

## CAPÍTULO 7

## FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

### 7.1. Función exponencial

① Hallar, razonadamente, el dominio de la función  $f(x) = e^{\sqrt{3x-x^2}}$

La función  $f$  es la composición de tres funciones: polinómica,  $3x - x^2$ , irracional de índice par:  $\sqrt{x}$  y exponencial:  $e^x$ , su dominio es:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3x - x^2 \geq 0 \right\}$$

Las raíces de la ecuación  $3x - x^2 = 0$  son  $x = 0$  y  $x = 3$ . Solución de la inecuación:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x(3-x) & \boxed{-} & 0 & \boxed{+} & 0 & \boxed{-} & \\
 \hline
 & & 0 & & 3 & & 
 \end{array}$$

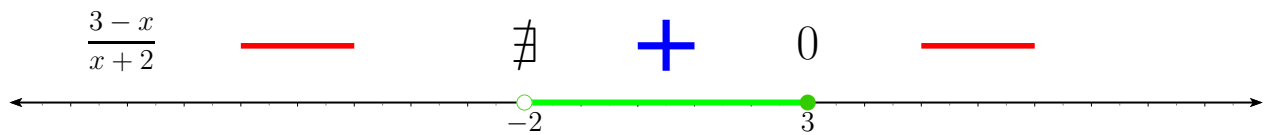
El dominio de la función es:  $D_f = [0, 3]$

② Hallar, razonadamente, el dominio de la función  $f(x) = e^{\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}}$ .

La función es la composición de la función  $g(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$  con la función  $h(x) = e^x$ ,  $f(x) = (h \circ g)(x)$

El dominio máximo de la función es:  $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0 \wedge x+2 \neq 0 \right\}$

- Solución de la inecuación  $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$ . Las raíces del numerador y denominador de la fracción algebraica son  $\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$  y el **SIGNO** de la fracción algebraica es:



El dominio de la función es:  $D_f = (-2, 3]$

③ Sea la función  $f(x) = 3^{2-x} - 3$ .

- Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la función.
- Hallar, si existen, las asíntotas de la función.
- Representar la gráfica de la función  $f(x)$  mediante traslaciones.

a) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la función.

**Eje de ordenadas:** imagen de cero  $\implies f(0) = 3^2 - 3 = 6 \implies (0, 6)$ .

**Eje de abscisas:** antiimagen de cero  $f^{-1}(0) \implies 3^{2-x} - 3 = 0 \implies 3^{2-x} = 3$ , la función exponencial es inyectiva:  $2 - x = 1 \implies x = 1$ . La gráfica de la función corta al eje de abscisas en el punto  $(1, 0)$ .

b) Hallar, si existen, las asíntotas de la función.

**Asíntotas verticales:** La función es continua en su dominio,  $\mathbb{R}$ , suma y composición de funciones continuas por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

**Asíntotas horizontales:**

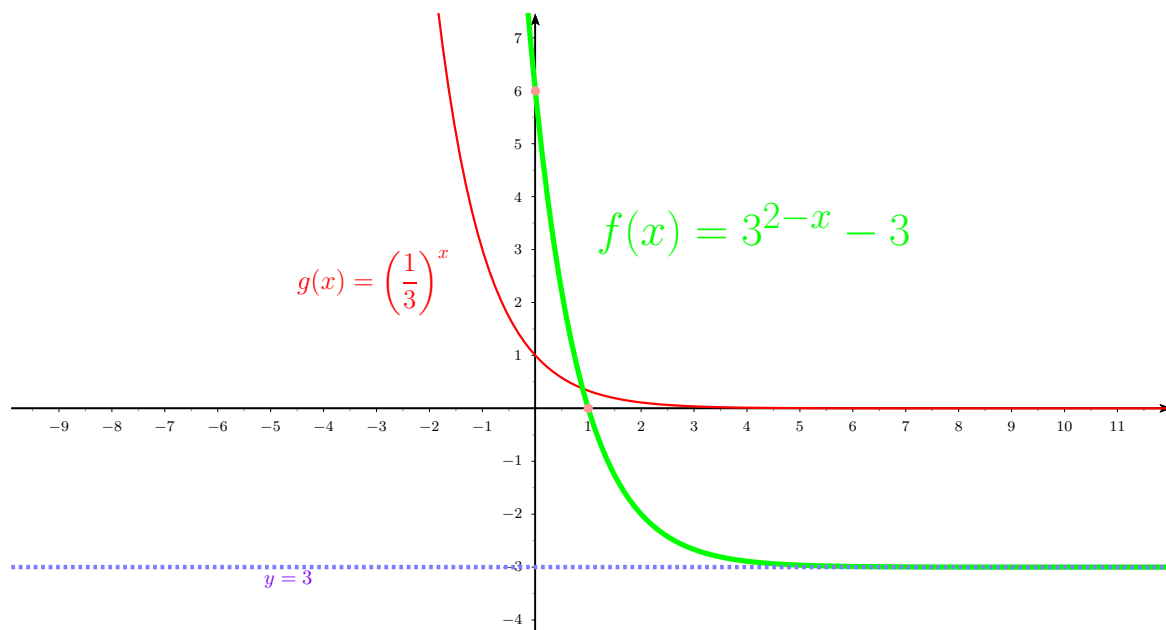
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^{2-x} - 3) = 3^{+\infty} + 5 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{2-x} - 3) = 3^{-\infty} + 5 = 0 + 5 = \boxed{5}$$

La recta  $y = 5$  es A.H. cuando  $x \rightarrow +\infty$

c) Representar la gráfica de la función  $f(x)$  mediante traslaciones.

La función  $f(x) = 3^{2-x} - 3 = 3^{-(x-2)} - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 3$ . La gráfica de la función  $f(x)$  es la de la función  $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  trasladada según el vector  $v = (2, -3)$ .



④ Sea la función  $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}}$  :

a) Hallar su dominio máximo.

b) Hallar, si existe, su asíntota vertical.

c) Demostrar que las rectas  $y = e$  e  $y = \frac{1}{e}$  son sus asíntotas horizontales.

a) Hallar su dominio máximo.

La función se lee: *exponencial del cociente entre la raíz cuadrada de un polinomio y un polinomio.*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 \geq 0 \wedge x + 3 \neq 0\}$$

La solución de la inecuación  $x^2 - 1 \geq 0$  es  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . La raíz del polinomio del denominador es  $x = -3$ .

$$D_f = \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \setminus \{-3\}$$

b) Hallar, si existe, su asíntota vertical.

La función es composición de funciones continuas, en su dominio la función es continua.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-3-h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{(-3-h)^2-1}}{-3-h+3}} = e^{\frac{\sqrt{8}}{-0}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-3+h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{(-3+h)^2-1}}{-3+h+3}} = e^{\frac{\sqrt{8}}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

La recta  $x = -3$  es A.V. cuando  $x \rightarrow -3^+$

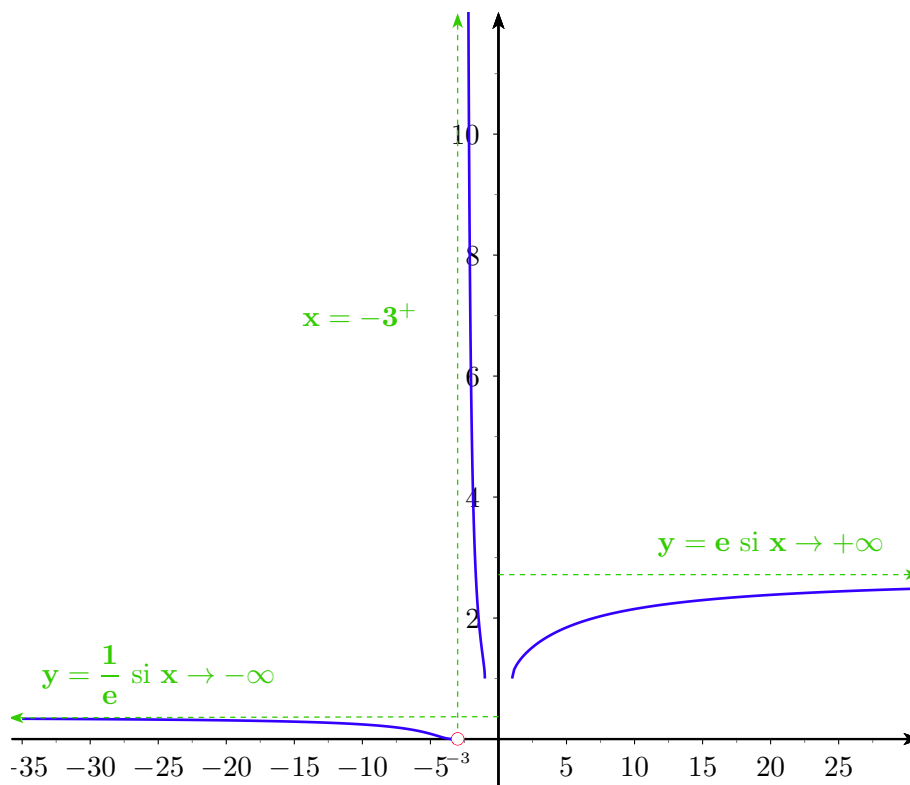
c) Demostrar que las rectas  $y = e$  e  $y = \frac{1}{e}$  son sus asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}} = e^{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} = e^1 = e \implies y = e \text{ si } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}} = e^{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} \stackrel{x=-t}{=} e^{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{-t+3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

La recta  $y = \frac{1}{e}$  si  $x \rightarrow -\infty$

La gráfica de la función  $f(x)$  efectuada con el programa GEOGEBRA es:



⑤ Resolver las ecuaciones:

a)  $3^{1-x} = \frac{1}{243}$ .

b)  $(0,25)^{-x^2+2} = 4 \cdot 2^{-x}$ .

c)  $25^{x^2+x} = (0,2)^{3x+3}$

d)  $2^{\sqrt{2x+8}} = 4^{\sqrt{x-3}+1}$

e)  $0,25 \cdot 2^{x^2-2x-4} = 0,125$

f)  $4^{x-3} = 1 + 3 \cdot 2^{x-4}$

g)  $25^{\sqrt{x+3}} = 5 \cdot 5^{\sqrt{x+3}}$

h)  $625^{\sqrt{x+3}} - 25^x = 0$

i)  $4^{x+3} + 2^{x+2} = 5$

a)  $3^{1-x} = \frac{1}{243}$ .

Descomponiendo factorialmente:  $243 = 3^5$

$$3^{1-x} = \frac{1}{3^5} \implies 3^{1-x} = 3^{-5} \iff 1-x = -5 \implies x = 6$$

Solución de la ecuación:  $x = 6$

$$b) (0,25)^{-x^2+2} = 4 \cdot 2^{-x}.$$

Descomponiendo factorialmente:  $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$  y  $4 = 2^2$ .

$$2^{(-2) \cdot (-x^2+2)} = 2^{2+(-x)} \xrightarrow{(1)} -2(-x^2+2) = 2-x \implies 2x^2+x-6=0 \implies$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Las soluciones son  $x = -2$  y  $x = \frac{3}{2}$

Razonamientos

(1) La función exponencial de base dos es INYECTIVA.

$$c) 25^{x^2+x} = (0,2)^{3x+3}.$$

Descomponiendo factorialmente:  $25 = 5^2$  y  $0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$

$$5^{2 \cdot (x^2+x)} = 5^{-(3x+3)} \xrightarrow{(1)} 2x^2 + 2x = -3x - 3 \implies 2x^2 + 5x + 3 = 0 \implies$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son  $x = -1$  y  $x = -\frac{3}{2}$

Razonamientos

(1) La función exponencial de base cinco es INYECTIVA.

$$d) 2^{\sqrt{2x+8}} = 4^{\sqrt{x-3}+1}.$$

Descomponiendo:  $4 = 2^2$

$$2^{\sqrt{2x+8}} = 2^{2(\sqrt{x-3}+1)} \xrightarrow{(1)} \sqrt{2x+8} = 2(\sqrt{x-3}+1) \xrightarrow{(2)} 2x+8 = 4(x-3+2\sqrt{x-3}+1) \xrightarrow{(3)}$$

$$x+4 = 2x-4+4\sqrt{x-3} \xrightarrow{(4)} 4\sqrt{x-3} = 8-x \xrightarrow{(2)} 16(x-3) = x^2-16x+64 \implies$$

$$x^2-32x+112=0 \xrightarrow{(5)} x = 16 \pm \sqrt{256-112} = 16 \pm 12 = \begin{cases} x = 28 \\ x = 4 \end{cases}$$

Discusión de las soluciones:

- Si  $x = 28$  entonces sustituyendo en la ecuación irracional:  $\begin{cases} \sqrt{64} = 8 \\ 2(\sqrt{25}+1) = 2(5+1) = 12 \end{cases}$

$x = 28$ , NO es solución de la ecuación irracional y tampoco de la ecuación exponencial

- Si  $x = 4$  entonces  $\sqrt{16} = 2(\sqrt{1}+1) \implies 4 = 4$ .

$x = 4$  es la solución de la ecuación exponencial

Razonamientos

(1) La función exponencial de base dos es INYECTIVA.

- (2) Ecuación irracional, elevando al índice de la raíz aislada.
- (3) Simplificando por dos.
- (4) Aislado la raíz.
- (5) Forma reducida de resolver una ecuación de segundo grado.

$$e) 0,25 \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = 0,125$$

$$\begin{aligned} 0,25 \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 &= 0,125 \stackrel{(1)}{\implies} \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = \frac{1}{8} \implies 2^{-2} \cdot 2^{x^2} - 2x - 4 = 2^{-3} \stackrel{(2)}{\implies} \\ 2^{-2+x^2-2x-4} &= 2^{-3} \stackrel{(3)}{\iff} x^2 - 2x - 6 = -3 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x &= 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación exponencial son  $x = -1$  y  $x = 3$

Razonamientos

- (1)  $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$  y  $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$
- (2) Producto de potencias de la misma base.
- (3) Las funciones exponenciales son inyectivas.

$$f) 4^x - 3 = 1 + 3 \cdot 2^{x-4}$$

$$\begin{aligned} 4^x - 3 &= 1 + 3 \cdot 2^{x-4} \implies 2^{2(x-3)} = 1 + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-4} \implies 2^{2x} \cdot 2^{-6} = 1 + 3 \cdot \frac{2^x}{16} \\ \frac{2^{2x}}{64} &= 1 + 3 \cdot \frac{2^x}{16} \stackrel{(1)}{\implies} t^2 = 64 + 12t \implies t^2 - 12t - 64 = 0 \\ t &= 6 \pm \sqrt{36 + 64} = 6 \pm 10 = \begin{cases} t_1 = 16 \\ t_2 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} \text{Si } t = 16 \implies 2^x = 2^4 \implies x = 4 \\ \text{Si } t = -4 \implies 2^x = -4 \end{cases} \quad \text{No hay solución real: } a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

La solución de la ecuación exponencial es  $x = 4$

Razonamientos

- (1) CAMBIO DE VARIABLE:  $2^x = t$  y m.c.m.(16, 64) = 64.

$$g) 25\sqrt{x+3} = 5 \cdot 5\sqrt{x+3}.$$

$$\begin{aligned} 25\sqrt{x+3} &= 5 \cdot 5\sqrt{x+3} \stackrel{(1)}{\implies} 5^{2\sqrt{x+3}} = 5^{1+\sqrt{x+3}} \stackrel{(2)}{\implies} 2\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+3} &= 1 \stackrel{(3)}{\implies} x+3 = 1 \implies x = -2 \end{aligned}$$

La solución es  $x = -2$

## Razonamientos

- (1)  $25 = 5^2$  y producto de potencias de la misma base.
- (2) Las funciones exponenciales son inyectivas.
- (3) Ecuación irracional: se elevan los dos miembros de la ecuación al índice del radical (en este caso dos).

$$h) 625^{\sqrt{x+3}} - 25^x = 0.$$

Las dos bases son potencias de 25:

$$625^{\sqrt{x+3}} = 25^x, \quad (25^2)^{\sqrt{x+3}} = 25^x \xrightarrow{(1)} 25^{2\sqrt{x+3}} = 25^x \xrightarrow{(2)} 2\sqrt{x+3} = x \xrightarrow{(3)} (2\sqrt{x+3})^2 = x^2$$

$$4(x+3) = x^2 \implies x^2 - 4x - 12 = 0 \implies (x-2)^2 = 16 \implies x = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Comprobación de las soluciones en la ecuación irracional  $2\sqrt{x+3} = x$ :

$$\begin{cases} x_1 = 6 \implies 2\sqrt{6+3} = 2 \cdot 3 = 6 \implies x = 6 \text{ es solución.} \\ x_2 = -2 \implies 2\sqrt{-2+3} = 2 \cdot 1 \neq -2 \text{ NO es solución} \end{cases}$$

La solución de la ecuación exponencial es:  $x = 6$

## Razonamientos

- (1) Propiedad de las funciones exponenciales.
- (2) La función exponencial es inyectiva.
- (3) Ecuación irracional e índice de la raíz aislada, dos.

$$i) 4^{x+3} + 2^{x+2} = 5$$

Por las propiedades de las funciones exponenciales:  $4^x \cdot 4^3 + 2^x \cdot 2^2 - 5 = 0 \implies 64 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 5 = 0$

Cambio de variables:  $\boxed{2^x = t}$ .

$$64t^2 + 4t - 5 = 0 \implies t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{128} = \frac{-4 \pm 36}{128} = \begin{cases} t_1 = \frac{1}{4} \\ t_2 = -\frac{5}{16} \end{cases}$$

Solución:  $\begin{cases} 2^x = \frac{1}{4} \implies 2^x = 2^{-2} \implies \boxed{x = -2} \\ 2^x = -\frac{5}{16} \text{ las imágenes de las funciones exponenciales siempre positivas} \\ \text{No es solución} \end{cases}$

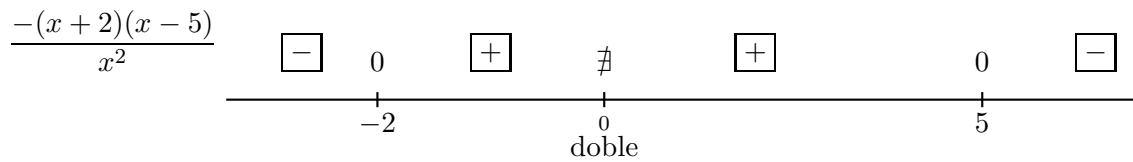
## 7.2. Función logarítmica

$$\textcircled{1} \text{ Hallar el dominio de la función } f(x) = \log\left(\frac{10 + 3x - x^2}{x^2}\right)$$

La función  $f$  es la composición de un cociente de polinomios con la función logarítmica, su dominio es:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{10 + 3x - x^2}{x^2} > 0 \wedge x^2 \neq 0 \right\}$$

Las raíces del polinomio del numerador son  $x = 5$  y  $x = -2$  y las raíces del denominador es  $x = 0$ , doble.



El dominio de la función es:  $D_f = (-2, 5) \setminus \{0\}$

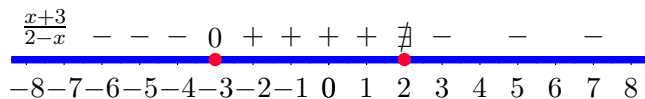
② Hallar el dominio máximo de la función  $f(x) = \log_2 \left( \frac{x+3}{2-x} \right)$

Logaritmo base dos DEL cociente de dos funciones polinómicas.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+3}{2-x} > 0 \wedge 2-x \neq 0 \right\}$$

Los ceros de las funciones del numerador y del denominador:  $\begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Solución de la inecuación  $\frac{x+3}{2-x} > 0$ .



$$D_f = (-3, 2)$$

③ Calcular:  $\log_3 81 + \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_7 \sqrt[3]{49}$

$$\begin{cases} \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \\ \log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 5^2 = \log_{\frac{1}{5}} \left( \frac{1}{5} \right)^{-2} = -2 \\ \log_t \sqrt[3]{49} = \log_3 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\log_3 81 + \log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_7 \sqrt[3]{49} = 4 - 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

④ Resolver la ecuación logarítmica:  $3 \cdot \log_8(6-x) - \log_4(x^2+12)^2 = 1 - \log_2(x+6)$

Cambio a base 2 y propiedad del logaritmo de una potencia.

$$\frac{3 \cdot \log_2(6-x)}{\log_2 8} - \frac{2 \cdot \log_2(x^2+12)}{\log_2 4} = \log_2 2 - \log_2(x+6)$$

$$\frac{3 \cdot \log_2(6-x)}{3} - \frac{2 \log_2(x^2+12)}{2} = \log_2 2 - \log_2(x+6) \xLeftrightarrow{(1)} \log_2 \left( \frac{6-x}{x^2+12} \right) = \log_2 \left( \frac{2}{x+6} \right) \xLeftrightarrow{(2)}$$

$$\frac{6-x}{x^2+12} = \frac{2}{x+6} \implies 36 - x^2 = 2x^2 + 24 \implies x = \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Sustituyendo las soluciones en la ecuación logarítmica ambas son solución:  $x = \pm 2$

### Razonamientos

- (1) Suma de logaritmos y diferencia de logaritmos de la misma base.
- (2) Las funciones logaritmos son inyectivas.

⑤ Resolver el sistema exponencial-logarítmico: 
$$\begin{cases} \log_3(2^x - 7) - \log_3(3^y - 2) = 2 \\ 2^x + 2 = 2 \cdot 9^y \end{cases}$$

■ Propiedades de los logaritmos:  $\log_3 \left( \frac{2^x - 7}{3^y - 2} \right) = 2 \iff \frac{2^x - 7}{3^y - 2} = 9$

■ **ATENCIÓN:**  $9^y = (3^2)^y = 3^{2y}$  y la ecuación es:  $2^x + 2 = 2 \cdot 9^y \iff 2^x + 2 = 2 \cdot 3^{2y}$

■ Cambio de variable:  $\begin{cases} 2^x = t \\ 3^y = z \end{cases} \implies 3^{2y} = z^2$

■ El sistema de ecuaciones es:  $\begin{cases} t - 9z = -11 \\ t + z = 2z^2 \end{cases} \implies t = 2z^2 - 2$ . Sustituyendo:

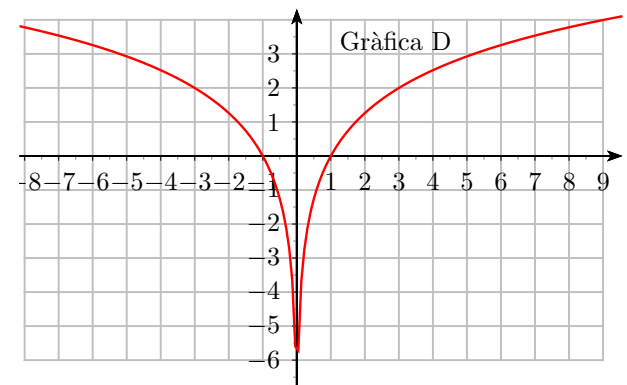
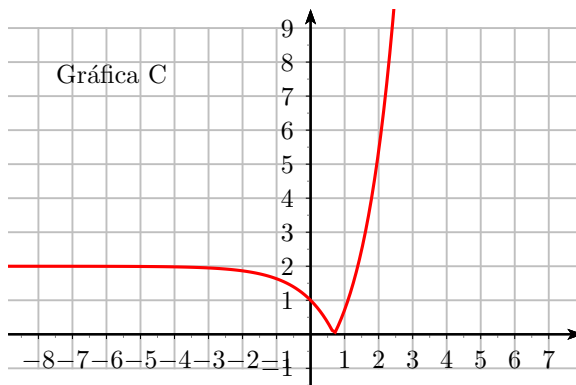
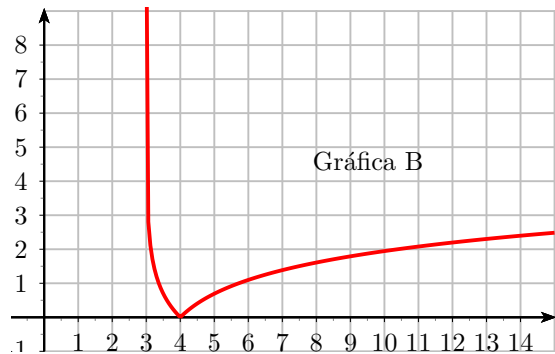
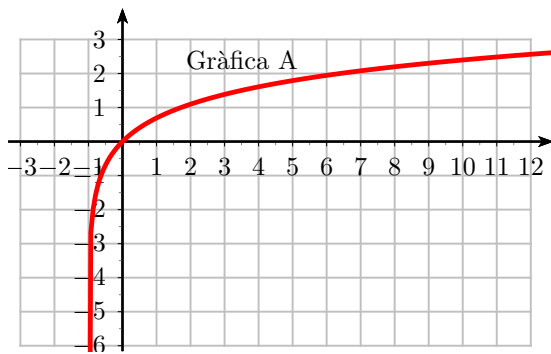
$$2z^2 - 9z + 9 = 0 \implies z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} z_1 = 3 \implies t_1 = 16 \implies \begin{cases} 3^y = 1 \implies y = 1 \\ 2^x = 16 \implies x = 4 \end{cases} \\ z_2 = \frac{3}{2} \implies t_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

La segunda solución algebraica, NO ES SOLUCIÓN de la ecuación logarítmica.

Solución:  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

⑥ Asociar a cada función su gráfica:

a)  $f_1(x) = |e^x - 2|$       b)  $f_2(x) = |\log(x - 3)|$       c)  $f_3(x) = \log|x|$       d)  $f_4(x) = \log(x + 1)$



(a)  $f_1(x) = |e^x - 2|$  Por ser un valor absoluto, las imágenes son mayores o iguales que cero.

La gráfica debe estar en los cuadrantes uno y dos. La gráfica de la función  $g(x) = e^x - 2$ , es la exponencial de base  $e$ , desplazada dos unidades negativas en el eje de ordenadas.

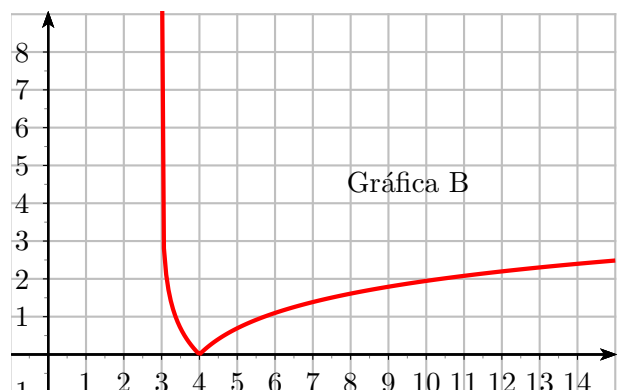
Corresponde con la gráfica **C**.



(b)  $f_2(x) = |\log(x - 3)|$ .

Es el valor absoluto de la función logaritmo desplazada tres unidades a la derecha en el eje de abscisas.

Corresponde con la gráfica **B**.

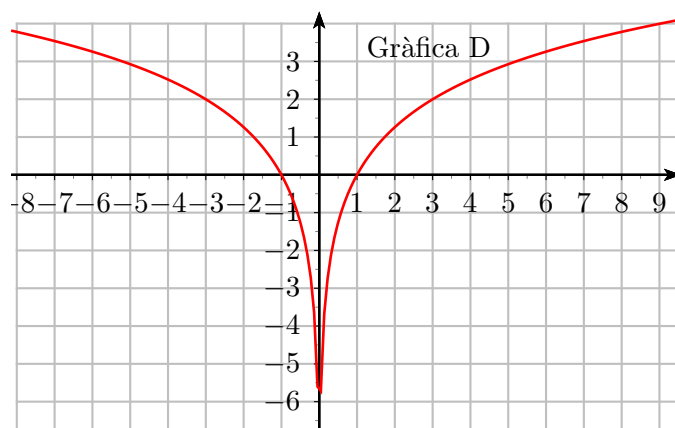


(c)  $f_3(x) = \log|x|$

La función es el logaritmo DE un valor absoluto:

$$\log|x| = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x < 0 \\ \log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Corresponde con la gráfica D.



(d)  $f_4(x) = \log(x + 1)$

La gráfica corresponde con la función logaritmo desplazada UNA unidad a la IZQUIERDA en el eje de abscisas.

Corresponde con la gráfica A.

