

Las funciones exponenciales definidas $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ $x \longmapsto \exp_a(x) = a^x$, son funciones biyectivas, es decir poseen función recíproca (inversa).

La función inversa de la exponencial recibe el nombre de función logarítmica.

Definición 6.1 (Función logarítmica). Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama función logaritmo de base a , a la función recíproca de la función exponencial de base a .

$$\log_a : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log_a(x)$$

El dominio de la función logaritmo son los reales estrictamente positivos, NO SE PUEDE CALCULAR LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS.

6.1 Propiedades inmediatas de la función logaritmo

Por definición de función recíproca(inversa) (pág. 39):

- $f^{-1} \circ f = Id \implies ((\log_a) \circ (\exp_a))(x) = x \implies \boxed{\log_a a^x = x}$
- $f \circ f^{-1} = Id \implies ((\exp_a) \circ (\log_a))(x) = x \implies \boxed{a^{\log_a x} = x}$

De la primera propiedad se deduce:

$$\boxed{\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0}$$

- El logaritmo de la **base** es la **unidad**.
- El logaritmo de la **unidad** en cualquier base es siempre **CERO**.
- La definición clásica de logaritmo.

Definición 6.2 (Definición clásica de logaritmo). El logaritmo de un número positivo es el **EXPONENTE** al que hay que elevar la **BASE** para obtener dicho número.

$$\boxed{\log_a N = b \iff a^b = N}$$

Ejemplos: Calcular x en las siguientes expresiones:

$$(a) \log_2 8 = x \begin{cases} \text{Por definición: } 2^x = 8 \implies 2^x = 2^3 \implies x = 3 \\ \text{Por propiedades: } x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{cases}$$

$$(b) \log_{\frac{1}{3}} x = -1. \text{ Por definición: } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = x \implies x = 3$$

$$(c) \log_x 16 = -2. \text{ Por definición: } x^{-2} = 16 \implies \frac{1}{x^2} = 16 \implies x^2 = \frac{1}{16} \text{ Las soluciones de la ec. de segundo grado } x = \pm \frac{1}{4}. \text{ La base de los logaritmos siempre positiva. La solución es } x = \frac{1}{4}$$

$$(d) \log_2 2^3 - 5^{\log_5 2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3 - 2 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 - 2 + 3 = 4$$

Logaritmos decimales y neperianos

- Si la base es diez, $a = 10$, los logaritmos reciben el nombre de decimales o de Briggs. Entonces no se escribe la base, se sobreentiende que son decimales, exactamente igual que la escritura de los números que empleamos

$$\log_{10} N = \log N$$

- Si la base es el número e , $a = e$, los logaritmos reciben el nombre de neperianos (Napier). Y se denotan por $\ln$.

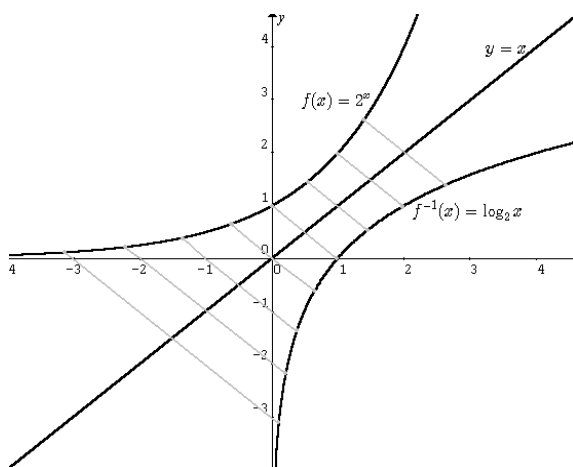
$$\log_e N = \ln N$$

Los matemáticos John Napier (1550-1617) y Henry Briggs (1561-1631), dedujeron los logaritmos de las progresiones aritméticas y geométricas para aplicarlos a los cálculos largos y tediosos de astronomía. Sus nombres han sido asociados a los logaritmos de mayor uso.

6.2 Gráficas de las función logaritmo

Las gráficas de una función y su recíproca son simétricas respecto de la bisectriz del primer tercer cuadrante (pág. 39). Las gráficas de la función logaritmo las deducimos de las gráficas de la función exponencial.

Si la base es mayor que la unidad $a > 1$.

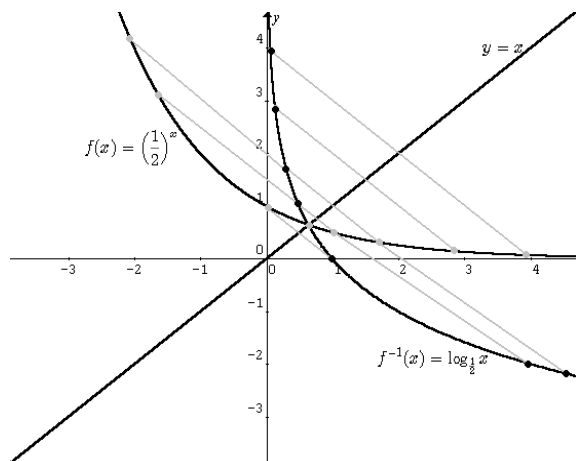


Por simetría:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty$ La recta $y = 0$ es A.V. cuando $x \rightarrow 0^+$
- $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \implies \log_2 x < 0 \\ \log_2 1 = 0 \\ \text{Si } x > 1 \implies \log_2 x > 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$

Figura 6.1: Gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$

Si la base es menor que la unidad $0 < a < 1$.



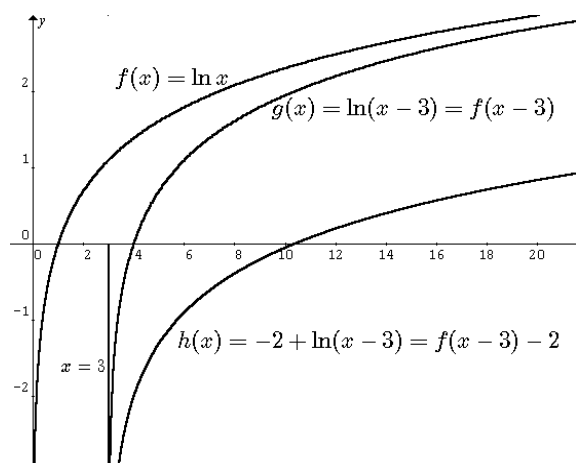
Por simetría:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$ La recta $y = 0$ es A.V. cuando $x \rightarrow 0^+$
- $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \implies \log_{\frac{1}{2}} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 \\ \text{Si } x > 1 \implies \log_{\frac{1}{2}} x < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$

Figura 6.2: Gráfica de la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

En general las gráficas de las funciones: $f(x) = k_1 + \log_a(x \pm k_2)$ se dibujan por traslación, ver pág.(25).

Ejemplo: Dibujar la gráfica de la función $h(x) = -2 + \ln(x - 3)$



- (1) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \ln x$.
- (2) La función $g(x) = \ln(x - 3)$ se traslada tres unidades a la derecha. La recta $x = 3$ A.V.
- (3) La función $h(x) = -2 + \ln(x - 3)$ se traslada dos unidades hacia abajo.

Figura 6.3: Gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x - 3)$, $h(x) = -2 + \ln(x - 3)$

Ejercicios: Dibujar, razonadamente, las gráficas de las funciones

- | | |
|--|----------------------|
| (a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ | (d) $f(x) = \ln(-x)$ |
| (b) $f(x) = \frac{1}{3} + \log(x + 3)$ | (e) $f(x) = \ln x $ |
| (c) $f(x) = -\ln x$ | (f) $f(x) = \ln x $ |

6.3 Dominios de las funciones logarítmicas

Los dominios de las funciones logarítmicas se razonan igual que el resto de funciones compuestas.

Sea $f(x) = \log_a[g(x)]$, la función es la composición de la función $g(x)$ con la función $h(x) = \log_a x$.

Teniendo en cuenta el dominio de la función logaritmo (pág. 114):

$$D_f = D_g \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0 \right\}$$

Ejemplos: *Hallar los dominios de las funciones*

- (a) $f(x) = \ln(5x - x^2)$. Es la composición de la función $g(x) = 5x - x^2$ con la función logaritmo neperiano:

$$D_f \stackrel{(1)}{=} \mathbb{R} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 5x - x^2 > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 5x - x^2 > 0 \right\} \stackrel{(2)}{=} (0, 5)$$

(1) La función $g(x) = 5x - x^2$ es un polinomio, su dominio es $\mathbb{R}$.

(2) Resolviendo la inecuación $5x - x^2 > 0$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P(x) = -x \cdot (x - 5) & & - & & 0 & & + & & 0 & & - \\
 \hline
 & x < 0 & & 0 & & 0 < x < 5 & & 5 & & x > 5
 \end{array}$$

- (b) $f(x) = \log_3 |2x^2 + 5x - 3|$

$$D_f \stackrel{(1)}{=} \mathbb{R} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x^2 + 5x - 3| > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x^2 + 5x - 3| > 0 \right\} \stackrel{(2)}{=} \mathbb{R} \setminus \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$$

(1) La función *valor absoluto de un polinomio* tiene de dominio $\mathbb{R}$.

(2) El valor absoluto es siempre positivo o nulo. Basta calcular los ceros reales, si existen, del

$$\text{polinomio. } x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

- (c) $f(x) = \ln(\ln x)$. La función $f(x)$ es la composición de la función logaritmo neperiano consigo mismo.

$$D_f \stackrel{(1)}{=} (0, +\infty) \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \ln x > 0 \right\} \stackrel{(2)}{=} (0, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$$

(1) La función $g(x) = \ln x$ tiene como dominio máximo $(0, +\infty)$.

(2) Teniendo en cuenta la gráfica de la función $g(x) = \ln x$ (pág. 116): $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \ln x > 0 \right\} = (1, +\infty)$

- (d) $f(x) = \log_3(5 - x) + \ln(2x + 5)$. La función es la suma de dos funciones: $f_1(x) = \log_3(5 - x)$ y $f_2(x) = \ln(2x + 5)$, por definición de suma de funciones:

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \stackrel{(1)}{=} (-\infty, 5) \cap \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right) \stackrel{(2)}{=} \left(-\frac{5}{2}, 5\right)$$

$$(1) \text{ Dominios de las funciones: } \left\{ \begin{array}{l} D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x > 0\} = (-\infty, 5) \\ D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 5 > 0\} = \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right) \end{array} \right\}$$

(2) La intersección de los dos intervalos es la solución.

6.4 Propiedades de los logaritmos

Las propiedades siguientes son válidas en cualquier base y siempre que $M > 0$ y $N > 0$.

Propiedad 6.1 (Logaritmo del producto). *El logaritmo de un **PRODUCTO** es igual a la **SUMA** de los logaritmos de cada uno de los factores.*

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a(M \cdot N) = x \xLeftrightarrow{(1)} a^x = M \cdot N \\ \log_a M = y \xLeftrightarrow{(1)} a^y = M \\ \log_a N = z \xLeftrightarrow{(1)} a^z = N \end{array} \right\} \Rightarrow a^x = a^y \cdot a^z \xRightarrow{(2)} a^x = a^{y+z} \xRightarrow{(3)} x = y + z$$

sustituyendo x, y y $z \Rightarrow \log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

c.q.d.

(1) Por definición de función logaritmo.

(2) Propiedades de la función exponencial (104).

(3) Inyectividad de la función exponencial.

Propiedad 6.2 (Logaritmo del cociente). *El logaritmo de un **COCIENTE** es igual a la **DIFERENCIA** entre logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.*

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x \xLeftrightarrow{(1)} a^x = \frac{M}{N} \\ \log_a M = y \xLeftrightarrow{(1)} a^y = M \\ \log_a N = z \xLeftrightarrow{(1)} a^z = N \end{array} \right\} \Rightarrow a^x = \frac{a^y}{a^z} \xRightarrow{(2)} a^x = a^{y-z} \xRightarrow{(3)} x = y - z$$

sustituyendo x, y y $z \Rightarrow \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

c.q.d.

Propiedad 6.3 (Logaritmo de una potencia). *El logaritmo de una **POTENCIA** es igual al exponente **por** el logaritmo de la base..*

$$\log_a M^n = n \cdot \log_a M$$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a M^n = x \xLeftrightarrow{(1)} a^x = M^n \\ \log_a M = y \xLeftrightarrow{(1)} a^y = M \end{array} \right\} \Rightarrow a^x = (a^y)^n \xRightarrow{(2)} a^x = a^{n \cdot y} \xRightarrow{(3)} x = n \cdot y$$

sustituyendo x e $y \Rightarrow \log_a M^n = n \cdot \log_a M$

c.q.d.

Las propiedades anteriores permiten, también, agrupar expresiones algebraicas que contienen logaritmos:

- La suma de logaritmos de la misma base es igual al logaritmo de la base dada del producto.
- La diferencia de logaritmos de la misma base es igual al logaritmo de la base dada del cociente.
- El producto de un número por el logaritmo de otro es igual al logaritmo de una potencia.

Ejemplos: *Desarrollar aplicando las propiedades*

$$(1) \log_2 144 = \log_2 (2^4 \cdot 3^2) = \log_2 2^4 + \log_2 3^2 = 4 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_2 3 = 4 + 2 \cdot \log_2 3$$

$$(2) \log \sqrt{a^3 \cdot b^5} = \log (a^3 \cdot b^5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log (a^3 \cdot b^5) = \frac{1}{2} (\log a^3 + \log b^5) = \frac{1}{2} (3 \cdot \log a + 5 \cdot \log b) = \frac{3}{2} \log a + \frac{5}{2} \log b$$

$$(3) \ln \left(\frac{a^4 \cdot b}{\sqrt{b}} \right) = \ln (a^4 \cdot b) - \ln \sqrt{b} = \ln a^4 + \ln b - \ln b^{\frac{1}{2}} = 4 \ln a + \ln b - \frac{1}{2} \ln b = 4 \ln a + \frac{1}{2} \ln b$$

Ejemplos: *Agrupar aplicando las propiedades*

$$(1) 5 \log_3 2 - 2 \log_3 5 = \log_3 2^5 - \log_3 5^2 = \log_3 \frac{2^5}{5^2} = \log_3 \frac{32}{25}$$

$$(2) \frac{1}{3} \ln a + 3 \ln b - \frac{1}{2} \ln c = \ln a^{\frac{1}{3}} + \ln b^3 - \ln c^{\frac{1}{2}} = \ln (\sqrt[3]{a} \cdot b^3) - \ln \sqrt{c} = \ln \left(\frac{\sqrt[3]{a} \cdot b^3}{\sqrt{c}} \right)$$

$$(3) 1 + \log_5 2 - 3 \log_5 3 = \boxed{\log_5 5} + \log_5 2 - \log_5 3^3 = \log_5 \left(\frac{5 \cdot 2}{27} \right) = \log_5 \frac{10}{27}$$

Las calculadoras sólo calculan logaritmos decimales y neperianos. Parece necesario transformar el resto de logaritmos en otras bases a una de ellas. En general recibe el nombre de cambio de base.

Dadas $a, b > 0$, distintos de uno y $M > 0$, entonces:

Propiedad 6.4 (Cambio de base). *El logaritmo base a de M es igual **AL COCIENTE** entre el logaritmo en base b de M y el logaritmo base b de la base a .*

$$\boxed{\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}}$$

Demostración:

$$\log_a M = x \xLeftrightarrow{(1)} a^x = M \xLeftrightarrow{(2)} \log_b a^x = \log_b M \xLeftrightarrow{(3)} x \cdot \log_b a = \log_b M \xLeftrightarrow{(4)} x = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$\text{sustituyendo } x \implies \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

c.q.d.

- (1) Por definición de función logaritmo.
- (2) La función logaritmo es inyectiva. *Se toman logaritmos base b*
- (3) Logaritmo de una potencia.
- (4) Al ser $a \neq 1$ entonces $\log_b a \neq 0$, se despeja x .

6.5 Ecuaciones y sistemas logarítmicos

Definición 6.3 (Ecuación logarítmica). Una ecuación es logarítmica si la incógnita se encuentra en el argumento del logaritmo.

Definición 6.4 (Solución de la ecuación). Un valor real a es solución de la ecuación si al sustituir la incógnita por a , la ecuación se convierte en una identidad.

Las ecuaciones logarítmicas, aplicando la inyectividad de la función logaritmo (pág. 114) y las propiedades de los logaritmos (pág. 118), se deben transformar en ecuaciones algebraicas; una vez resueltas, las **soluciones deben pertenecer al dominio de las funciones logarítmicas que forman la ecuación.**

Ecuaciones de la forma: $\log_a f(x) = b$

Aplicando la definición de logaritmo: $\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$. Se resuelve la ecuación y se comprueba que las soluciones pertenezcan al dominio de la función logarítmica, es decir: $f(x) > 0$.

Ejemplos: Resolver la ecuaciones:

(a) $\log_3(5x - 2) = 2$

$$\log_3(5x - 2) = 2 \stackrel{(1)}{\iff} 5x - 2 = 3^2 \implies 5x - 2 = 9 \implies 5x = 11 \implies x = \frac{11}{5}$$

$$\text{El dominio es: } 5x - 2 > 0 \implies x > \frac{2}{5} \stackrel{(2)}{\implies} \text{la solución es: } x = \frac{11}{5}$$

(1) Definición de logaritmo.

(2) La solución de la ecuación algebraica $\frac{11}{5} > \frac{2}{5}$.

(b) $\log_5(x^2 - 2x + 2) = 1$

$$\log_5(x^2 - 2x + 2) = 1 \stackrel{(1)}{\iff} x^2 - 2x + 2 = 5^1 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \implies$$

El dominio es: $x^2 - 2x + 2 > 0 \stackrel{(2)}{\implies}$ Las soluciones son:

$\begin{array}{c} x = 3 \\ \text{y} \\ x = -1 \end{array}$
--

(1) Definición de logaritmo.

(2) Las soluciones de la ecuación algebraica verifican ambas el dominio del logaritmo.

Ecuaciones de la forma: $\log_a f_1(x) \pm \log_a f_2(x) \pm \dots = \log_a g_1(x) \pm \log_a g_2(x) \pm \dots$

Metodología:

(a) Aplicando las propiedades de los logaritmos, la ecuación se convierte en: $\log_a F(x) = \log_a G(x)$

(b) Inyectividad de la función logaritmo: $F(x) = G(x)$.

(c) Resolviendo la ecuación algebraica se hallan las soluciones reales.

(d) **Las soluciones de la ec. logarítmica deben pertenecer al dominio de las funciones dadas** $D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \dots \cap D_{g_1} \cap D_{g_2} \cap \dots \neq \emptyset$.

La forma práctica es **comprobar** las soluciones obtenidas en el apartado (c) en la **ecuación logarítmica dada.**

Ejemplos: Resolver las ecuaciones:

(a) $\log_2(3x - 1) - 2 \cdot \log_2(x - 1) = 1$

$$\begin{aligned}\log_2(3x - 1) - 2 \cdot \log_2(x - 1) = 1 &\stackrel{(1)}{\implies} \log_2(3x - 1) - \log_2(x - 1)^2 = \log_2 2 \implies \\ \log_2 \left(\frac{3x - 1}{(x - 1)^2} \right) &= \log_2 2 \stackrel{(2)}{\implies} \frac{3x - 1}{(x - 1)^2} = 2 \implies 3x - 1 = 2(x^2 - 2x + 1) \implies \\ 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \implies x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Comprobando las soluciones en la ec. logarítmica(3) la solución es: $\boxed{x = 3}$

- (1) Propiedades de los logaritmos y $\log_a a^n = n$.
 (2) Inyectividad de la función logaritmo.
 (3) Dominio de solución de la ecuación logarítmica:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 > 0\} = (1, +\infty)$$

La solución $x = \frac{1}{2}$ no pertenece al conjunto de posibles soluciones, por lo tanto NO ES SOLUCIÓN de la ec. logarítmica.

(b) $2 \cdot \log_3(7 - x) - \log_3(x^2 + 5) = 1 + \log_3(x + 5)$

$$\begin{aligned}(1) \log_3(7 - x)^2 - \log_3(x^2 + 5) &= \log_3 3 + \log_3(x + 5) \implies \log_3 \left(\frac{(7 - x)^2}{x^2 + 5} \right) = \log_3 3 \cdot (x + 5) \stackrel{(2)}{\implies} \\ \frac{(7 - x)^2}{x^2 + 5} &= 3 \cdot (x + 5) \implies x^2 - 14x + 49 = 3(x^3 + 5x^2 + 5x + 25) \implies\end{aligned}$$

$$3x^3 + 14x^2 + 29x + 26 = 0 \text{ Ruffini:}$$

$P(x)$	-2	3	14	29	26
$P_1(x)$	3	8	13	0	

El discriminante de la ec. $3x^2 + 8x + 13 = 0$: $\Delta = 64 - 12 \cdot 13 < 0$

La ecuación algebraica NO tiene más soluciones reales

Comprobando la solución en la ec. logarítmica, la solución es: $\boxed{x = -2}$

Sistemas de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Metodología:

- (a) Aplicando las propiedades de los logaritmos, las ecuaciones se convierten en:
 $\log_a F(x) = \log_a G(x)$
- (b) Inyectividad de la función logaritmo: $F(x) = G(x)$.
- (c) Resolviendo el sistema algebraico se hallan las soluciones reales.
- (d) **Las soluciones de las ecs. logarítmicas deben pertenecer al dominio de las funciones dadas** $D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \dots \cap D_{g_1} \cap D_{g_2} \cap \dots \neq \emptyset$.
 La forma práctica es **comprobar** las soluciones obtenidas en el apartado (c) en **las ecuaciones logarítmicas**.

Ejemplos: Resolver los sistemas de ecuaciones:

$$(a) \begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(3x-2y) = -3 \\ \log_3(1-4y) - \log_3(2x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_2(x+y) - \log_2(3x-2y) = -3 \\ \log_3(1-4y) - \log_3(2x+1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \log_2 \frac{x+y}{3x-2y} = \log_2 2^{-3} \\ \log_3 \frac{1-4y}{2x+1} = \log_3 1 \end{array} \left\} \begin{array}{l} (2) \frac{x+y}{3x-2y} = \frac{1}{8} \\ \frac{1-4y}{2x+1} = 1 \end{array} \right.$$

La solución del sistema algebraico:

$$\left. \begin{array}{l} 8x+8y = 3x-2y \\ 1-4y = 2x+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x+4y = 4 \\ x+2y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (3) x = 4 \\ y = -2 \end{array} \quad (4)$$

La solución del sistema es $x = 4$ e $y = -2$

- (1) Propiedades de los logaritmos y $\log_a a^n = n$.
- (2) Inyectividad de la función logaritmo.
- (3) Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales.
- (4) El par $(4, -2)$ es solución del sistema. Efectivamente, al sustituir los valores en las ecuaciones pertenecen a los dominios de las funciones.

$$(b) \begin{cases} 2 \cdot \log(3x-2) - \log(y+5) = 1 \\ \log_2(2x-y+1) = 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \log(3x-2) - \log(y+5) = 1 \\ \log_2(2x-y+1) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \log(3x-2)^2 - \log(y+5) = 1 \\ \log_2(2x-y+1) = 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \log \frac{(3x-2)^2}{y+5} = \log 10 \\ \log_2(2x-y+1) = \log_2 2^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2) \frac{(3x-2)^2}{y+5} = 10 \\ 2x-y+1 = 4 \end{array} \xRightarrow{(3)} \begin{array}{l} 9x^2 - 12x + 4 = 10y + 50 \\ y = 2x - 3 \end{array} \xRightarrow{\text{sustitución}}$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 10(2x-3) + 50 \Rightarrow 9x^2 - 32x - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 + 36 \cdot 12}}{18} = \frac{32 \pm 40}{18} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{4}{9} \end{cases} \quad \text{sustituyendo en } \boxed{y = 2x - 3} \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -\frac{35}{9} \end{cases}$$

La solución si $x = -\frac{4}{9}$ NO ES SOLUCIÓN: $3x - 2 < 0$, por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 5 \end{array}}$$