, racionales, sólo las funciones racionales pueden tener asíntotas oblicuas. En cursos superiores se estudiará detenidamente el cálculo de asíntotas oblicuas para las funciones en general.

Cálculo de asíntotas oblicuas en funciones racionales

Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$:

- Si $\text{grad}(P(x)) \leq \text{grad}(Q(x))$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = b \in \mathbb{R}$, la función presenta una asíntota horizontal: $y = b$.

- Si $\text{grad}(P(x)) > \text{grad}(Q(x))$ entonces se dividen los polinomios: $\begin{array}{r} P(x) \\ \cdot \\ R(x) \end{array} \left| \begin{array}{r} Q(x) \\ C(x) \end{array} \right.$ y aplicando el algoritmo de Euclides de la división:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ con } \text{grad}(R(x)) < \text{grad}(Q(x))$$

Es decir: $\boxed{f(x) - C(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - C(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} \stackrel{(1)}{=} 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\left(f(x) - C(x)\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{R(x)}{Q(x)} \stackrel{(1)}{=} 0 \end{array} \right\} \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - C(x)| = 0}$$

(1) La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en cociente de polinomios se aplica el apartado (3.1)

Cuando la variable independiente tiende al infinito la función $f(x)$ se comporta como la función $g(x) = C(x)$

- (1) Si $\text{grad}(C(x)) = 0$ ($C(x) = k$) $\iff \text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = k$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$
- (2) Si $\text{grad}(C(x)) = 1$ ($C(x) = mx + b$) $\iff \text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x)) + 1$ entonces la recta $y = mx + b$ es **asíntota oblicua** de la función $f(x)$
- (3) Si $\text{grad}(C(x)) > 1$ $\iff \text{grad}(P(x)) > \text{grad}(Q(x)) + 1$ entonces la función en el infinito se comporta como la función $g(x) = C(x)$: parábolas, cúbicas, etc.

Ejemplos: Hallar, si existen, las asíntotas de las funciones:

(1) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x - 1}$

- En primer lugar se debe calcular el dominio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Para $x = 1$ la función no tiene imagen y está definida en cualquier entorno de centro $x = 1$. Límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1 - h)^2 - 2}{1 - h - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1 + h)^2 - 2}{1 + h - 1} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{array} \right\} \text{ entonces}$$

La recta $\boxed{x = 1}$ es asíntota vertical de la función

- El $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ no tiene asíntota horizontal.
- El $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x)) + 1$ por lo tanto la función tiene una asíntota oblicua de ecuación:

$$\frac{\begin{array}{r} 3x^2 \quad -2 \\ -3x^2 + 3x \end{array}}{\begin{array}{r} 3x \quad -2 \\ -3x \quad +3 \\ \hline 1 \end{array}} \begin{array}{l} -2 \boxed{x - 1} \\ 3x + 3 \end{array} \implies \frac{3x^2 - 2}{x - 1} = \boxed{3x + 3} + \frac{1}{x - 1}$$

La recta $\boxed{y = 3x + 3}$ es la asíntota oblicua de la función.

(2) $f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$

- Dominio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Para $x = -1$ la función no tiene imagen y está definida en cualquier entorno de centro $x = -1$. Límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 - h)^3}{-1 - h + 1} = \frac{-1}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1 + h)^3}{-1 + h + 1} = \frac{-1}{+0} = -\infty \end{array} \right\} \text{ entonces}$$

La recta $\boxed{x = -1}$ es asíntota vertical de la función

- El $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ no tiene asíntota horizontal.

- El $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x)) + 2$ por lo tanto la función NO tiene asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 \\ \hline -x^2 \\ x^2 + x \\ \hline x \\ -x - 1 \\ \hline -1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x+1 \\ x^2 - x + 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{x+1} = \boxed{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1}$$

La gráfica de la función $f(x)$, en el infinito, tiene un comportamiento análogo a la función $g(x) = x^2 - x + 1$, es decir, como una parábola

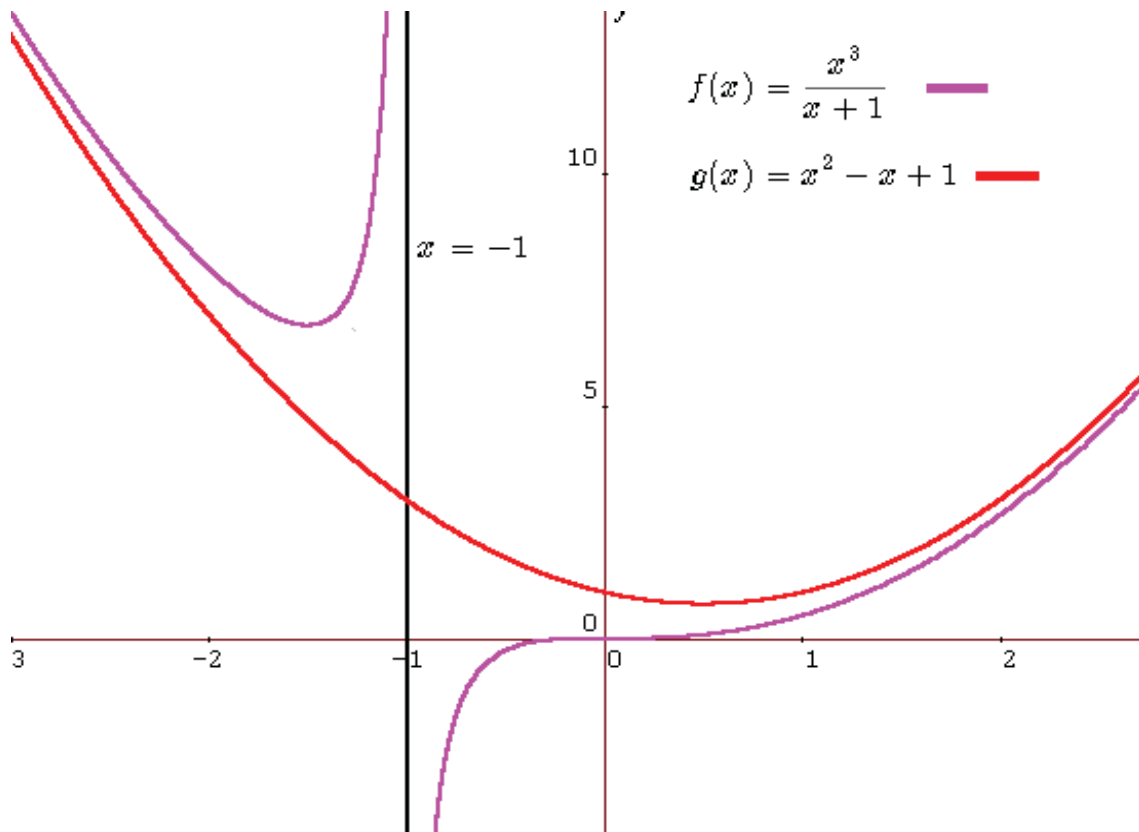


Figura 3.6: Comportamiento en el infinito de las funciones $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ y $g(x) = x^2 - x + 1$

3.7 Gráficas de las funciones racionales

Las gráficas de las funciones lineales, parabólicas y proporcionalidad inversa han sido estudiadas en el capítulo anterior. En cursos superiores se dibujarán gráficas con más precisión. El concepto de límite nos ha permitido el estudio de las asíntotas y el comportamiento de la función en el infinito. Los procedimientos a seguir son:

- **Dominio de la función.**
- **Función par, impar o nada. Simetrías.**
- **Cortes con los ejes de coordenadas.**

- Estudio de las asíntotas de la función.
- Si existen asíntotas horizontales u oblicuas, corte, si hay, con la gráfica de la función.
- Si es necesario, una tabla de valores.

Ejemplos: *Dibujar, razonadamente, las gráficas de las funciones*

1. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

- Dominio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$. Todos los reales tienen imagen.
- Simetrías, si existen:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = f(x)$$

La función es PAR, la gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas: $y = 0$. Como es simétrica basta estudiar de $[0, +\infty)$

- Cortes con los ejes de coordenadas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de abscisas} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (+\sqrt{3}, 0) \\ (-\sqrt{3}, 0) \end{array} \right\} \\ \text{Eje de ordenadas} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x = 0) = \frac{0 - 3}{0 + 1} = -3 \Rightarrow (0, -3) \end{array} \right\}$$

- Estudio de las asíntotas de la función.

Verticales No tiene: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)\mathbb{R}, \forall a \in d_f = \mathbb{R}$

Horizontales Por simetría basta calcular un límite o bien cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \stackrel{(1)}{=} \frac{\infty}{\infty} 1$$

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal de la función $f(x)$

- (1) La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en cociente de polinomios del mismo grado, su límite es igual al cociente de los coeficientes de los monomios de mayor grado

Oblicuas Al tener asíntota horizontal, la función NO tiene asíntotas oblicuas.

- Corte, si hay, de la asíntota horizontal y la función. Resolver el sistema formado por las dos funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Función } y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \\ \text{Asíntota } y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 - 3 = x^2 + 1 \Rightarrow -3 = 1$$

NO TIENE CORTE ENTRE LA GRÁFICA Y LA ASÍNTOTA HORIZONTAL

- Tabla de valores. Por ser la función par:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x)$	-3.0	-2.2	-1	-0.2308	0.2	0.4483	0.6	0.6981

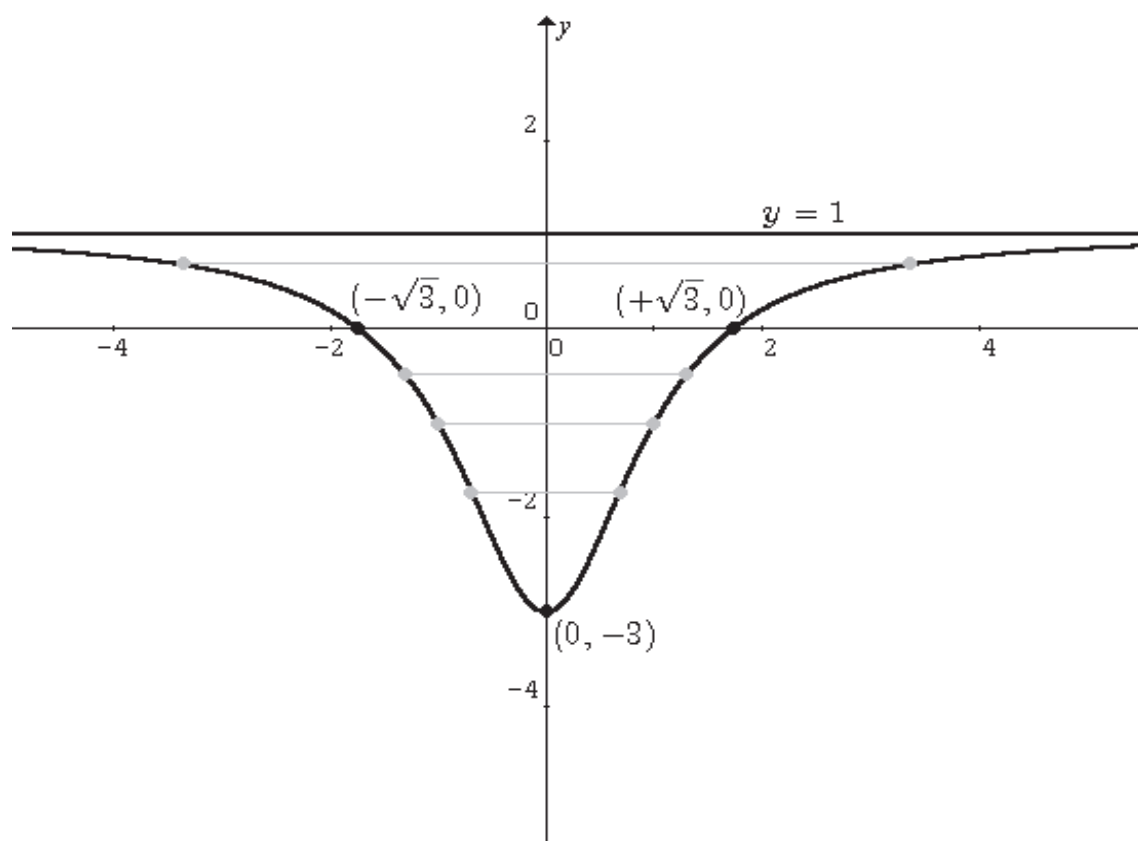


Figura 3.7: Gráfica de la funciones $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}$$

- Dominio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Simetrías, si existen: El dominio NO es simétrico respecto al origen, por lo tanto la función NO presenta simetrías.
- Cortes con los ejes de coordenadas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de abscisas } \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 9}{x - 2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3, 0) \\ (-3, 0) \end{array} \right\} \\ \text{Eje de ordenadas } \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 9}{x - 2} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x = 0) = \frac{0 - 9}{0 - 2} = -3 \Rightarrow \left(0, \frac{9}{2} \right) \end{array} \right\}$$

- Estudio de las asíntotas de la función.

Verticales $2 \notin D_f$ y la función está definida en un entorno de 2 (hay función por la izquierda y la derecha). Hallamos los límites laterales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 - h)^2 - 9}{2 - h - 2} = \frac{-5}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - 9}{2 + h - 2} = \frac{-5}{+0} = -\infty \end{array} \right\} \text{ entonces}$$

La recta $\boxed{x = 2}$ es asíntota vertical de la función

El signo del infinito nos indica por dónde está la gráfica de la función respecto de la asíntota vertical.

Horizontales $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x - 2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\infty}{\infty}$

- (1) La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en cociente de polinomios donde el grado del polinomio numerador es mayor que el del denominador, tiende al infinito.

Oblicuas El $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x)) + 1$ por lo tanto la función tiene una asíntota oblicua de ecuación:

$$\begin{array}{r} x^2 \quad -2 \mid x + 2 \\ -x^2 \quad +2x \quad -9 \\ \hline 2x \quad -9 \\ -2x \quad +4 \\ \hline -5 \end{array} \Rightarrow \frac{x^2 - 9}{x + 2} = \boxed{x + 2} + \frac{-5}{x - 1}$$

La recta $\boxed{y = x + 2}$ es la asíntota oblicua de la función.

- Corte, si hay, de la asíntota oblicua y la función. Resolver el sistema formado por las dos funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Función } y = \frac{x^2 - 9}{x - 2} \\ \text{Asíntota } y = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 9}{x - 2} = x + 2 \Rightarrow x^2 - 9 = x^2 - 4 \Rightarrow -9 = -4$$

NO HAY CORTE ENTRE LA GRÁFICA Y LA ASÍNTOTA HORIZONTAL

x	$f(x)$
-4	-1.167
-3	0
-2	1.25
-1	2.667
0	4.5
1	8
3	0
4	3.5

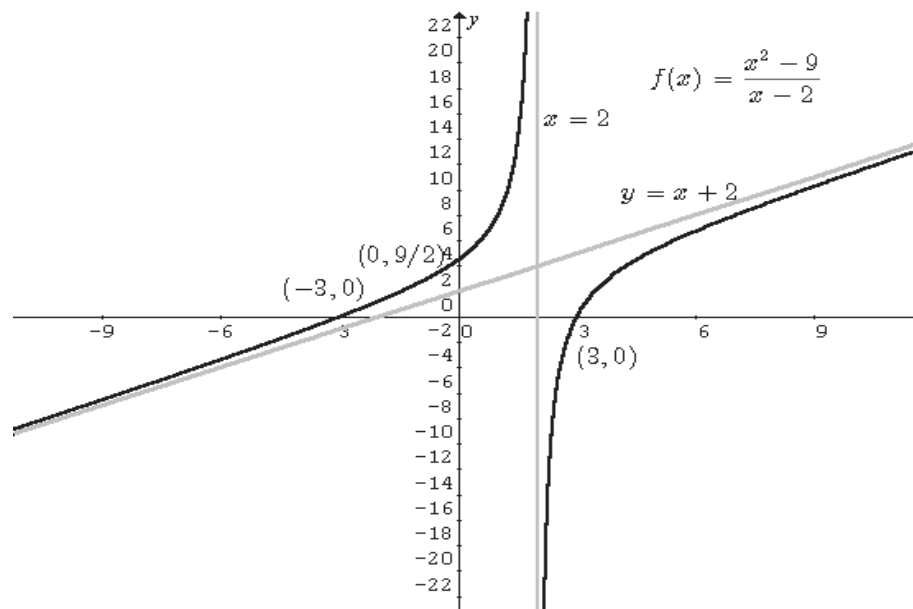


Figura 3.8: Gráfica de la funciones $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}$

3. $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$

- Dominio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
- Simetrías, si existen: El dominio NO es simétrico respecto al origen, por lo tanto la función NO presenta simetrías.
- Cortes con los ejes de coordenadas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eje de abscisas } \left\{ y = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} \right\} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \Rightarrow (-\frac{3}{2}, 0) \\ x = 2 \notin D_f \end{array} \right. \\ \text{Eje de ordenadas } \left\{ y = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} \right\} \Rightarrow f(x = 0) = \frac{0 - 6}{0 - 2} = 3 \Rightarrow (0, 3) \end{array} \right\}$$

Para $x = 2$ se anulan tanto el numerador como el denominador.

- Estudio de las asíntotas de la función.

Verticales $-1, 2 \notin D_f$ y la función está definida en un entorno de 2 (hay función por la izquierda y la derecha). Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 3)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{x + 1} = \frac{7}{3}$$

- (1) La indeterminación $\frac{0}{0}$ en un cociente de polinomios cuando x tiende a un valor finito: descomposición factorial de los polinomios.
- (2) El factor $x - 2$ es no nulo en un entorno de 2: simplificamos.

La función $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$ **y** $g(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$ **tienen el mismo comportamiento, excepto en** $x = 2$. Dibujamos la gráfica de la función $g(x)$ con un punto menos: $x = 2$. La función $g(x)$ es de proporcionalidad inversa: dos polinomios de grado uno.

– Dominio $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

– División:
$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x+1 \\ -2x-2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2 + \frac{1}{x+1} \quad \begin{cases} k_1 = -1 \text{ Asíntota vertical } x = -1 \\ k_2 = 2 \text{ } \uparrow \text{ asíntota horizontal } y = 2 \end{cases}$$

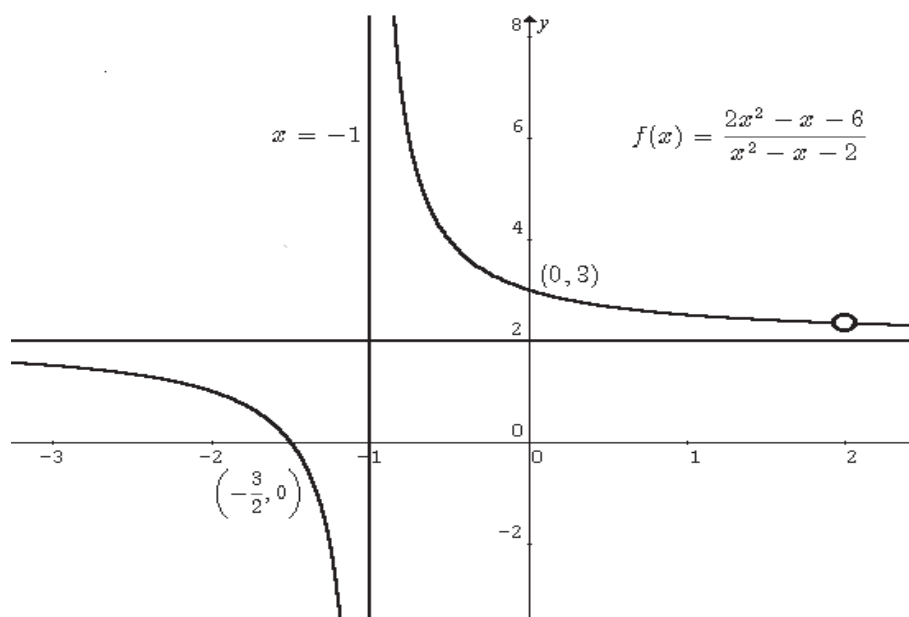


Figura 3.9: $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$

3.8 Número e

En los cursos anteriores se ha utilizado un número irracional que se representa por la letra griega π , importante en el cálculo de áreas, volúmenes de figuras geométricas.

En este curso introduciremos el número e , inicial del matemático alemán: Euler. El número e se emplea en ciencias sociales (crecimiento de la población), estadística, ingeniería, física, etc.

Está fuera del contenido del curso de primero de bachillerato la deducción matemática del número e .

Consideremos la función

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

una tabla de valores es la adjunta.

Cuanto mayor se hace n sus imágenes se acercan a un número 2.71828182..., el límite de las imágenes es el *número e* .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

n	$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.5937
20	2.6533
30	2.6743
40	2.6851
50	2.6916
60	2.696
100	2.7048
200	2.7115
300	2.7138
400	2.7149
500	2.7156
600	2.716
700	2.7163
800	2.7166
900	2.7168
1000	2.7169239322358924573
10^5	2.7182682371744896710
10^6	2.7182804693193769050
10^7	2.7182816925449662712
10^8	2.7182818148676361950
10^9	2.7182818270999043221
10^{12}	2.7182818284590452353
10^{20}	2.718281828459045235346696062210367271580

El número e aproximado con doscientos decimales, infinitas cifras decimales sin periodicidad, es un número irracional

$$e \approx 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630 \\ 353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334 \\ 2952605956307381323286279434907632338298807531952510190$$

Consideremos las funciones siguientes: $F(x) = \left[f(x)\right]^{g(x)}$, son funciones reales de variable real con las siguientes características:

DOMINIO Al ser una función real, la base NO PUEDE TOMAR VALORES NEGATIVOS NI NULOS, su imagen podía tomar valores complejos o no tener imagen real, implica:

$$D_F = D_f \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap D_g$$

RECORRIDO Las imágenes son siempre mayores de cero.

$$\text{Im } F \subseteq \mathbb{R}_*^+$$

Ejemplos: Hallar los dominios de las funciones:

1. $f(x) = x^x$. El exponente es una función polinómica de dominio $\mathbb{R}$, entonces:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty)$$

2. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. El exponente dominio $\mathbb{R}$, por lo tanto:

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\right\} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \geq 0 \Rightarrow$$

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$



Límites de funciones: $\left(f(x)\right)^{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}, f(x) > 0, \forall x \in D_f$					
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	0	$0 < l < 1$	1	$l > 1$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$					
$m \neq 0$	$m > 0$ $m < 0$	l^m	1	l^m	$m > 0$ $m < 0$
0	ind	1	1	1	ind
$+\infty$	0	0	ind	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ind	0	0

INDETERMINACIONES ASOCIADAS:

$$1^{\pm\infty}$$

$$+0^0$$

$$+\infty^0$$

La función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando $x \rightarrow +\infty$ presenta la indeterminación 1^∞ y por definición del número e : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

LA DEFINICIÓN DEL NÚMERO e NOS AYUDARÁ A RESOLVER: $1^{\pm\infty}$. NO ES EL NÚMERO e

Geométricamente: la recta $y = e$ es asíntota horizontal de la función cuando $x \rightarrow +\infty$.

Límites asociados a la definición del número e

- Sea $k \in \mathbb{R}^*$ entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x &\stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{k \cdot x}{k}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k} \cdot k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k \stackrel{(1)}{=} e^k \end{aligned}$$

$$\text{Caso particular } k = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^{-\infty}$ INDeterminación Es correcto hallar el límite $x \rightarrow -\infty$ teniendo en cuenta el dominio de la función ya calculado.

Efectuaremos un cambio de variable $x = -t$ es decir $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{(2)}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-t}\right)^{-t} \stackrel{1+\infty}{\stackrel{(1)}}{=} e \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ INDeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \stackrel{(3)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \stackrel{(1)}{=} e$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

(1) Por la definición del número e .

(2) Cambio de variable $x = -t$.

(3) Cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ entonces $t \rightarrow \infty$

- En general si $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$ y $k \neq 0$ entonces:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e^k} \quad (3.2)$$

Ejercicios: Calcular lo siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 4}{x + 1}\right)^{-x^2+1} \stackrel{(1)}{=} \left(+\infty\right)^{-\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}\right)^{\frac{-x^2+2}{x^2}} \stackrel{(1)}{=} \left(+0\right)^{-1} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} \right)^{-x+3} \stackrel{(1)}{=} 1^{+\infty} \text{ INDeterminación.}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} \right)^{-x+3}} \stackrel{(2)}{=} \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{3x^2 + 3x + 2}{-x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{1} \Rightarrow \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} = \boxed{1} + \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \\ & \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} - 1 = 1 + \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \boxed{1} + \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \end{aligned} \right\} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \right)^{-x+3} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3x + 1}} \right)^{\frac{x^2 + 1}{3x + 1} \cdot (-x+3)} \right] = \\ & = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3x + 1}} \right)^{\frac{x^2 + 1}{3x + 1}} \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{x^2 + 1} \cdot (-x + 3) \right) \stackrel{(4)}{=} \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 + 8x + 3}{x^2 + 1} \right)} \stackrel{(1)}{=} e^{-3} = \boxed{\frac{1}{e^3}} \end{aligned}$$

(1) Límites de cociente de polinomios cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Comparar los monomios de mayor grado.

(2) Dividir los polinomios o sumar y restar la unidad.

(3) Límite general para el número e (3.2)

(4) Por la definición del número e .

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 - 3x + 3 \right)^{\frac{x+3}{x-2}} = 1^{\infty} \text{ INDeterminación.}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \left(x^2 - 3x + 3 \right)^{\frac{x+3}{x-2}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + x^2 - 3x + 3 - 1 \right)^{\frac{x+3}{x-2}} \stackrel{(5)}{=} \stackrel{(3)}{=} \\ & = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(1 + [x^2 - 3x + 2] \right)^{\frac{1}{x^2 - 3x + 2}} \right]^{(x^2 - 3x + 2) \cdot \frac{x+3}{x-2}} \stackrel{(4)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (x + 3)}{x - 2}} \stackrel{(6)}{=} \frac{0}{0} \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)(x + 3)}{x - 2}} = \boxed{e^5} \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$$

(6) La indeterminación $\frac{0}{0}$ en un cociente de polinomios: descomponer los polinomios y simplificar el factor, no nulo, $x - 2$

Gráfica de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Aplicando los resultados de los apartados anteriores:

Dominio $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Recorrido $\text{Im } f \subseteq \mathbb{R}_*^+$

Cortes con los ejes • Por el recorrido de la función, 0 no tiene antiimagen $\Rightarrow$ no corta al eje de abscisas.

• Por el dominio el 0 no tiene imagen $\Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas

Asíntotas Verticales La función *se acerca* al 0 por su DERECHA y a -1 por su IZQUIERDA

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (+0)^{-1} = \frac{1}{+0} = +\infty \Rightarrow \text{La recta } x = -1 \text{ A.V. por la izquierda}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{(1)}{=} 1 \text{ límite finito}$$

(1) La indeterminación es $+\infty^0$, en cursos posteriores se calculará este tipo de indeterminaciones. En este caso el límite vale 1.

Horizontales La recta $y = e$ es la asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

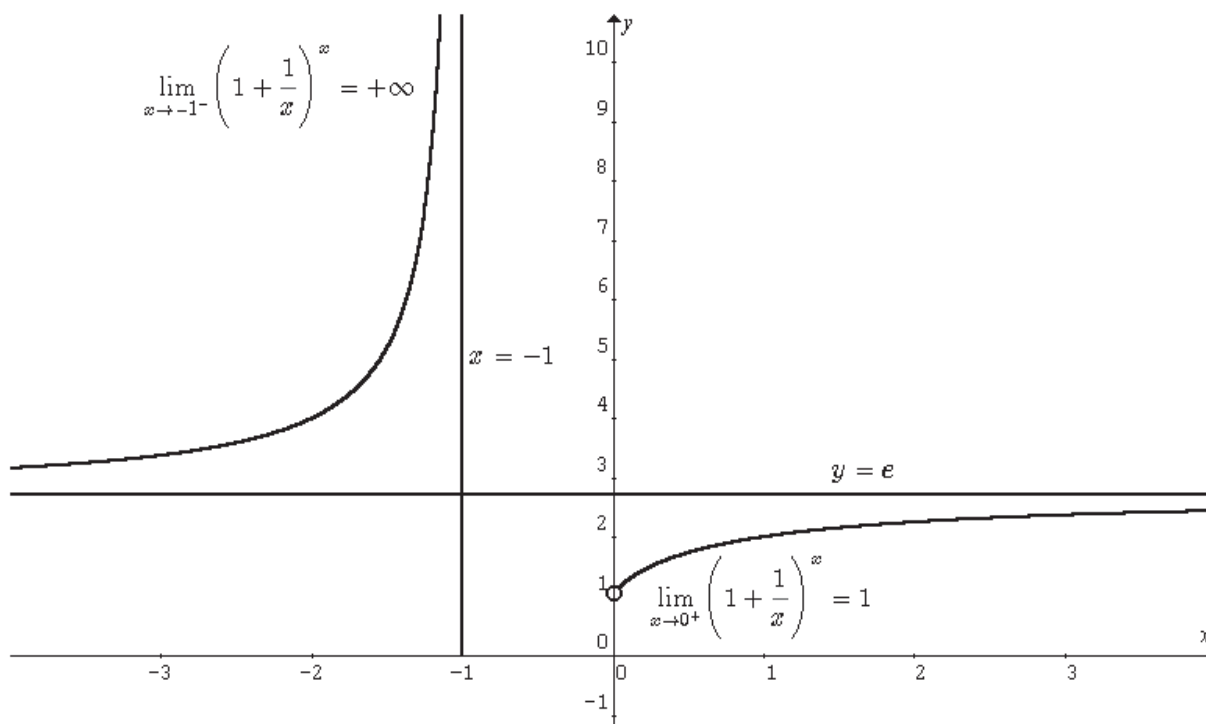


Figura 3.10: Gráfica de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Fórmula de Euler: Una de las fórmulas que relaciona los números y operaciones más importantes de la Matemática la demostró Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Números: $\left\{ \begin{array}{l} \text{La unidad: } 1 \\ \text{Unidad imaginaria: } i \\ \text{Elemento neutro: } 0 \\ \text{Número irracional: } \pi \\ \text{Número de Euler: } e \end{array} \right.$

Operaciones: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma} \\ \text{Producto} \\ \text{Potencial} \end{array} \right.$
