

1. Con ayuda de las gráficas de las funciones del ejercicio 3, dibujar las gráficas de las funciones logarítmicas:

(a) $f(x) = \log_3 x$ (b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (c) $f(x) = \ln x$ (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{e}} x$

2. Con ayuda de las gráficas de las funciones del ejercicio 1, **hallar razonadamente**:

- (a) El dominio y recorrido de las funciones.
(b) Las asíntotas de las funciones.

3. Dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$. Con ayuda de la gráfica de la función $g(x)$, dibujar las gráficas de las funciones:

(a) $h(x) = 2 + \log x$ (d) $h(x) = -3 + \log x$ (g) $h(x) = 1 + \log(x + 3)$
(b) $h(x) = \log(x - 1)$ (e) $h(x) = 5 \cdot \log x$ (h) $h(x) = \log(-x)$
(c) $h(x) = \log(x + 2)$ (f) $h(x) = -2 \cdot \log x$ (i) $h(x) = \log(2x)$

Hallar, **razonadamente**, el dominio de las funciones.

4. Consideremos las funciones: $f(x) = x^2$ y $g(x) = \ln x$:

- (a) Definir las funciones: $g \circ f$, $f \circ g$ y $g \circ g$.
(b) Hallar sus dominios máximos.

5. Dibujar, **razonadamente**, la gráfica de la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Hallar el dominio y el recorrido de la función.

6. Hallar el dominio máximo de las funciones:

(a) $f(x) = \log_2(9 - x^2)$ (e) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 2x - 3}$
(b) $f(x) = \log x - \log(1 - x)$ (f) $f(x) = \log_5(x^2 + 1)$
(c) $f(x) = \log_3 \frac{x+2}{x-2}$ (g) $f(x) = \frac{\ln(3-x)^2}{\sqrt{x^2-1}}$
(d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2-x}{x+3} \right)$ (h) $f(x) = \log_3(x^2 - 3x) + 2\sqrt{x^2-1}$

7. Definir las funciones inversas de:

(a) $f(x) = e^{x+3}$

(c) $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \ln x$

(f) $f(x) = e^{+\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = 5 - \log_2 x$

(g) $f(x) = 2^{\frac{2x+3}{x}}$

(b) $f(x) = \log_3(2x+1)$

(e) $f(x) = 7^{3x} - 2$

8. Dadas las funciones: $f(x) = \log_7 \left(\frac{2x+1}{3-x} \right)$ y $g(x) = 5^{\frac{x^2}{x^2-4}}$

(a) Hallar, **razonadamente** los dominios de las funciones.

(b) Calcular, si existen, las inversas de las funciones f y g .

(c) Calcular el dominio de la función: $f - g$

9. Hallar x en las siguientes igualdades:

(a) $\log_2 x = 3$

(d) $\log_4 x = -3$

(g) $\log_x 0.00001 = -5$

(b) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

(e) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$

(h) $\log_x \frac{1}{125} = -3$

(c) $\log x = 5$

(f) $\log_x 125 = -3$

(i) $\log_x 0.015625 = 3$

10. Hallar el resultado de las siguientes expresiones:

(a) $\log_2 16$

(d) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{256}$

(g) $\log_{343} \sqrt{7}$

(b) $\log_3 \frac{1}{9}$

(e) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

(h) $\log_8 \sqrt[4]{2}$

(c) $\log_{\frac{1}{5}} 625$

(f) $\log_{125} \frac{1}{\sqrt{5}}$

(i) $\log_2 0.0625$

(j) $\log_2 8 + \log_3 81 - \log_5 625$

(m) $\log 0.1 + 7 \cdot \log 10 - 5 \cdot (\log_3 9 - 3 \cdot \log 0.001)$

(k) $\log_5 625 - \log_9 81 - \log_8 64$

(n) $\log_3 \frac{1}{9} \cdot \log_5 0.2 + \log_6 \frac{1}{36} - \log_2 0.5$

(l) $2 \cdot \log_4 16 + \log_2 32 - 3 \cdot \log_7 \frac{1}{49}$

(o) $\log_3 \frac{1}{81} + \log_{\sqrt{7}} 49 + \log_{2/3} \frac{9}{4}$

11. Calcular, sin emplear calculadora, el valor de las siguientes expresiones:

(a) $4^{\log_4 3}$

(d) $\log e^{\ln 1000}$

(g) $3^{\log_2(2^{\log_3 x})}$

(b) $\log_7 10^{\log 7}$

(e) $10^{\log(\log 10^x)}$

(c) $\ln 1000^{\log e}$

(f) $\log_2 3^{\log_3 2^x}$

12. Aplicando las propiedades de los logaritmos, hallar el $\log x$ en:

(a) $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{e \cdot f}$

(c) $x = \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{c^2 \cdot \sqrt{d}}$

(e) $x = \left(a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \right)^3$

(b) $x = \frac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4}{5^2 \cdot 3^4}$

(d) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot b \cdot c}{a^2 \cdot \sqrt{b} \cdot c^{\frac{3}{2}}}$

(f) $x = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}}$

13. Calcular x sabiendo que:

(a) $\log x = 4 \cdot \log a + 3 \cdot \log b - 2 \cdot \log c$

$$(b) \log x = \frac{1}{5} (\log a + 3 \cdot \log b) - \frac{1}{3} (\log c + 2 \cdot \log b)$$

$$(c) \log x = \frac{1}{5} \left(\log a - \frac{2}{3} \log b + \frac{4}{5} \log c \right) + \frac{2}{3} \log b$$

14. Si $\log_4 N = x$, calcular:

$$(a) \log_4 16 \cdot N$$

$$(b) \log_4 \frac{N}{256}$$

$$(c) \log_4 \frac{N}{\sqrt[5]{4}}$$

15. ¿Qué relación existe entre $\log_3 2$ y $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$?

16. Si a un número P lo multiplicamos (dividimos) por 81, ¿qué alteración experimenta su logaritmo en base 3? ¿Y en base 9?

17. Si se verifica la relación: $\log_7 \frac{M}{N} + \log_7 N = 2$

(a) ¿De qué signo son los números M y N ? **Razonar.**

(b) ¿Cuál es el valor de N ?

18. **Demostrar** que:

$$(a) \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

$$(b) 3 = -\log_2 \left\{ \log_2 \left[\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \right]^{\frac{1}{7}} \right\}$$

$$(c) \log(a^2 - b^2) = \log(a \cdot b) + \log\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

$$(d) \log(a + b) + \log\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log\left(\frac{a}{b} + 1\right) + \log(a - b)$$

19. Dados los siguientes logaritmos:

$$\log_5 3$$

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{7}{2}$$

$$\log_8 56$$

(a) **Razonar** si son positivos o negativos.

(b) **Razonar** si es mayor que la unidad o no.

(c) Con la ayuda de una calculadora hallar el valor de los logaritmos.

20. **Razonar** si son correctas las siguientes afirmaciones e igualdades:

$$(a) \log_a M + \log_a N = \log_a (M + N)$$

$$(b) \frac{\log_a M}{\log_a N} = \log_a \frac{M}{N}$$

(c) La característica del $\log_3 30,256$ es 4.

(d) La mantisa del $\log_{\sqrt{10}} 2$ es doble que la mantisa de $\log 2$

$$(e) \log_3 A + \log_9 B = \log_3 A \cdot \sqrt{B} \quad A, B > 0$$

21. Sabiendo que $\log_a 34$ tiene de característica 2, hallar la base a .

22. Resolver las ecuaciones logarítmicas:

$$(1) 2 \cdot \log_a x + \log_a 25 = \log_a 625$$

$$(10) \log(7x - 9)^2 - \log(3x - 4)^2 = 2$$

$$(2) \log x = 1 + \log(22 - x)$$

$$(11) \log \sqrt[4]{x^3} - \log \sqrt{10} = \frac{1}{4}$$

$$(3) 3 \cdot \log_2 x - 4 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot \log_2 3$$

$$(12) \log_4 \log_3 \log_2 x = 0$$

$$(4) \log x^3 = \log 6 + 2 \cdot \log x$$

$$(13) \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$(5) 2 \log x = 1 + \log \left(x + \frac{11}{10} \right)$$

$$(14) \log_k x + \log_5 k = 3$$

$$(6) \log 8 + (x^2 - 5x + 7) \cdot \log 3 = \log 24$$

$$(15) \log_{x+2} \log_5 \log_2 (x^2 + 7) = 0$$

$$(7) \frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$(16) \log_3(5x^2 - 3x - 5) - \log_3(2x - 1) = 1$$

$$(8) \frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$$

$$(17) \log_3 (1 + 5 \cdot 2^{x+3}) = 4$$

$$(9) (x^2 - x + 3) \cdot \log 4 = 3 \cdot \log \frac{1}{4}$$

$$(18) \frac{\log_3(2x + 7)}{\log_9(2x^2 + 3x + 7)} = 1$$

$$(19) x^{\frac{7+\log x}{4}} = 10^{1+\log x}$$

$$(20) \log(2x + 4) + \log(3x + 1) - \log 4 = 2 \cdot \log(8 - x)$$

$$(21) \log_x 3 \cdot \log_3 e \cdot \ln 7 \cdot \log_7 9 = \log_x x^2$$

$$(22) 3 \cdot \log_8(6 - x) - \log_4(x^2 + 12)^2 = 1 - \log_2(x + 6)$$

$$(23) \log \sqrt{7x + 3} + \log \sqrt{4x + 5} = \frac{1}{2} + \log 3$$

$$(24) \log_4 \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \cdot \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$$

$$(25) \log_2(2x - 5) - 2 \cdot \log_4(x + 1) = 1 - \log_2(x^2 - 1)$$

$$(26) \frac{4 \log 2 + 2 \cdot \log(x - 3)}{\log(7x + 1) + \log(x - 6) + \log 3} = 1$$

$$(27) \log \left(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1 \right) - 1 = \log \left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2 \right) - 2 \log 2$$

23. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

$$(1) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x + y = 70 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \log_y(9 - x) = \frac{1}{2} \\ \log_x(y + 9) = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x = 7 - \log_2 y \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = -1 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \log x + 3 \cdot \log y = 5 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 3 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2 \cdot \log x - \log y = 5 \\ \log(x \cdot y) = 4 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} 2 \cdot \log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2 \cdot \log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2 \\ \log_b x - \log_b y = 4 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} \log_x(y-1) = 3 \\ \log_y(5-x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13 \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \log 8 \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} 3x + y - \log z = 4 \\ 2x - y = 1 \\ y + \log z^2 = 1 \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9 \\ x + y - 5a = 0 \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

$$(16) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(17) \begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 1 \end{cases}$$

$$(18) \begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x + \log_b y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

24. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales-logarítmicas:

$$(1) \begin{cases} 3^{x-5y} = 243 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} (0,5)^{3-x^2} = 8x+y \\ \log 2 + \log(2x+y) = 2 \cdot \log(3x+1) - 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 4^{x+2} - 3^{y-2} = 3 \\ \log_2(2^{x+1} + 3) - \log_2(3^{y-1} + 5) = -1 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 2^{x+3} - 3^y + 5 = 0 \\ \log_2\left(2^x + \frac{7}{2}\right) - \log_2(3^y - 1) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 4^{4x+3y-2} - 1 = 0 \\ \log_5(x+3y+1) = 1 \end{cases}$$

25. Calcular los límites:

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_2 \frac{2x+3}{8x-4} \right)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\log_2 \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} \right)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow e} \left(\ln \frac{x+e}{2} \right)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\log_5 \frac{x^2+x-6}{x-2} \right)$
- (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \ln \left(\frac{2x+3}{2x-2} \right) \right)$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x^2 \cdot \ln \left(\frac{x+3}{2x+3} \right)} \right)$
- (7) $\lim_{x \rightarrow -3} \log_5 \left(\frac{3x^2+8x-3}{x^2+4x+3} \right)$
- (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x+2} \ln \left(\frac{3x^2+5x-1}{3x^2+2} \right)$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \left(\frac{x^4+13x^2+3}{x^2+3} \right)$
- (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+2}{x+1} \cdot \log_2 \left(\frac{x+3}{2x+1} \right) \right]$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+1}{x} \cdot \ln \left(\frac{3x+2}{x+2} \right) \right]$

26. Si $\log_a N = 2.2577$ y el $\log_a(125 \cdot N) = 5.2577$, hallar **razonadamente** el valor de la base a del sistema de logaritmos.

27. ¿Cuántas cifras tienen las siguientes potencias?

$$2^{30}$$

$$6^{18}$$

$$32^{43}$$

Nota: $\log 2 = 0.3010$ y $\log 3 = 0.4771$

28. La propagación de una epidemia de gripe se modela por $\ln \mathbf{P} - (\mathbf{1} - \mathbf{P}) = \mathbf{k}t + \mathbf{C}$, dónde P representa la parte de población que ha contraído la gripe en el tiempo t (en semanas). Si, inicialmente, el 5% de la población tiene la gripe y 4 semanas más tarde el 20% ha enfermado, ¿cuándo el 50% de la población habrá contraído la gripe?

29. Cierta cultivo de bacterias triplica su peso cada 2 horas. Si inicialmente pesa 1 gramo, ¿cuándo pesaran 5 gramos?

30. La matrícula proyectada de dos I.E.S. en t años se modela por las funciones:

$$A(t) = 3000 (1.16)^{\frac{t}{10}}$$

$$B(t) = 5000 (0.95)^t$$

¿Cuándo tendrán matrículas iguales?

31. Cuando falla la unidad de refrigeración de un camión cargado con lechugas, la temperatura de éstas se aproxima a la del aire exterior de 22°C . La función $\mathbf{f(t)} = \mathbf{22 - ae^{bt}}$, para algunas constantes a y b , representa la temperatura en grados Celsius de las lechugas después de t horas.

- (a) Si las lechugas se mantuvieron inicialmente a 4°C y si se encuentra que, después de una hora, la temperatura es de 10°C , hallar las constantes a y b de la función $f(t)$.
- (b) Las lechugas hay que tirarlas a los 18°C . ¿Cuánto tiempo tiene el caminero para reparar la unidad de refrigeración antes de perder la mercancía?

32. Cierta lago tiene una población de P_0 peces en el instante $t = 0$. El tiempo t (en semanas) en el que esta población alcanza el valor P viene expresada por la fórmula $\mathbf{t = 15 \cdot \log_2 \left(\frac{P}{P_0} \right)}$

- (a) Hallar $P(t)$.
- (b) ¿Qué tiempo se necesita para duplicar la población? ¿Y triplicarla?