

Continuidad de una función

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

23 de febrero de 2012

Definición de función continua

Definición I

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

❶ $a \in D_f$



Definición de función continua

Definición I

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

- 1 $a \in D_f$
- 2 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}.$



Definición de función continua

Definición I

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

- 1 $a \in D_f$
- 2 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}.$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = f(a).$



Definición de función continua

Definición I

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

- 1 $a \in D_f$
- 2 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}.$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = f(a).$

Definición II

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:



Definición de función continua

Definición I

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

- 1 $a \in D_f$
- 2 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}.$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = f(a).$

Definición II

Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, la función es continua en $x = a$ si verifica:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



Discontinuidad

Definición de discontinuidad.

Si una función NO es continua en $x = a$ entonces es discontinua en $a \in \mathbb{R}$

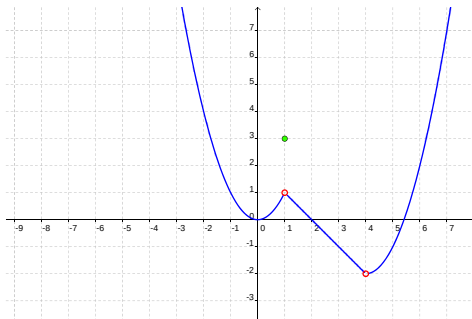
Definición de discontinuidad evitable

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua evitable** en $a \in \mathbb{R}$ si

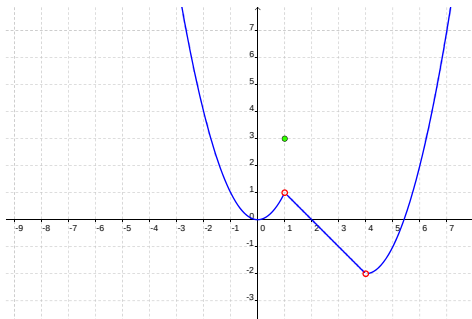
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{cases} a \notin D_f \\ \circ \\ \text{Si } a \in D_f \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \end{cases}$$



Ejemplo de discontinuidad evitable



Ejemplo de discontinuidad evitable



$$\begin{cases} 1 \in D_f \text{ y } f(1) = 3 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \notin D_f \\ \exists \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2 \end{cases}$$



Definición de discontinuidad de salto finito

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua de salto finito** en $a \in \mathbb{R}$ si existen los dos límites laterales son finitos pero distintos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ y \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \end{array} \right. \implies \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



Definición de discontinuidad de salto finito

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua de salto finito** en $a \in \mathbb{R}$ si existen los dos límites laterales son finitos pero distintos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ y \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \end{array} \right. \implies \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Definición de salto

Si en $x = a \in \mathbb{R}$ presenta una discontinuidad de salto, se llama salto de la función a la diferencia entre el límite por la derecha y el límite por la izquierda.



Definición de discontinuidad de salto finito

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua de salto finito** en $a \in \mathbb{R}$ si existen los dos límites laterales son finitos pero distintos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ y \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \end{array} \right. \implies \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

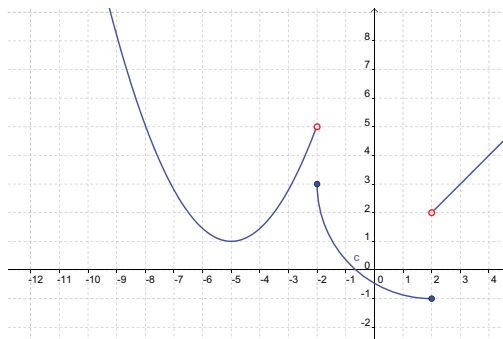
Definición de salto

Si en $x = a \in \mathbb{R}$ presenta una discontinuidad de salto, se llama salto de la función a la diferencia entre el límite por al derecha y el límite por la izquierda.

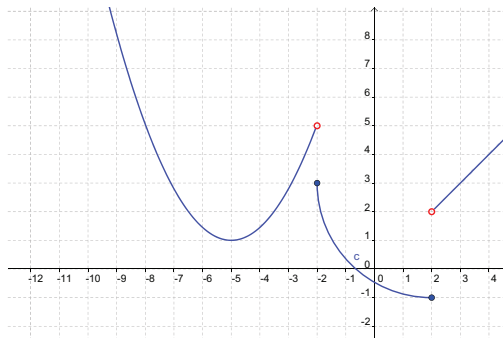
$$\Delta f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = m - l$$



Ejemplo de discontinuidad de salto



Ejemplo de discontinuidad de salto



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3 \\ \text{Salto: } \Delta f = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \\ \text{Salto: } \Delta f = 2 - (-1) = 3 \end{cases}$$



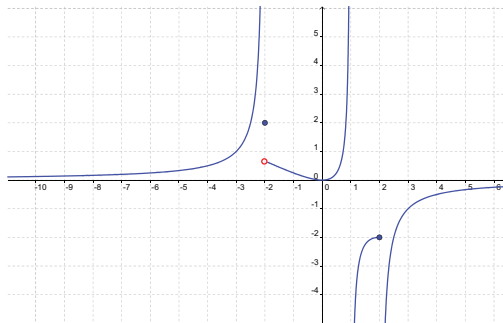
Definición de discontinuidad asintótica

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **discontinua asintótica** en $a \in \mathbb{R}$ si, al menos, UNO de los límites laterales tiende a INFINITO

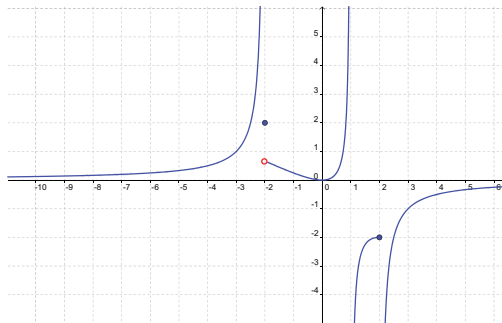
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases}$$



Ejemplo de discontinuidad asintótica



Ejemplo de discontinuidad asintótica



$$\begin{cases} -2 \in D_f \text{ y } f(-2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \notin D_f \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \in D_f \text{ y } f(2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2-4} & \text{si } -2 < x < 1 \\ \frac{x^2-x}{x+5} & \text{si } 1 < x < 5 \\ \frac{20}{x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$, estudiar y clasificar las discontinuidades en los puntos $x = -2$, $x = 1$ y $x = 5$.

El dominio de la función es: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Por definición en ambos valores hay discontinuidad.



1 En $x = -2$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2 - h) + 3}{\cancel{-2 - h} \cancel{+ 2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h - 1}{-h} = \\ &= \frac{-1}{-0} = \boxed{\boxed{+\infty}}\end{aligned}$$



1 En $x = -2$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2 - h) + 3}{\cancel{-2 - h} + \cancel{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h - 1}{-h} = \\ &= \frac{-1}{-0} = \boxed{\boxed{+\infty}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 + h)^2 + (-2 + h) - 2}{(-2 + h)^2 - 4} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h^2 - 4h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(h - 3)}{\cancel{h}(h - 4)} = \frac{-3}{-4} = \boxed{\boxed{\frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

El límite lateral por la izquierda tiende a $+\infty$ y por la derecha es finito:



1 En $x = -2$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2 - h) + 3}{\cancel{-2 - h} \cancel{+ 2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h - 1}{-h} = \\ &= \frac{-1}{-0} = \boxed{\boxed{+\infty}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-2 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 + h)^2 + (-2 + h) - 2}{(-2 + h)^2 - 4} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h^2 - 4h} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{IND}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(h - 3)}{\cancel{h}(h - 4)} = \frac{-3}{-4} = \boxed{\boxed{\frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

El límite lateral por la izquierda tiende a $+\infty$ y por la derecha es finito:

Conclusión

En $x = -2$ la función presenta una discontinuidad ASINTÓTICA.



2 En $x = 1$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - h)^2 + (1 - h) - 2}{(1 - h)^2 - 4} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 4} = \\ &= \frac{0}{-3} = \boxed{\boxed{0}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - (1 + h)}{(1 + h) + 5} = \frac{1 - 1}{1 + 5} = \frac{0}{6} = \boxed{\boxed{0}}$$

Existen los límites laterales son iguales y finitos:

$$\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ y } 1 \notin D_f}$$



2 En $x = 1$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - h)^2 + (1 - h) - 2}{(1 - h)^2 - 4} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 4} = \\ &= \frac{0}{-3} = \boxed{\boxed{0}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - (1 + h)}{(1 + h) + 5} = \frac{1 - 1}{1 + 5} = \frac{0}{6} = \boxed{\boxed{0}}$$

Existen los límites laterales son iguales y finitos:

$$\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ y } 1 \notin D_f}$$

Conclusión

En $x = 1$ la función presenta una discontinuidad EVITABLE.



3 En $x = 5$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(5 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 - h)^2 - (5 - h)}{(5 - h) + 5} = \frac{25 - 5}{5 + 5} = \\ &= \frac{20}{10} = \boxed{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(5 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20}{5 + h} = \frac{20}{5} = \boxed{4}$$

Existen los límites laterales son finitos pero distintos:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$



8 En $x = 5$ los límites laterales son:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(5 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 - h)^2 - (5 - h)}{(5 - h) + 5} = \frac{25 - 5}{5 + 5} = \\ &= \frac{20}{10} = \boxed{\boxed{2}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(5 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20}{5 + h} = \frac{20}{5} = \boxed{\boxed{4}}$$

Existen los límites laterales son finitos pero distintos:

$$\boxed{\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)}}$$

Conclusión

En $x = 5$ la función presenta una discontinuidad de SALTO FINITO y el salto $\Delta f = 4 - 2 = 2$