

Consideremos una función f cuya gráfica es:

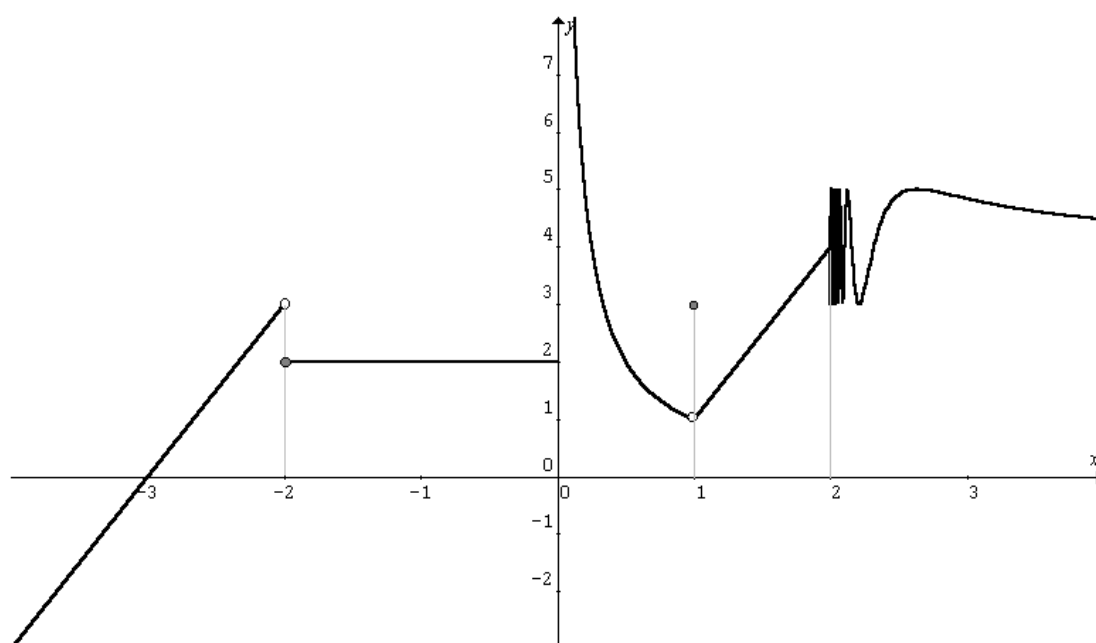


Figura 4.1:

Podemos afirmar aplicando límites:

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3 \\ \exists \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \\ \nexists \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{cases}$$

Para el resto de valores del dominio de la función: $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Parece necesario definir un nuevo concepto que imponga alguna condición más, que nos permita dirimir entre todos los casos expuestos gráficamente.

Definición 4.1 (Función continua en un punto). Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ $\begin{matrix} x & \longmapsto & f(x) \end{matrix}$ diremos que la función es continua en a si cumple las siguientes condiciones:

$$(1) \ a \in D_f \qquad (2) \ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \qquad (3) \ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

La tercera condición engloba a las dos anteriores.

Definición 4.2. La función f es continua en $a \iff \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \exists \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$

La equivalencia entre las definiciones es trivial.

A la vista de la gráfica podemos afirmar:

Punto -2, los límites laterales son distintos $\implies$ no existe el límite $\implies$ **NO es continua** en -2

Punto 0, los límites laterales son distintos y uno tiende a infinito $\implies$ **NO es continua** en 0

Punto 1, los límites laterales son iguales $\implies$ existe el límite y es igual a 1 $\implies$ **NO es continua** en 1 por que no es igual a la imagen de la función $f(1) = 3$

Punto 2, el límite lateral por la izquierda existe y es igual a 4. El límite lateral por derecha NO EXISTE $\implies$ **NO es continua** en 2.

Proposición 4.1 (Relación entre límite y continuidad). Si f es continua en a entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. El recíproco en general NO es cierto.

Demostración: Si la función es continua por definición de continuidad (4.1) existe el límite y además es igual a $f(a)$.

Recíproco. En la gráfica en el punto 1 existe el límite pero no es continua.

La continuidad además de saber qué le pasa en el entorno del punto a , si existe el límite debe ser igual a la imagen de a .

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

¿Qué diferencia hay entre la definición de continuidad y la de límite? ¿Por qué?

4.1 Álgebra de funciones continuas

Sea f y g continuas en a , entonces:

- La función suma(diferencia), $f \pm g$, es continua en a .
- La función producto de un escalar, k , por una función es continua en a .
- La función producto, $f \cdot g$, es continua en a .
- Si $g(a) \neq 0$ la función cociente, $\frac{f}{g}$, es continua en a .
- Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$ entonces la función composición $g \circ f$ es continua en a .

Las demostraciones se basan en la teoría de límites y en la definición de continuidad.

La definición de continuidad es puntual, en el punto a . Para cada valor del dominio de una función hay que aplicar la definición.

Definición 4.3 (Continuidad en un intervalo). Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\begin{matrix} x & \longmapsto & f(x) \end{matrix}$ es continua en el intervalo $[a, b]$ si:

$\forall c \in (a, b) \exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (Es continua en los puntos del interior del intervalo dado)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Ejercicio: La función cuya gráfica es la figura(4.1) es continua en $[-2, 1]$. ¿Por qué?. ¿Y en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$? Razona las respuestas.

Continuidad de las funciones elementales

Funciones polinómicas El $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ por lo tanto los polinomios son continuas en su dominio máximo $\mathbb{R}$.

Funciones racionales El $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}$. El cociente de polinomios es continua en su dominio máximo.

Funciones irracionales Consideremos $f(x) = P(x)$ y $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $\boxed{\text{si } P(a) \in D_h}$ entonces el $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(a)}$, por lo tanto la función es continua.

4.2 Discontinuidad

Definición 4.4 (Discontinuidad). Si la función NO es continua en a diremos que la función presenta una discontinuidad en dicho punto.

La función cuya gráfica es la figura(4.1) presenta DISCONTINUIDADES en los puntos: -2 , 0 , 1 y 2 . En todos ellos no se cumple la definición de continuidad pero por distintos motivos. Son puntos de discontinuidad pero diferentes.

Tipos de discontinuidad

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función:

$$x \longmapsto f(x)$$

Definición 4.5 (Discontinua evitable). La función f presenta en a una discontinuidad evitable si

$\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow a} (x)}$ y:

- $a \notin D_f$
- ó
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

Ejemplo: La función de la gráfica(4.1) en el punto 1 presenta una discontinuidad evitable:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \boxed{1} \\ f(1) = \boxed{2} \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(1)$$

Definición 4.6 (Discontinua esencial de primera especie finita). La función f presenta en a una discontinuidad esencial de primera especie finita si existen los dos límites laterales son FINITOS pero distintos.

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
- $l_1 \neq l_2 \implies \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Se llama **salto de la función** a la diferencia: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Ejemplo: La función de la gráfica(4.1) en el punto -2 presenta una discontinuidad esencial de primera especie finita:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \boxed{3} \\ \exists \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \boxed{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

Definición 4.7 (Discontinua esencial de primera especie asintótica). La función f presenta en a una discontinuidad esencial de primera especie asintótica si se cumple, al menos, una de las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Al menos, uno de los límites laterales tiende al infinito. La recta $x = a$ es asíntota vertical o por la izquierda, o por la derecha, o por ambos lados.

Ejemplo: La función de la gráfica(4.1) en el punto 0 presenta una discontinuidad esencial de primera especie asintótica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \boxed{2} \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \boxed{+\infty} \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ y un límite lateral tiende a } +\infty$$

Definición 4.8 (Discontinua esencial de segunda especie). La función f presenta en a una discontinuidad esencial de segunda especie si se cumple, al menos, una de las siguientes condiciones:

- $\nexists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- $\nexists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Al menos, uno de los límites laterales no existe. Está definida la función, pero el límite no existe.

Ejemplo: La función de la gráfica(4.1) en el punto 2 presenta una discontinuidad esencial de segunda especie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{4} \\ \boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Ejercicios: Estudiar la continuidad y clasificar los puntos de discontinuidad de las funciones:

(1) $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$ La función es racional.

Domínio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

La continuidad se puede razonar de dos formas:

- Por definición: $\forall a \in D_f, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ La función es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
- Por las propiedades. La función f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, por ser cociente de dos funciones continuas (polinómicas) en todos los puntos excepto los valores que anulen el denominador.

Discontinuidades:

- En $x = -2$. Hallamos el límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 5x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x^2 + x - 3)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 3}{(x + 2)(x - 2)} = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Existe el límite en $x = -2$ y es finito. La función presenta una **discontinuidad evitable** en $x = -2$

- (1) Descomponemos por Ruffini: $P(x)$

2	5	-1	-6
-2	-4	-2	6
2	1	-3	0
-2	-4	6	
2	-3	3	

. Por el teorema del resto

$$\begin{array}{r|rrrr} P(x) & 2 & 5 & -1 & -6 \\ & -2 & & & \\ \hline P_1(x) & 2 & 1 & -3 & 0 \\ & -2 & & & \\ \hline & 2 & -3 & 3 & \end{array}$$

$$P_1(x = -2) = 3$$

El denominador: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

- (2) Simplificamos el factor no nulo $x + 2$.

- En $x = 2$. Hallamos el límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 5x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \frac{28}{0} = \infty$. Si fuese necesario se calculan los límites laterales para establecer cuando tiende a $+\infty$ y $-\infty$. La función presenta una **discontinuidad esencial asíntótica** en $x = 2$. La recta $x = 2$ es A.V. de la función.

$$(2) f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = 2x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ f_3(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Es una función a trozos, su dominio es la unión de los subdominios: $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{f_1} = \{\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}\} \cap \{x < 0\} = (-\infty, 0) \setminus \{-1\} \\ D_{f_2} = [0, 2) \text{ es un polinomio} \\ D_{f_3} = \{\mathbb{R} \setminus \{-4\}\} \cap \{x \geq 2\} = [2, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

La función, por dominio, es discontinua en $x = -1$. Además por ser a trozos, los puntos donde por la izquierda y derecha hay funciones distintas puede presentar discontinuidades. En nuestro caso $x = 0$ y $x = 2$. En el resto de su dominio es continua por ser funciones continuas u operaciones con funciones continuas.

- En $x = -1$, límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 4)}{x(x + 1)} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 4}{x} = 5\end{aligned}$$

Existe el límite en $x = -1$ y es finito. La función presenta una **discontinuidad evitable** en $x = -1$

- (1) Descomponemos los polinomios: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) \\ x^2 + x = x(x + 1) \end{cases}$
- (2) Simplificamos el factor no nulo: $x + 1$. Y hallamos el límite.

- En $x = 0$. Cambio de función, límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f_1(0 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h - 4}{(-h)(-h + 1)} = \frac{-4}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f_2(0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2(0 + h) + 3 = 3\end{aligned}$$

El límite lateral por la izquierda tiende a $+\infty$, la función presenta una **discontinuidad esencial asintótica** en $x = 0$. La recta $x = 0$ es A.V. de la función por la izquierda.

- En $x = 2$. Cambio de función, límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_2(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2(2-h) + 3 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_3(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 3}{2+h+4} = \frac{1}{6}$$

Existen los límites laterales finitos, distintos. La función presenta una **discontinuidad esencial finita** en $x = 2$.

El salto de la función es: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{6} - 7 = -\frac{41}{6}$. El signo $\boxed{-}$ indica que la gráfica de la función BAJA $-\frac{41}{6}$.

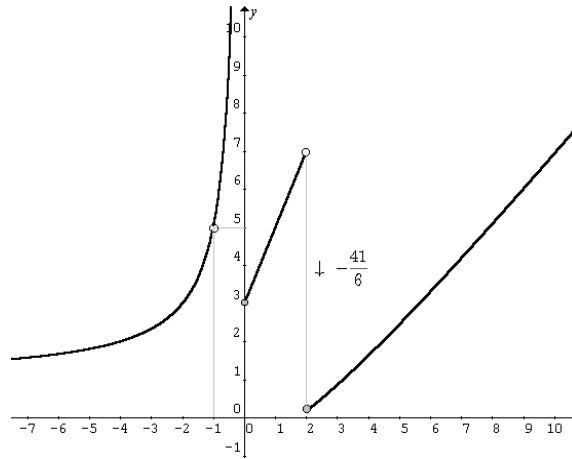


Figura 4.2: Gráfica de la función $f(x)$

- (3) Estudiar según los valores del parámetro k la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + k & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los reales, funciones polinómicas: $D_f = \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la función es siempre continua (funciones polinómicas).
- En $x = -1$, hay cambio de función, límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_1(-1-h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2(-1-h) + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f_2(-1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-1+h)^2 + k = k + 1$$

Por definición de continuidad:

$$f \text{ será continua en } -1 \iff \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = k$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \iff 1 = k + 1 \iff \boxed{k = 0}$$

Casos:

- $\forall k \neq 0$, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En $x = -1$ presenta una discontinuidad esencial finita (los límites laterales existen y son finitos).
- $k = 0$ entonces la función f es continua en $\mathbb{R}$.