

5.1 Repaso de las potencias

Definición 5.1 (Potencias de exponente natural). Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se llama potencia de base a y exponente n , se denota a^n , al producto de la base (a) por si misma n veces.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^n$$

Propiedades

- $a^1 = a$
- $a^n \cdot b^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ si $n \geq m$ $\text{Si } n = m \implies a^0 = 1$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Definición 5.2 (Potencias de exponente entero). Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ se llama potencia de base a y exponente n , se denota a^n :

$$\begin{aligned} \text{Si } n > 0 \text{ entonces } a^n &= \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^n \\ \text{Si } n = 0 \text{ entonces } a^0 &= 1 \\ \text{Si } n < 0 \text{ } (-n > 0) \text{ entonces } a^n &= \frac{1}{a^{-n}} \quad \boxed{a \neq 0} \end{aligned}$$

Definición 5.3 (Potencias de exponente racional). Las potencias de exponente racional están relacionadas con los radicales. Tal como se estudió en cursos anteriores, no siempre la raíz de un número real es real.

Sea $a \geq 0$ y $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $n \neq 1$ se llama potencia de base a y exponente $\frac{m}{n}$ a la raíz de índice n y radicando la potencia m -ésima de a .

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

5.2 Función exponencial

Definición 5.4 (Función exponencial). Sea $a > 0$ y $a \neq 1$ se llama función exponencial de base a , se denota por $\exp_a$ a la función de:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dominio } \mathbb{R} \\ \text{Relación entre las variables } \exp_a(x) = a^x \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp_a(x) = a^x}$$

La condición $a > 0$ nos permite afirmar que TODOS los números reales tienen imagen y además que es siempre estrictamente positiva (propiedades de las potencias). Es decir:

$$\boxed{\text{Im}(\exp_a) = (0, +\infty) = \mathbb{R}_*^+}$$

Si $a = 1$ la función es constante: $\exp_1(x) = 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Propiedades

- $\exp_a(0) = a^0 = 1$. El punto $P(0, 1)$ pertenece a todas las gráficas de las funciones exponenciales.
- $a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}, \forall a$ y $\forall x, x' \in \mathbb{R}$
- $\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}, \forall a$ y $\forall x, x' \in \mathbb{R}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \forall a, b$ y $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \forall a, b$ y $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)^{x'} = a^{x \cdot x'} \forall a$ y $\forall x, x' \in \mathbb{R}$
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} \forall a$ y $\forall x \in \mathbb{R}$

Dominios

El cálculo de dominios de funciones exponenciales se basa en el dominio de la función exponencial y el dominio de la composición de funciones.

Sea $F(x) = \exp_a(f(x)) = a^{f(x)}$, leemos: *exponencial base a* DE la función $f(x)$

Es la composición de la función $f(x)$ con la función $g(x) = a^x \Rightarrow F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$, su dominio, por la composición: $D_F \subseteq D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_F = D_f$.

Ejemplos: Hallar los dominios de las funciones:

(1) $f(x) = 3^{\frac{2x+3}{x^2-16}}$, su dominio máximo es:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 16 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$$

(2) $f(x) = 5^{\sqrt{3-x}}$, su dominio máximo es:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - x \geq 0\} = (-\infty, 3]$$

(3) $f(x) = 3^{\frac{2x+3}{x^2-16}} - 5^{\sqrt{3-x}}$. Aplicando la definición de suma de funciones:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} \cap (-\infty, 3] = (-\infty, 3] \setminus \{-4\}$$

5.2.1 Gráficas de las funciones exponenciales

En primer lugar estudiaremos dos funciones exponenciales: $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

$$\boxed{f(x) = 2^x} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{la recta } y = 0 \text{ asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} 2^x = 2^a = f(a) \Rightarrow \text{la función es continua en } \forall a \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty \\ \text{Im}(\exp_2) = (0, +\infty) \end{array} \right.$$

x	$f(x) = 2^x$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$	
$\vdots$	$\vdots$
-4	0.0625
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
$\vdots$	$\vdots$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$	

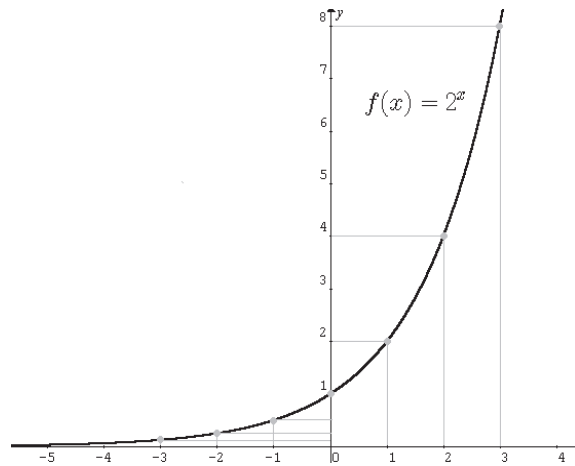


Figura 5.1: Gráfica de la función $f(x) = 2^x$

$$\boxed{g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^a = g(a) \Rightarrow \text{la función es continua en } \forall a \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 \Rightarrow \text{la recta } y=0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty \\ \text{Im}(\exp_{\frac{1}{2}}) = (0, +\infty) \end{array} \right.$$

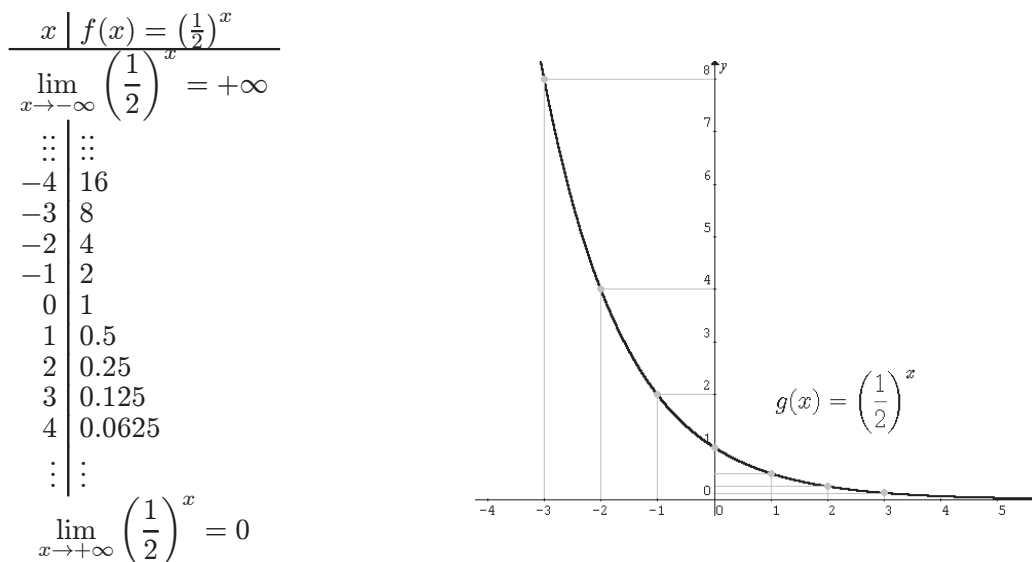


Figura 5.2: Gráfica de la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

La diferencia entre las gráficas viene de la base, debemos considerar dos casos:

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

Las gráficas de las funciones exponenciales de **base mayor que la unidad** tendrán las mismas características que la función $f(x) = 2^x$ figura (5.1) y las funciones exponenciales de **base entre cero y la unidad** las de la figura(5.2).

Las funciones exponenciales, a la vista de la gráfica, son **inyectivas**: elementos distintos tienen distintas imágenes. Por lo tanto:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

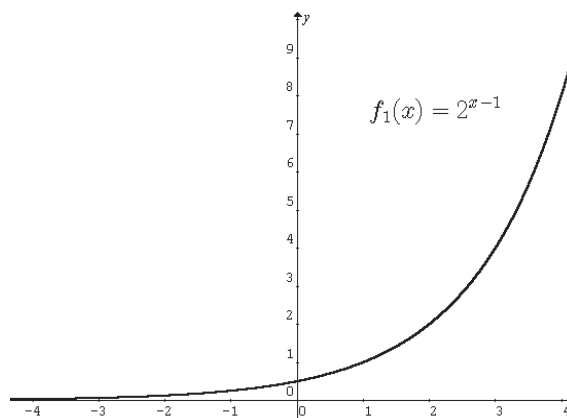
Nos permitirá resolver las ecuaciones exponenciales.

Para dibujar las gráficas de las funciones exponenciales se aplica las traslaciones (pág. 25).

Ejemplos: Dibujar las gráficas de las funciones:

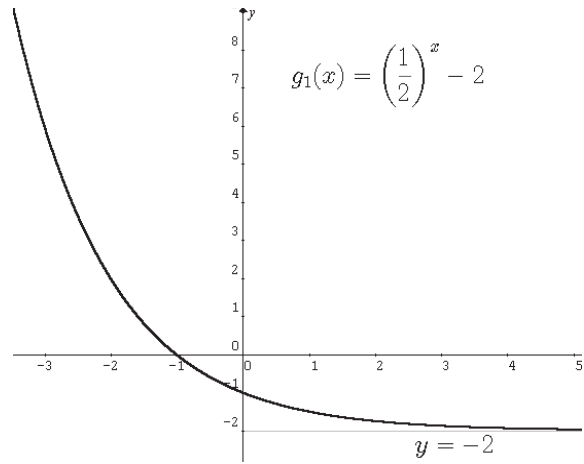
(1) $f_1(x) = 2^{x-1} = f(x-1)$

$f_1(x) = f(x-1)$, la gráfica(5.1) se traslada una unidad a la derecha en el eje de abscisas. La asíntota horizontal es la misma: $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$



(2) $g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

$g_1(x) = g(x) - 2$, la gráfica(5.2) se traslada dos unidades hacia abajo en el eje de ordenadas. La asíntota horizontal es $y = -2$ cuando $x \rightarrow +\infty$



Ejercicios: Dibujar, razonadamente, las gráficas de las funciones

- | | | |
|----------------------|---|---|
| (a) $f(x) = 2^{x+2}$ | (d) $f(x) = 2^{x-1} - 3$ | (g) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2}$ |
| (b) $f(x) = 2^{x-3}$ | (e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$ | (h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 3$ |
| (c) $f(x) = 2^x + 3$ | (f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ | (i) $f(x) = 10^x$ |

Si la base es el número e entonces la función exponencial es $f(x) = \exp_e(x) = e^x$, se suele denotar así: $f(x) = \exp(x)$. Su gráfica es del tipo (5.1), la base es mayor que la unidad.

x	$f(x) = e^x$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	
$\vdots$	$\vdots$
-3	0.0498
-2	0.1353
-1	0.3679
0	1
1	2.7183
2	7.3891
3	20.0855
$\vdots$	$\vdots$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	

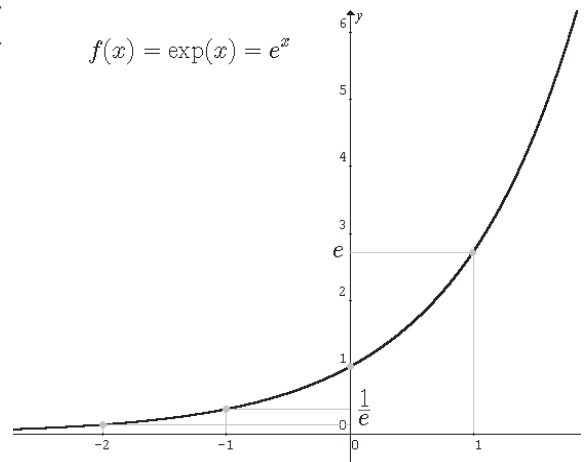


Figura 5.3: Gráfica de la función $f(x) = \exp(x) = e^x$

5.3 Ecuaciones exponenciales

Definición 5.5 (Ecuación exponencial). Una ecuación es exponencial si la incógnita se encuentra en el exponente.

Definición 5.6 (Solución). Sea $a \in \mathbb{R}$ diremos que es solución de la ecuación exponencial dada, si al sustituir la incógnita por, a , la ecuación se convierte en una identidad.

Número de soluciones

- La ecuación es incompatible si **no tiene soluciones reales**.
- La ecuación es compatible determinada si tiene **una única solución real**.
- La ecuación es compatible indeterminada si tiene **más de una solución real**.

Gráficamente:

Incompatible La gráfica de la función NO CORTA al eje de abscisas.

Compatible determinado La gráfica de la función CORTA al eje de abscisas en UN ÚNICO punto. La abscisa del punto es la solución de la ecuación.

Compatible indeterminado La gráfica de la función CORTA al eje de abscisas en tantos puntos como soluciones tiene la ecuación. Las abscisas de los puntos son las solución de la ecuación.

Para resolver las ecuaciones exponenciales se debe aplicar las propiedades (pág. 104) y la inyectividad de las funciones exponenciales (pág. 106).

Ecuaciones de la forma: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, siendo la base b una potencia de la base a Por ser b una potencia de a : $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $b = a^r$:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \implies a^{f(x)} = \left(a^r\right)^{g(x)} \xrightarrow{(1)} a^{f(x)} = a^{r \cdot g(x)} \xrightarrow{(2)} \\ \implies f(x) = r \cdot g(x) \text{ se resuelve la ecuación y sus soluciones son las de la ec. exponencial}$$

(1) Propiedades de la función exponencial.

(2) Inyectividad de la función exponencial de base a .

Ejemplos: Resolver las ecuaciones:

(1) $2^{x-3} = 8^{\frac{x-3}{2}}$. El número $8 = 2^3$:

$$\boxed{2^{x-3} = 8^{\frac{x-3}{2}}} \xrightarrow{(1)} 2^{x-3} = 2^{3 \cdot \frac{x-3}{2}} \xrightarrow{(2)} x-3 = \frac{3(x-3)}{2}$$

$$2x - 6 = 3x - 9 \implies x = 3 \text{ La solución de la ecuación exponencial es } \boxed{x = 3}$$

(2) $9^{x+1} = 3^{x^2-6}$. El número $9 = 3^2$:

$$\boxed{9^{x+1} = 3^{x^2-6}} \xrightarrow{(1)} 3^{2 \cdot (x+1)} = 3^{x^2-6} \xrightarrow{(2)} 2(x+1) = x^2 - 6 \implies 2x + 2 = x^2 - 6$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación exponencial son $\boxed{x_1 = 4 \text{ y } x_2 = -2}$

(3) $5^{x^2-3} = 1$. Propiedades: $a^0 = 1 \forall a$:

$$\boxed{5^{x^2-3} = 1} \xrightarrow{(1)} 5^{x^2-3} = 5^0 \xrightarrow{(2)} x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}$$

Las soluciones de la ecuación exponencial son $\boxed{\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}}$

Ecuaciones de la forma: $a^{f(x)} + b^{f(x)} + c^{f(x)} + \dots = 0$, siendo b y c potencias enteras de a . Se realizan cambios de variable. Si $b = a^n$ y $c = a^m$ con $m, n \in \mathbb{N}$ el cambio de variable es:

$\boxed{a^{f(x)} = t}$. La ecuación en la nueva variable es polinómica y se resuelve.

Una vez halladas las soluciones para la variable: $\boxed{t}$, se deshace el cambio para calcular, si es posible, las soluciones de la variable principal x .

Atención: $\boxed{a^{f(x)} > 0}$

Ejemplos: Resolver las ecuaciones:

(1) $2^x + 8 \cdot 4^x - 9 = 0$. El número 4 es igual a 2^2 . El cambio de variable es: $\boxed{2^x = t}$

$$\boxed{2^x + 8 \cdot 4^x - 9 = 0} \xrightarrow{(1)} t + 8t^2 - 9 = 0 \implies 8t^2 + t - 9 = 0 \text{ ecuación de segundo grado}$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 288}}{16} = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{16} = \frac{-1 \pm 17}{16} = \begin{cases} t_1 = \frac{16}{16} = 1 \\ t_2 = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

$$\text{Deshacemos el cambio}_{2^x=t} \begin{cases} 2^x = 1 \iff \boxed{x = 0} \\ 2^x \neq -\frac{9}{8} \text{ No hay solución real: } 2^x > 0 \end{cases}$$

La única solución es $x = 0$

$$(1) \quad 4^x = 2^{2 \cdot x} = \left(2^x\right)^2 = t^2$$

5.4 Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones exponenciales está formada por dos o más ecuaciones exponenciales, con dos o más incógnitas.

La solución de los sistemas consiste, en general, transformar las ecuaciones exponenciales del sistema en ecuaciones algebraicas mediante cambio de variables. Una vez en forma algebraica se resuelve por los métodos tradicionales: igualación, sustitución o reducción.

Con las condiciones intrínsecas a las funciones exponenciales se deshacen los cambios y se hallan, si existen, las soluciones reales del sistema.

Los métodos explicados son generales, en cada caso el alumno(a) puede encontrar métodos de solución alternativos. Incluso hay sistemas de ecuaciones exponenciales en los cuales no es necesario cambios de variable. El trabajo personal es muy importante para adquirir los hábitos de solución de ecuaciones y sistemas.

Ejemplos: Resolver los sistemas:

$$(a) \quad \left. \begin{aligned} 2^x - 3^{y+2} &= 1 \\ 4^{x-1} + 3^{y+1} &= 5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2^x - 3^{y+2} &= 1 \\ 4^{x-1} + 3^{y+1} &= 5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(1)} \left. \begin{aligned} 2^x - 9 \cdot 3^y &= 1 \\ \frac{1}{4} 2^{2x} + 3 \cdot 3^y &= 5 \end{aligned} \right\} \text{Efectuamos los cambios de variable } \boxed{\begin{aligned} 2^x &= t \\ 3^y &= z \end{aligned}}$$

$$\left. \begin{aligned} t - 9z &= 0 \\ \frac{1}{4} t^2 + 3z &= 5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(2)} \left. \begin{aligned} t - 9z &= 1 \\ \frac{3}{4} t^2 + 9z &= 15 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(3)} \frac{3}{4} t^2 + t - 16 = 0 \implies 3t^2 + 4t - 64 = 0$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 768}}{6} = \frac{-4 \pm 28}{6} = \begin{cases} t_1 = \frac{12}{3} = 4 \\ t_2 = \frac{-16}{3} \end{cases} \xrightarrow{(4)} \text{Si } t = 4 \implies z = \frac{1}{3}$$

Solución NO válida $t = 2^x > 0$

$$\left\{ \begin{aligned} 2^x &= 4 = 2^2 \xrightarrow{(5)} x = 2 \\ 3^y &= \frac{1}{3} = 3^{-1} \xrightarrow{(5)} y = -1 \end{aligned} \right\} \text{Solución del sistema } \boxed{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \end{aligned}}$$

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} 4^{x^2-1} &= 8^{y-2} \\ 3x - 5y &= -13 \end{aligned} \right\} \text{La segunda ecuación del sistema es algebraica.}$$

$$\left. \begin{aligned} 4^{x^2-1} &= 8^{y-2} \\ 3x - 5y &= -13 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(1)} \left. \begin{aligned} 2^{2 \cdot (x^2-1)} &= 2^{3 \cdot (y-2)} \\ 3x - 5y &= -13 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(5)} \left. \begin{aligned} 2x^2 - 2 &= 3y - 6 \\ 3x - 5y &= -13 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 - 3y &= -4 \\ 3x - 5y &= -13 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(2)} \left. \begin{aligned} (\cdot 5) \quad 10x^2 - 15y &= -20 \\ (\cdot -3) \quad -9x^2 + 15y &= 39 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(3)} 10x^2 - 9x - 19 = 0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 760}}{20} = \frac{9 \pm 29}{20} = \begin{cases} x_1 = \frac{19}{10} \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{Sustituyendo en la ec. algebraica}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x = \frac{19}{10} &\implies \frac{57}{10} - 5y = -13 \implies y = \frac{187}{50} \\ x = -1 &\implies -3 - 5y = -13 \implies y = 2 \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones del sistema son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{19}{10} ; y = \frac{187}{50} \\ x &= -1 ; y = 2 \end{aligned}}$$

- (1) Propiedades de las funciones exponenciales.
- (2) Resolvemos el sistema por reducción.
- (3) Sumando las dos ecuaciones
- (4) Sustituimos el valor de la incógnita t en la primera ecuación del sistema.
- (5) Inyectividad de las funciones exponenciales.