

Asíntotas de una función

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

7 de marzo de 2012

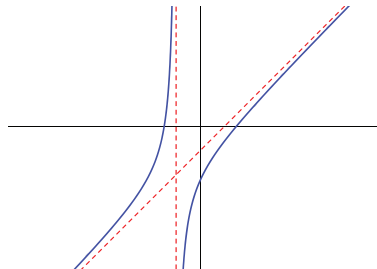
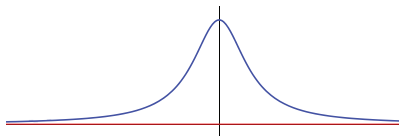


Definición (Ramas de una función)

Una $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una RAMA INFINITA cuando x , $f(x)$ o ambas crecen infinitamente. El punto $P(x, f(x))$ se aleja infinitamente.

Definición (Asíntotas de una función)

Si las ramas se aproximan a unas rectas entonces dichas rectas reciben el nombre de asíntotas de la función. Son las rectas tangentes a la gráfica en el infinito. La palabra en griego significa que no coincide.



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

3 ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

3 ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

3 ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas horizontales

Definición

La recta $y = b$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$



Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

3 ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas horizontales

Definición

La recta $y = b$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ó

Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

2 ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

3 ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Asíntotas horizontales

Definición

La recta $y = b$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL** de la función si:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ó

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$



Asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-12}$

El dominio de la función es:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - 12 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$. Los puntos de abscisa $x = -4$ y $x = 3$ son candidatos a discontinuidades asíntóticas.

Si $x = -4$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - h - 2}{(-4 - h + 4)(-4 - h - 3)} = \frac{-6}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 + h - 2}{(-4 + h + 4)(-4 + h - 3)} = \frac{-6}{-0} = +\infty$$

La recta

$$x = -4$$

es una asíntota vertical de la función.

Asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-12}$

El dominio de la función es:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - 12 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$. Los puntos de abscisa $x = -4$ y $x = 3$ son candidatos a discontinuidades asíntóticas.

Si $x = -4$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - h - 2}{(-4 - h + 4)(-4 - h - 3)} = \frac{-6}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 + h - 2}{(-4 + h + 4)(-4 + h - 3)} = \frac{-6}{-0} = +\infty$$

La recta $x = -4$ es una asíntota vertical de la función.

Si $x = 3$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(3 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - h - 2}{(3 - h + 4)(3 - h - 3)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(3 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + h - 2}{(3 + h + 4)(3 + h - 3)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la función.



Asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-12}$

Si $x \rightarrow -\infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2+x-12} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} = 0$$

La recta $y = 0$ es ASÍNTOTA HORIZONTAL cuando $x \rightarrow -\infty$.



Asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-12}$

Si $x \rightarrow -\infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2+x-12} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} = 0$$

La recta $y = 0$ es ASÍNTOTA HORIZONTAL cuando $x \rightarrow -\infty$.

Si $x \rightarrow +\infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+x-12} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} = 0$$

La recta $y = 0$ es ASÍNTOTA HORIZONTAL cuando $x \rightarrow +\infty$.

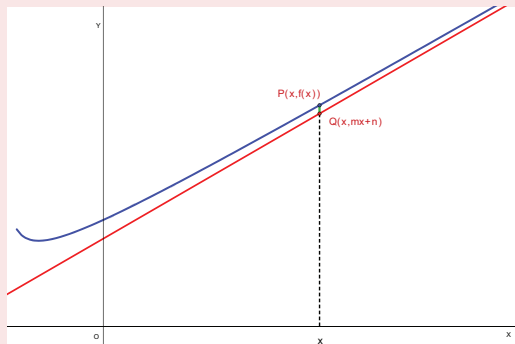


Si la función no posee asíntotas horizontales entonces puede tener asíntotas oblicuas.

Asíntota oblicua

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la función f si:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$



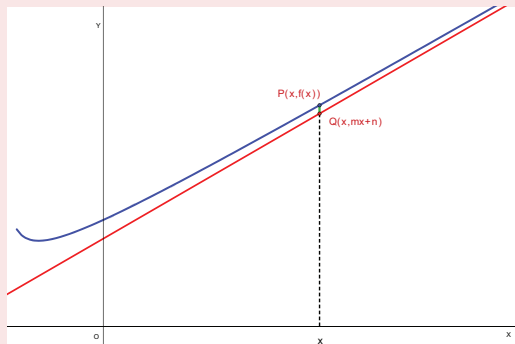
Si la función no posee asíntotas horizontales entonces puede tener asíntotas oblicuas.

Asíntota oblicua

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la función f si:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$

② ó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$



Asíntotas verticales: En primer lugar hay que estudiar la continuidad de la función y clasificar los puntos de discontinuidad. Los puntos donde la función presente DISCONTINUIDAD ASINTÓTICA permite calcular las rectas que son asíntotas verticales de la función. Una función $f(x)$ puede tener **infinitas** asíntotas verticales.



Asíntotas verticales: En primer lugar hay que estudiar la continuidad de la función y clasificar los puntos de discontinuidad. Los puntos donde la función presente DISCONTINUIDAD ASINTÓTICA permite calcular las rectas que son asíntotas verticales de la función. Una función $f(x)$ puede tener **infinitas** asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: Si la variable independiente x puede tender a $-\infty$ o $+\infty$ la función puede tener asíntotas horizontales. El número **MÁXIMO** es de **DOS**, una cuando $x \rightarrow -\infty$ y otra si $x \rightarrow +\infty$.



Asíntotas verticales: En primer lugar hay que estudiar la continuidad de la función y clasificar los puntos de discontinuidad. Los puntos donde la función presente DISCONTINUIDAD ASINTÓTICA permite calcular las rectas que son asíntotas verticales de la función. Una función $f(x)$ puede tener **infinitas** asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: Si la variable independiente x puede tender a $-\infty$ o $+\infty$ la función puede tener asíntotas horizontales. El número **MÁXIMO** es de **DOS**, una cuando $x \rightarrow -\infty$ y otra si $x \rightarrow +\infty$.

Asíntotas oblicuas: Siempre en el caso que **no tenga asíntotas horizontales**, es decir $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, la función

puede tener asíntotas oblicuas.



Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

❶ **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.



Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- 1 **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.
- 2 **Asíntotas horizontales y oblicua:**



Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- 1 **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.
- 2 **Asíntotas horizontales y oblicua:**

Si $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.



Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- 1 **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.
- 2 **Asíntotas horizontales y oblicua:**

Si $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta
 $y = \frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)}$ es asíntota horizontal.



Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- 1 **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.
- 2 **Asíntotas horizontales y oblicua:**

Si $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = \frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)}$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x) + 1)$ entonces se efectúa la división entre los polinomios y la recta $y = \text{polinomio cociente}$ es la asíntota oblicua de la función.



Caso particular, funciones $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- 1 **Asíntotas verticales:** Dominio de la función y continuidad.
- 2 **Asíntotas horizontales y oblicua:**

Si $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x))$ entonces la recta $y = \frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)}$ es asíntota horizontal.

Si $\text{grad}(P(x)) = \text{grad}(Q(x) + 1)$ entonces se efectúa la división entre los polinomios y la recta $y = \text{polinomio cociente}$ es la asíntota oblicua de la función.

Si $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x) + 2)$ entonces la función presenta ramas parabólicas en la dirección del eje de ordenadas.



Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

Dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.



Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

Dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

Asíntotas verticales



Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

Dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

Asíntotas verticales

Límites laterales en $x = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 - h) = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 + h) = \frac{-1}{-0} = +\infty$$



Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

Dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

Asíntotas verticales

Límites laterales en $x = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 - h) = \frac{-1}{+0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 + h) = \frac{-1}{-0} = \boxed{+\infty}$$

Límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \frac{+4}{-0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \frac{+4}{+0} = \boxed{+\infty}$$



Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

Dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

Asíntotas verticales

Límites laterales en $x = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 - h) = \frac{-1}{+0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 + h) = \frac{-1}{-0} = \boxed{+\infty}$$

Límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \frac{+4}{-0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \frac{+4}{+0} = \boxed{+\infty}$$



Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

Dominio de la función $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

Asíntotas verticales

Límites laterales en $x = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 - h) = \frac{-1}{+0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4 + h) = \frac{-1}{-0} = \boxed{+\infty}$$

Límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \frac{+4}{-0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \frac{+4}{+0} = \boxed{+\infty}$$

Las rectas $x = -4$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la función.

Asíntota horizontal de la función:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{\text{IND}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{x^2 + 3x - 4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{\text{IND}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = +\infty$$

La función no presenta asíntotas horizontales.



Asíntotas oblicuas

Efectuando la división:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 - 4x - 1 \overline{) x^2 + 3x - 4} \\ -2x^3 - 6x^2 + 8x \\ \hline x^2 + 4x - 1 \\ -x^2 - 3x + 4 \\ \hline x + 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \boxed{2x + 1} + \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \boxed{2x + 1} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \boxed{2x + 1} + \boxed{0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \boxed{2x + 1} \end{aligned}$$

La recta $y = 2x + 1$ es asíntota oblicua de la función.

