

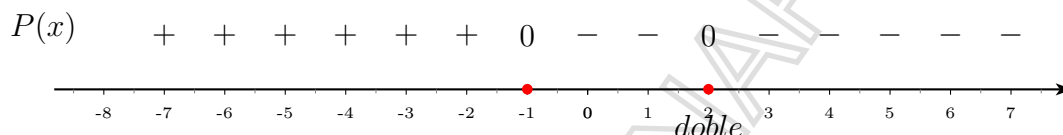
- ① Hallar, razonadamente, el dominio máximo de la función: $f(x) = \sqrt{-x^3 + 3x^2 - 4} + \sqrt{x+5}$.

La función $f(x)$ es la suma de dos funciones $f(x) = g(x) + h(x)$, aplicando la definición de suma de funciones $D_f = D_g \cap D_h$

- La función $g(x)$ es la raíz cuadrada DE un polinomio. Su dominio es:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 + 3x^2 - 4 \geq 0\}$$

La descomposición factorial del polinomio es: $P(x) = -(x+1)(x-2)^2$ y la solución de la inecuación:



$$D_g = (-\infty, -1] \cup \{2\}$$

- La función $h(x)$ es la raíz cuadrada DE un polinomio. Su dominio es:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid -x + 5 \geq 0\} = [-5, +\infty)$$

$$D_f = \{(-\infty, -1] \cup \{2\}\} \cap [-5, +\infty) = [-5, -1] \cup \{2\}$$

- ② (a) Definir la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7$ tal que posea recíproca (rama principal). Definir la función $f^{-1}(x)$.

La función es cuadrática y no es inyectiva. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 14) = \frac{1}{2}((x+3)^2 - 9 + 14) = \frac{1}{2}((x+3)^2 + 5) = \\ &= \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{5}{2} \Rightarrow V\left(-3, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f: [-3, +\infty) & \longrightarrow & \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \\ x \longmapsto & f(x) = & \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7 \end{array} \quad \text{es biyectiva}$$

Cálculo de las antiimágenes:

$$\frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{5}{2} = b \Rightarrow (x+3)^2 + 5 = 2b \Rightarrow (x+3)^2 = 2b - 5 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{2b - 5}$$

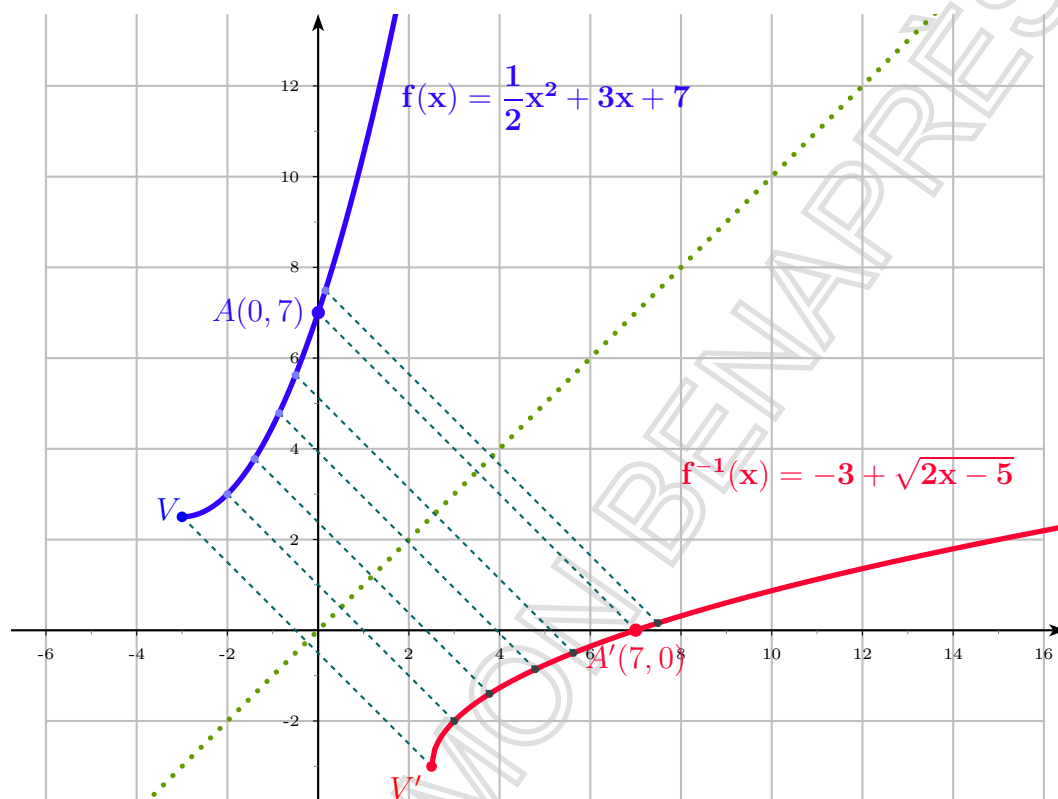
La función recíproca es:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) & \longrightarrow & [-3, +\infty) \\ x \longmapsto & f^{-1}(x) = & -3 \boxed{+} \sqrt{2x - \frac{5}{2}} \end{array}$$

(b) Dibujar la gráfica de la función $f(x)$.

La gráfica es una semiparábola de vértice $V\left(-3, \frac{5}{2}\right)$, el coeficiente cuadrático $a > 0 \Rightarrow \cup$ y $f(0) = 7$.

(c) Razonar la gráfica de la función $f^{-1}(x)$. Las gráficas de las funciones inversas son simétricas respecto la bisectriz del primer y tercer cuadrante (función identidad).



③ Sea la función $f(x)$ cuya gráfica es la adjunta:

(a) Hallar el dominio máximo de la función y su recorrido.

$$D_f = (-10, 7] \setminus \{-4, 3\}$$

$$Im_f = (-4.5, 4)$$

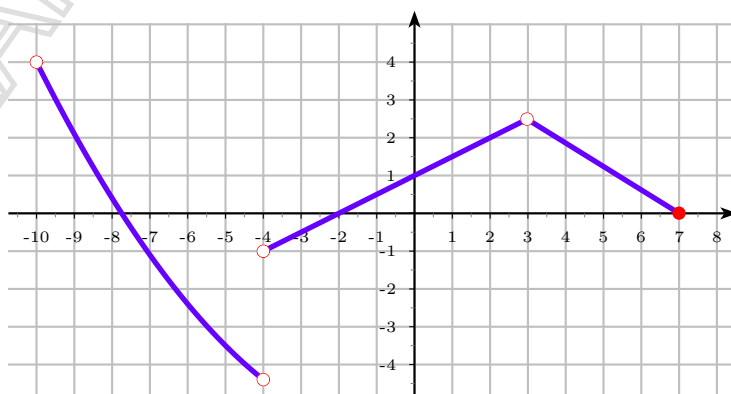
(b) Hallar, razonadamente y si existen, los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow -10^-} f(x)$. No se puede calcular el límite por la izquierda en un punto si no hay función definida a su izquierda.

(ii) $\lim_{x \rightarrow -10^+} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la derecha tienden a 4.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -10^+} f(x) = 4}$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -9} f(x)$. Los límites laterales existen y son iguales: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -9^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -9} f(x) = 2}$



(iv) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la izquierda tienden a $-4, 5$. $\boxed{\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -4, 5}$

(v) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la derecha tienden a -1 . $\boxed{\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -1}$.

De los apartados anteriores se deduce: $\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow -4} f(x)}$.

(vi) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Los límites laterales existen y son iguales: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1}$

(vii) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la izquierda tienden a $\frac{5}{2}$. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{5}{2}}$

(viii) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la derecha tienden a $\frac{5}{2}$. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{5}{2}}$.

De los apartados anteriores se deduce: $\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{5}{2}}$.

(ix) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x)$. El límite existe y las imágenes por la izquierda tienden a 0 . $\boxed{\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 0}$

(x) $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$. No se puede calcular el límite en un punto si no hay función definida ni a su izquierda ni a su derecha.