

① Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x+4} & \text{si } x < -4 \\ -3 & \text{si } x = -4 \\ \frac{1}{4}x^2 - 2 & \text{si } -4 < x < 2 \\ 4 - 2\sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases} :$

(a) Hallar el dominio máximo de la función.

Domínios de las funciones:

- Si $f_1(x) = \frac{-1}{x+4}$ entonces $Df_1 = \{x \in \mathbb{R} | x+4 \neq 0\} \cap (-\infty, -4) = (-\infty, -4)$
- Si $x = -4$ entonces $f(-4) = -3 \implies -4 \in D_f$
- Si $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ entonces $Df_2 = \mathbb{R} \cap (-4, 2) = (-4, 2)$.
- Si $f_3(x) = 4 - 2\sqrt{x-2}$ entonces $Df_3 = \{x \in \mathbb{R} | x-2 \geq 0\} \cap (2, +\infty) = (2, +\infty)$

El dominio de la función es:

$$D_f = D_{f_1} \cup \{-4\} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

(b) Calcular, **razonadamente**, los límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+4} = \frac{-1}{-\infty} = 0.$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$. Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{-4-h+4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{-h} = \frac{-1}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-4+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4}(-4+h)^2 - 2 \right] = 4 - 2 = 2$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Límites laterales:

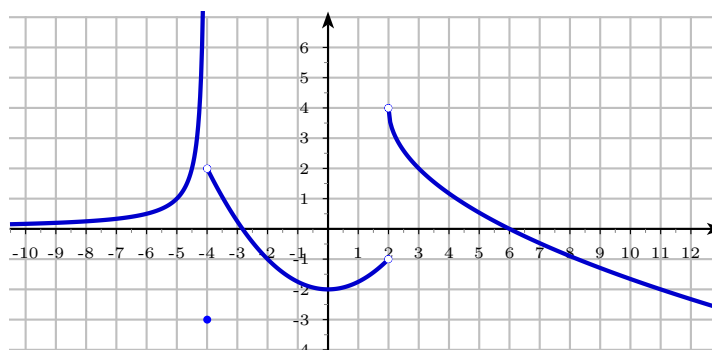
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4}(2-h)^2 - 2 \right] = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[4 - 2\sqrt{2+h-2} \right] = 4$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [4 - 2\sqrt{x-2}] = 4 - \infty = -\infty$

La gráfica de la función es:



② Calcular los límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}) = \infty - \infty$, indeterminación:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}) \cdot (\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3})}{(\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 4 - (x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 6x + 4 - \cancel{x^2} - 2x + 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 7}{\sqrt{x^2 - 6x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \frac{-8}{1 + 1} = -4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}) = -4}}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}}{3x^2 + 2x - 8} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9}}{12 - 4 - 8} = \frac{0}{0}$, indeterminación:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}}{3x^2 + 2x - 8} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x + 11})}{(3x^2 + 2x - 8) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x + 11})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 1} + \sqrt{x + 11}} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 1 - x - 11}{3x^2 + 2x - 8} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{3x^2 + 2x - 8} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x-6)}{\cancel{(x+2)} \cdot (3x-4)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-8}{-10} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 1} - \sqrt{x + 11}}{3x^2 + 2x - 8} = \frac{2}{15}}}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} - \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} \right) = \infty - \infty$, indeterminación. Suma de fracciones algebraicas, el m.c.m. de los denominadores es $x(x - 2)$:

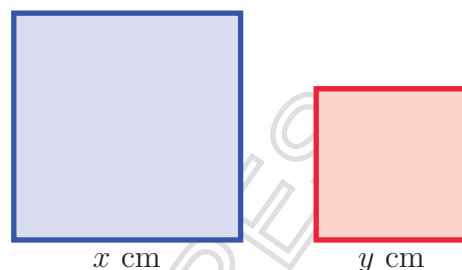
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} - \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 + 2x - 4) - (2x + 4)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 6x - 4}{x(x - 2)} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \underset{Ruffini}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 + 4x + 2)}{x \cdot \cancel{(x-2)}} = \frac{4 + 8 + 2}{2} = 7 \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} - \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} \right) = 7}}$$

- ③ Tenemos que construir dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado.

- (a) Definir la función que expresa el coste total de las dos chapas. Sean x cm e y cm los lados de los cuadrados. La primera restricción es $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

$$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \text{ euros}$$



- (b) El pedido impone la condición de que la suma de los perímetros de los cuadrados sea de un metro. Expresar la función **coste total** respecto una única variable independiente.

La suma de los perímetros es la ligadura entre las variables:

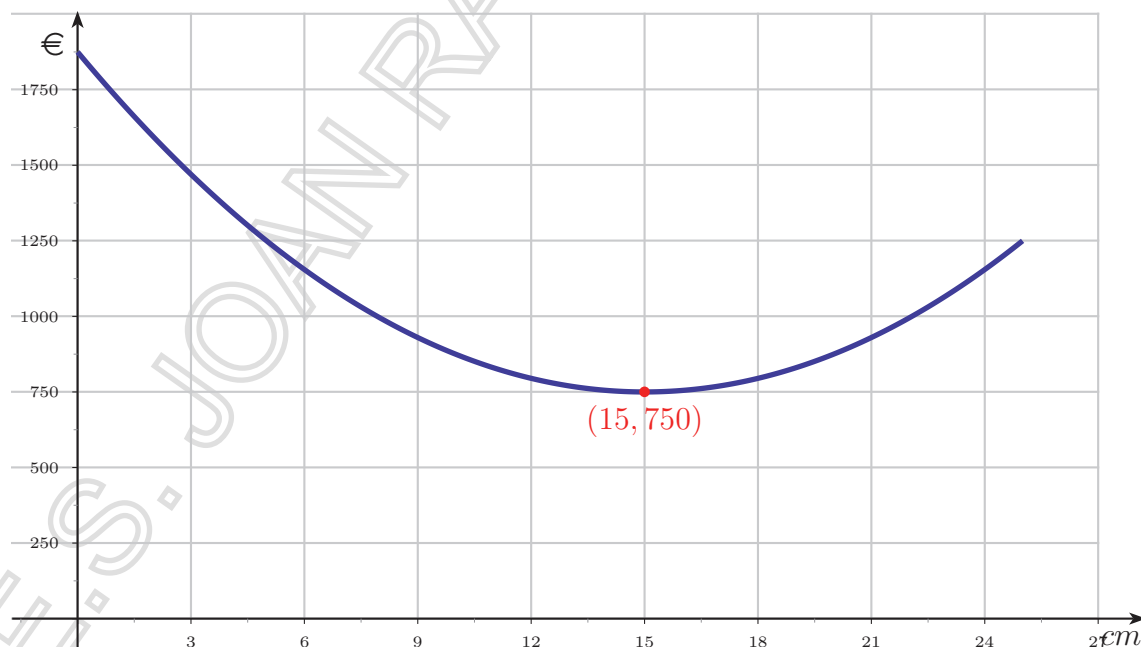
$$4x + 4y = 100 \implies x + y = 25 \implies y = 25 - x \implies \boxed{x \in [0, 25]}$$

$$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \implies C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 \implies C(x) = 5x^2 - 150x + 1875 ; D_C = [0, 25]$$

- (c) Representar la gráfica de la función y obtener las dimensiones de los cuadrados si el coste es **mínimo**. La función $C(x)$ es cuadrática y su coeficiente cuadrático positivo, la función alcanza un mínimo absoluto.

$$C(x) = 5x^2 - 150x + 1875 = 5(x^2 - 30x + 375) = 5((x - 15)^2 + 150) = 5(x - 15)^2 + 750$$

Las coordenadas del vértice de la parábola: $\boxed{V(15, 750)}$, su gráfica



Los lados de los cuadrados son $\boxed{\begin{cases} x = 15cm \\ y = 25 - 15 = 10cm \end{cases}}$ y el coste de la fabricación:

$C(x = 15) = 750$ euros. A la vista de la gráfica se observa que es el valor mínimo.