

La palabra, TRI-GONO-METRÍA, etimológicamente significa relación entre los lados y ángulos de un triángulo

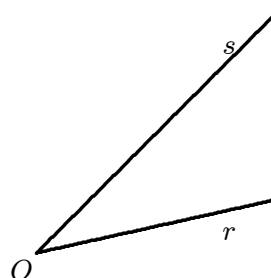
7.1 Ángulos

Definición 7.1 (Ángulo). *Un ángulo es la abertura de dos semirrectas que parten del mismo punto.*

Elementos asociados a un ángulo

Lados Son cada una de las semirrectas que forman el ángulo
, r y s .

Vértice Es el punto de intersección de los lados O



El sentido de recorrido de un ángulo es:

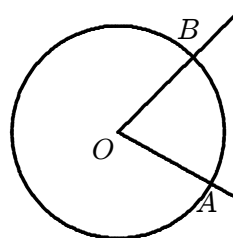
POSITIVO si es el contrario del movimiento de las agujas de un reloj. 

NEGATIVO si es el del movimiento de las agujas de un reloj. 

El ángulo $\sphericalangle(O, r, s)$ es positivo y el ángulo $\sphericalangle(O, s, r)$ es negativo.

Ángulo central

Consideramos una circunferencia de centro O y radio cualquiera, los lados r y s determinan en la circunferencia una arco AB . Este ángulo recibe el nombre de ángulo central y AB es su arco correspondiente.



Determinan dos ángulos orientados: $\sphericalangle(A, O, B)$ es positivo y el ángulo $\sphericalangle(B, O, A)$ es negativo.

7.1.1 Referencia angular

En unos ejes de coordenadas cartesianas:

Vértice del ángulo Origen de coordenadas O .

Origen de ángulos Semieje positivo de abscisas.

Orientación Positiva en el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj.

Extremo del arco El punto B .

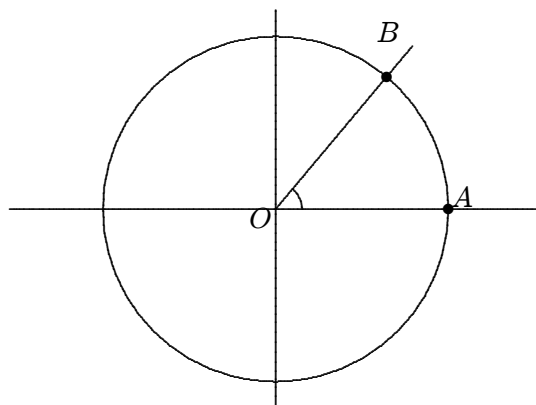


Figura 7.1: Referencia angular

7.1.2 Medida de ángulos

Sistema sexagesimal

Definición 7.2 (Grado sexagesimal). La circunferencia se divide en 360 partes iguales, cada una de ella recibe el nombre de grado sexagesimal, que se denota con el símbolo $^{\circ}$.

Definición 7.3 (Minuto sexagesimal). Cada grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales, cada una de ella recibe el nombre de minuto sexagesimal, que se denota con el símbolo $'$.

Definición 7.4 (Segundo sexagesimal). Cada minuto sexagesimal se divide en 60 partes iguales, cada una de ella recibe el nombre de segundo sexagesimal, que se denota con el símbolo $''$.

Ejemplo: Un ángulo de $23^{\circ}35'47''$ se lee: veintitrés grados, treinta y cinco minutos y cuarenta y siete segundos.

Sistema centesimal

Definición 7.5 (Grado centesimal). La circunferencia se divide en 400 partes iguales, cada una de ella recibe el nombre de grado centesimal, que se denota con el símbolo ^{g} .

Definición 7.6 (Minuto centesimal). Cada grado centesimal se divide en 100 partes iguales, cada una de ella recibe el nombre de minuto centesimal, que se denota con el símbolo ^{m} .

Definición 7.7 (Segundo centesimal). Cada minuto centesimal se divide en 100 partes iguales, cada una de ella recibe el nombre de segundo centesimal, que se denota con el símbolo ^{s} .

Ejemplo: Un ángulo de $23^g75^m87^s$ se lee: veintitrés grados, treinta y cinco minutos y cuarenta y siete segundos, centesimales.

Radián

Definición 7.8 (Radián). *Un radián es la medida del ángulo cuyo arco tiene de longitud, el radio de la circunferencia con el que ha sido trazado. (Fig 4.2)*

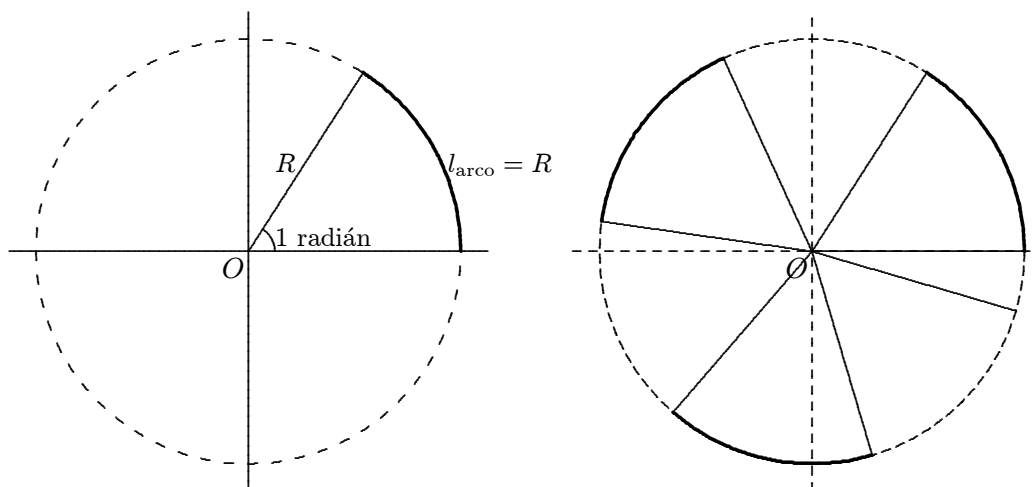


Figura 7.2: Radián

La longitud de la circunferencia de radio R es igual a $2\pi R$, por lo tanto el número de veces que el radio esté en dicha longitud, es el número de radianes de una circunferencia:

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ radianes} \approx 6.28318 \text{ radianes}$$

Uso de la calculadora:

- El sistema sexagesimal: DEG
- El sistema centesimal: GRA
- Radianes: RAD

Conversión de un sistema a otro:

Sexagesimal a radián El factor de conversión es: $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{\pi \text{rad}}{180^\circ}$

Radianes a sexagesimal El factor de conversión es: $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{180^\circ}{\pi \text{rad}}$

Ejemplos:

1. Convertir a radianes el ángulo $\alpha = 30^\circ$.

$$\alpha = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$

2. Convertir al sistema sexagesimal el ángulo $\beta = 1.3 \text{ radianes}$.

$$\beta = 1.3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 74^\circ 29' 4'' .24$$

7.2 Definición general de las razones trigonométricas

En la figura(4.3) los triángulos de vértices OAB , OCD , OEF , OGH , OIJ , etc., son semejantes por tener los tres ángulos iguales.

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OH} = \frac{IJ}{OI} = \dots = \frac{y}{R} = \sin \alpha \quad (7.1)$$

Definición 7.9 (Seno). *El seno de un ángulo es la razón entre la ordenada del extremo del arco y el radio con el cual ha sido trazado.*

$$\sin \alpha = \frac{\text{ordenada del extremo del arco}}{\text{radio}} = \frac{y}{R}$$

También se verifica:

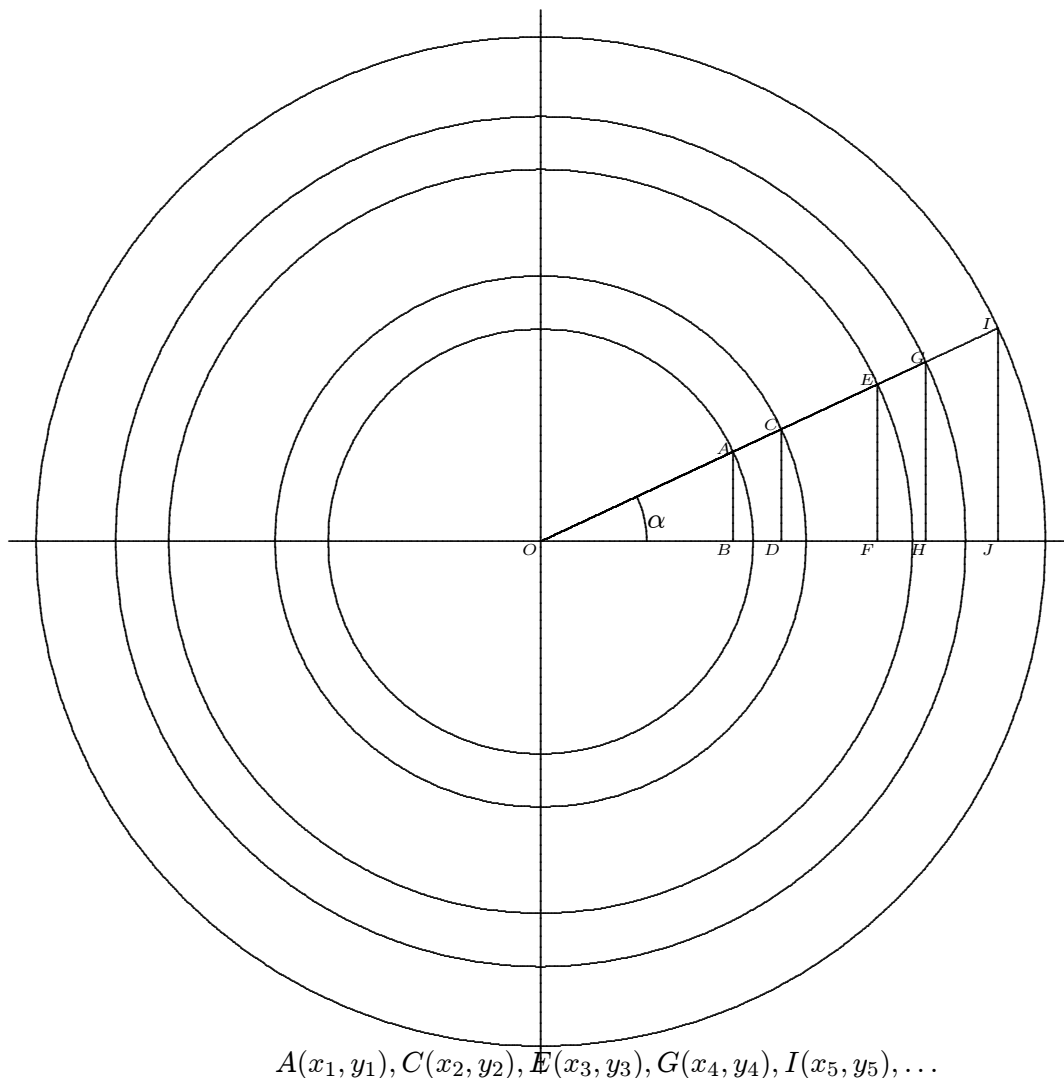


Figura 7.3: Circunferencia trigonométrica

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \frac{OJ}{OI} = \dots = \frac{x}{R} = \cos \alpha \quad (7.2)$$

Definición 7.10 (Coseno). *El coseno de un ángulo es la razón entre la abscisa del extremo del arco y el radio con el cual ha sido trazado.*

$$\cos \alpha = \frac{\text{abscisa del extremo del arco}}{\text{radio}} = \frac{x}{R}$$

Así mismo:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \frac{IJ}{OI} = \dots = \frac{y}{x} = \tan \alpha \quad (7.3)$$

Definición 7.11 (Tangente). *La tangente de un ángulo es la razón entre la ordenada del extremo del arco y su abscisa, ($x \neq 0$).*

$$\tan \alpha = \frac{\text{ordenada del extremo del arco}}{\text{abscisa del extremo del arco}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad x \neq 0$$

Las razones trigonométricas inversas:

Definición 7.12 (Cosecante). *La cosecante de un ángulo es la razón entre el radio y la ordenada del extremo del arco y $y \neq 0$.*

$$\csc \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada del extremo del arco}} = \frac{R}{y} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad y \neq 0$$

Definición 7.13 (Secante). *La secante de un ángulo es la razón entre el radio y la abscisa del extremo del arco $x \neq 0$.*

$$\sec \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa del extremo del arco}} = \frac{R}{x} = \frac{1}{\cos \alpha} \quad x \neq 0$$

Definición 7.14 (Cotangente). *La cotangente de un ángulo es la razón entre la abscisa del extremo del arco y su ordenada, ($y \neq 0$).*

$$\cot \alpha = \frac{\text{abscisa del extremo del arco}}{\text{ordenada del extremo del arco}} = \frac{x}{y} \quad y \neq 0$$

7.2.1 Signos de las razones trigonométricas

(Figura 4.4)

$$\text{Primer cuadrante: } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{R} = \frac{+}{+} = +$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{+}{+} = +$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\csc \alpha = \frac{R}{y} = \frac{+}{+} = +$$

$$\sec \alpha = \frac{R}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{+}{+} = +$$

Segundo cuadrante: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\sin \alpha = \frac{y}{R} = \frac{+}{+} = +$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{-}{+} = -$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\csc \alpha = \frac{R}{y} = \frac{+}{+} = +$$

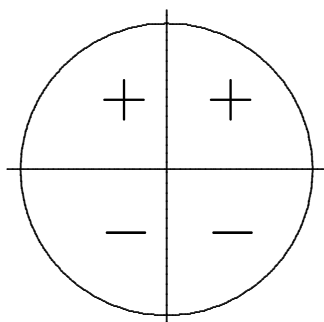
$$\sec \alpha = \frac{R}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-}{+} = -$$

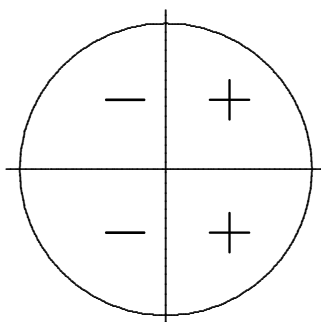
SENO

COSENO

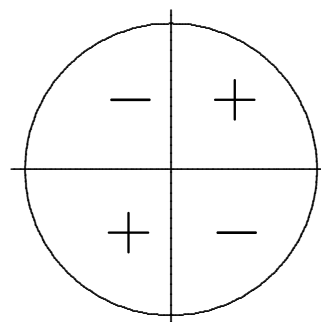
TANGENTE



COSECANTE



SECANTE



COTANGENTE

Figura 7.4: Signos de las razones trigonométricas

Tercer cuadrante: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{y}{R} = \frac{-}{+} = -$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{-}{+} = -$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-}{-} = +$$

$$\csc \alpha = \frac{R}{y} = \frac{+}{-} = -$$

$$\sec \alpha = \frac{R}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-}{-} = +$$

Cuarto cuadrante: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$$\sin \alpha = \frac{y}{R} = \frac{-}{+} = -$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{+}{+} = +$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-}{+} = -$$

$$\csc \alpha = \frac{R}{y} = \frac{+}{-} = -$$

$$\sec \alpha = \frac{R}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{+}{-} = -$$

7.2.2 Líneas trigonométricas

Se llama circunferencia goniométrica a aquella de radio la unidad ($R = 1$).

Las razones trigonométricas tienen una interpretación geométrica muy sencilla en la circunferencia goniométrica.

En primer lugar ángulos cuyo extremo está situado en el primer cuadrante:

Por definición de las razones trigonométricas, y $\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OE} = \text{radio} = 1$:

$$\bullet \sin \alpha = \overline{AB}$$

$$\bullet \cos \alpha = \overline{OB}$$

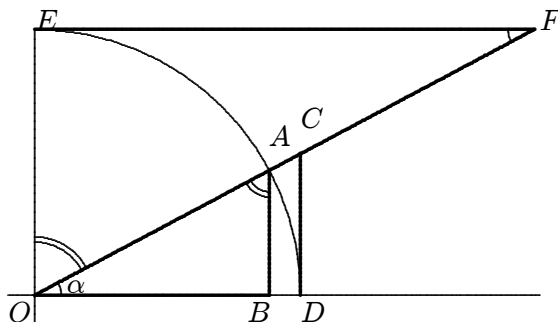


Figura 7.5: Líneas trigonométricas en el primer cuadrante

Los triángulos OBA y ODC son semejantes por tener los tres ángulos iguales

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} \Rightarrow \frac{CD}{OD} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{1}{x} = \sec \alpha$$

Los triángulos OBA y OEF son semejantes por tener los tres ángulos iguales:

$$\frac{OF}{OA} = \frac{OE}{AB} \Rightarrow \frac{OF}{OA} = \frac{1}{y} = \csc \alpha$$

$$\frac{EF}{OB} = \frac{OE}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{OB} = \frac{x}{y} = \cot \alpha$$

Para los restantes cuadrantes se hace un razonamiento análogo.

7.2.3 Acotación de las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas seno y coseno están acotadas entre -1 y 1 . Efectivamente por las definiciones 4.9 y 4.10 y $R \neq 0$:

$$-R \leq y \leq R \quad -1 \leq \frac{y}{R} \leq 1 \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-R \leq x \leq R \quad -1 \leq \frac{x}{R} \leq 1 \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\boxed{-1 \leq \sin \alpha \leq 1}$$

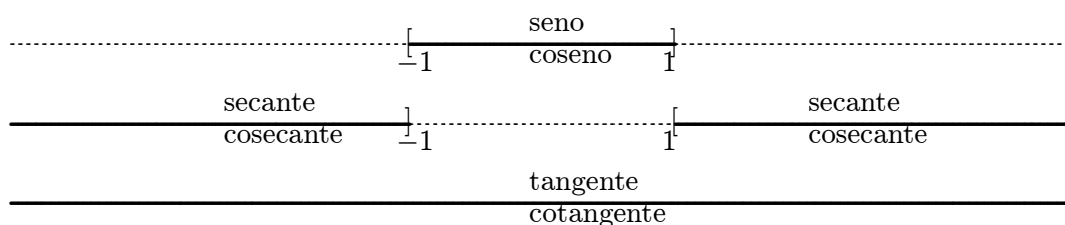


Figura 7.6: Valores de las razones trigonométricas

Las razones inversa cosecante y secante, verifican:

$$\begin{aligned}\csc \alpha &\in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \sec \alpha &\in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\end{aligned}$$

Las razones tangente y cotangente al ser cociente de abscisa y ordenadas, no están acotadas y toman cualquier valor real:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &\in \mathbb{R} \\ \cot \alpha &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

7.3 Relación fundamental de la trigonometría

Consideremos un ángulo cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$ y las definiciones 4.9 y 4.10 y la figura 4.3:

$$\left. \begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{y^2}{R^2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{x^2}{R^2}\end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2}{R^2} = \frac{x^2 + y^2}{R^2} \stackrel{*}{=} \frac{R^2}{R^2} = 1$$

(*):Teorema de Pitágoras

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}} \quad (7.4)$$

El seno cuadrado de un ángulo más el coseno cuadrado del mismo ángulo es igual a la unidad.

En la relación fundamental (4.4), si $\cos \alpha \neq 0$, dividimos por $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0 \quad (7.5)$$

Así mismo, si $\sin \alpha \neq 0$, dividimos por $\sin^2 \alpha$:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0 \quad (7.6)$$

$\therefore$ Si $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, hallar las restantes razones trigonométricas

Aplicando la relación fundamental (4.4):

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{25 - 9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}\end{aligned}$$

El signo del seno hay que determinarlo según en qué cuadrante se encuentre el extremo del arco. El enunciado nos dice que el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante, por lo tanto el seno debe tomar un valor positivo Fig(4.4):

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \qquad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \qquad \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

7.4 Relación entre las razones de ángulos

7.4.1 Ángulos complementarios

Definición 7.15 (Ángulos complementarios). Dos ángulos α y β son complementarios si suman un recto (90°).

$$\alpha \text{ y } \beta \text{ son complementarios} \iff \alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

Los triángulos formados son rectángulos e iguales, por tener los ángulos agudos iguales y la hipotenusa

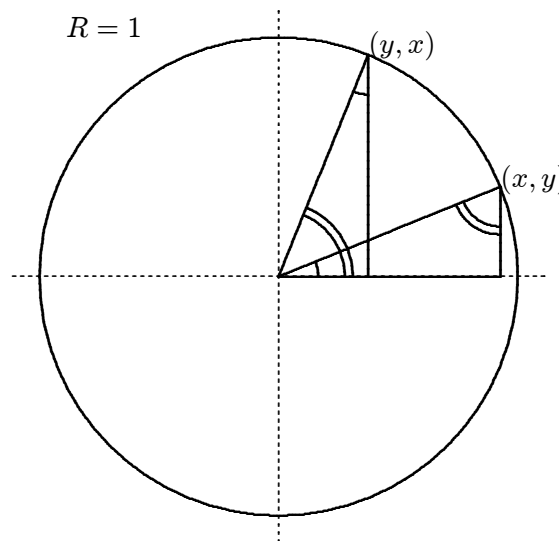


Figura 7.7: Ángulos complementarios: $\beta = 90^\circ - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$

común $R = 1$. Por lo tanto los catetos son iguales, aplicando las definiciones del seno y coseno y las líneas trigonométricas:

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

$$\tan \beta = \cot \alpha$$

Si el extremo del ángulo α tiene de coordenadas (x, y) entonces el de β tiene de coordenadas (y, x)

7.4.2 Ángulos suplementarios

Definición 7.16 (Ángulos suplementarios). Dos ángulos α y β son suplementarios si suman dos rectos (180°).

$$\alpha \text{ y } \beta \text{ son suplementarios} \iff \alpha + \beta = 180^\circ = \pi$$

Los triángulos formados son rectángulos e iguales, por tener los ángulos agudos iguales y la hipotenusa común $R = 1$. Por lo tanto los catetos son iguales, aplicando las definiciones del seno y coseno y las líneas trigonométricas:

$$\sin \beta = \sin \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \tan \beta = -\tan \alpha \quad (7.7)$$

Si el extremo del ángulo α tiene de coordenadas (x, y) entonces el de β tiene de coordenadas $(-x, y)$.

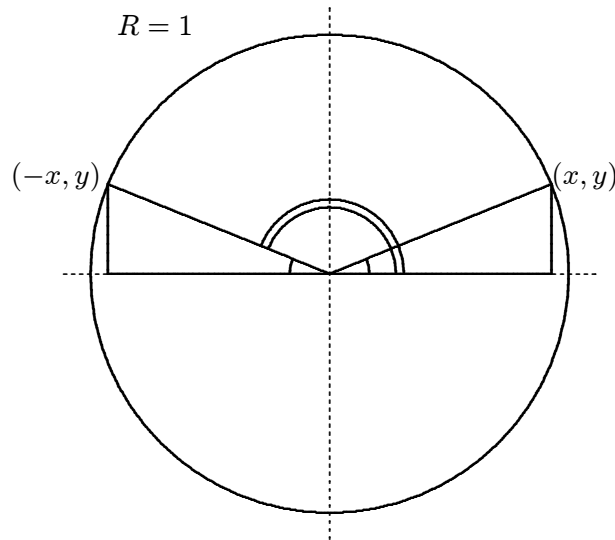


Figura 7.8: Ángulos suplementarios: $\beta = 180^\circ - \alpha = \pi - \alpha$

Reducción del segundo cuadrante al primero

Las razones trigonométricas de los ángulos de extremos situados en el segundo cuadrante, son las razones trigonométricas del suplementario ($180^\circ - \alpha$) con los signos del segundo cuadrante (4.7)

7.4.3 Cálculo trigonométrico

7.4.3.1 Razones trigonométricas de 0° , 90° y 180°

Aplicando las definiciones 4.9, 4.10 y 4.11:

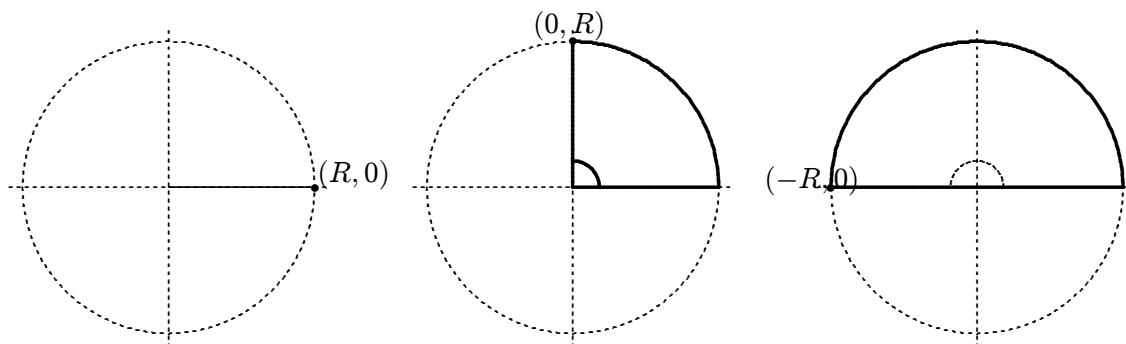


Figura 7.9: Razones trigonométricas de 0° , 90° y 180°

	0°	90°	180°
seno	$\frac{0}{R} = 0$	$\frac{R}{R} = 1$	$\frac{0}{R} = 0$
coseno	$\frac{R}{R} = 1$	$\frac{0}{R} = 0$	$\frac{-R}{R} = -1$
tangente	$\frac{0}{R} = 0$	$\frac{R}{0} = \infty$	$\frac{0}{R} = 0$

(7.8)

7.4.3.2 Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Consideremos un triángulo equilátero de lado l (fig 4.10), trazamos la altura correspondiente a la base, qua a su vez es mediana, aplicando el teorema de Pitágoras, al triángulo rectángulo formado:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

por lo tanto: $h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ Se construye una circunferencia de radio $R = l$ y trasladamos el triángulo

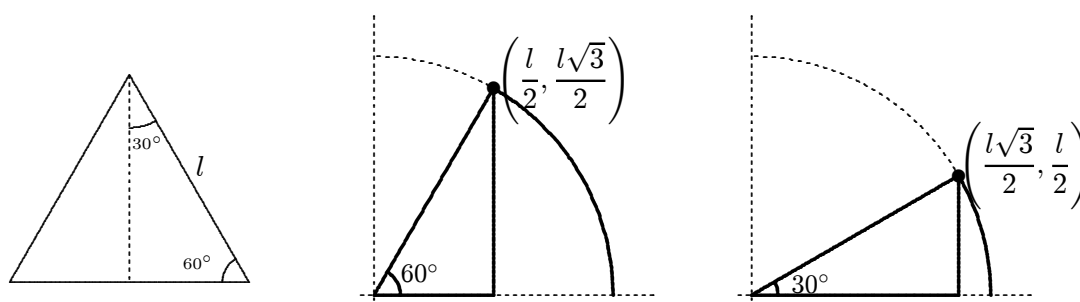


Figura 7.10: Razones trigonométricas de 30° y 60°

rectángulo, tal como indica la figura.

Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{R} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{R} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{R} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

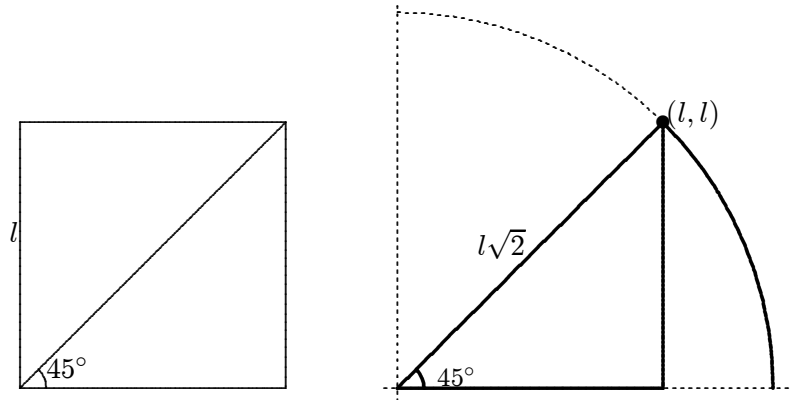
$$\cos 60^\circ = \frac{x}{R} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

Consideremos un cuadrado de lado l (fig 4.11), En el cuadrado de lado l trazamos una diagonal, se forman dos triángulos rectángulos isósceles, aplicando el teorema de Pitágoras, para hallar la diagonal:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

Figura 7.11: Razones trigonométricas de 45°

Trasladamos el triángulo rectángulo a una circunferencia de radio la diagonal $l\sqrt{2}$. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{y}{R} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{x}{R} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^\circ &= \frac{y}{x} = \frac{l}{l} = 1\end{aligned}\tag{7.9}$$

7.4.3.3 Razones trigonométricas de 120° , 135° y 150°

Efectuando una reducción del segundo cuadrante al primero:

$$\begin{aligned}\text{Del ángulo de } 120^\circ \text{ su suplementario es } 60^\circ &\Rightarrow \begin{cases} \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \text{Del ángulo de } 135^\circ \text{ su suplementario es } 45^\circ &\Rightarrow \begin{cases} \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1 \end{cases} \\ \text{Del ángulo de } 150^\circ \text{ su suplementario es } 30^\circ &\Rightarrow \begin{cases} \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

7.5 Reducción al primer cuadrante

7.5.1 Ángulos del tercer cuadrante

Los triángulos formados son rectángulos e iguales, por tener los ángulos agudos iguales y la hipotenusa común $R = 1$. Por lo tanto los catetos son iguales, aplicando las definiciones del seno y coseno y las líneas trigonométricas:

$$\sin \beta = -\sin \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \tan \beta = \tan \alpha \tag{7.10}$$

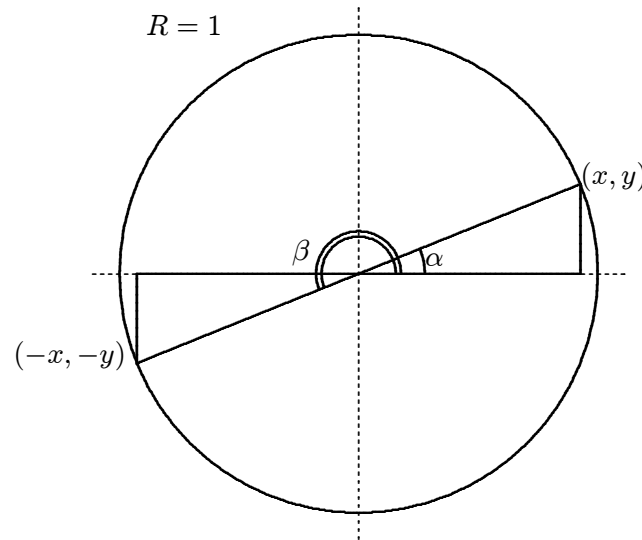


Figura 7.12: Razones trigonométricas de los ángulos del tercer cuadrante: $\alpha = \beta - \pi$

Si el extremo del ángulo α tiene de coordenadas (x, y) entonces el de β tiene de coordenadas $(-x, -y)$.

Las razones trigonométricas de los ángulos de extremos situados en el tercer cuadrante, son las razones trigonométricas del $(\alpha - 180^\circ)$ con los signos del tercer cuadrante

7.5.2 Ángulos del cuarto cuadrante. Ángulos opuestos

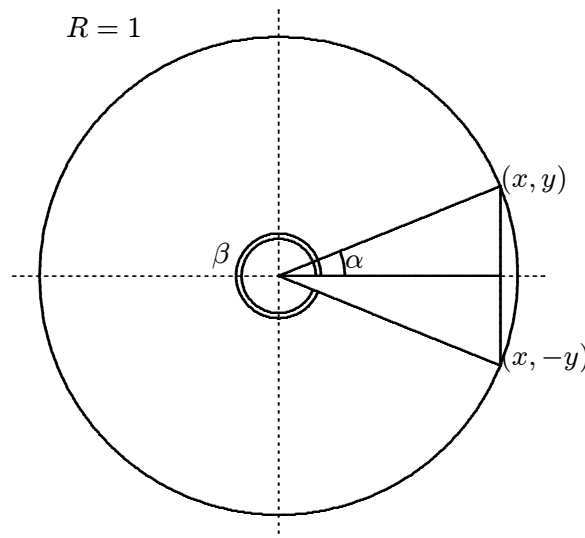


Figura 7.13: Razones trigonométricas de los ángulos del cuarto cuadrante: $\alpha = 2\pi - \beta$

Los triángulos formados son rectángulos e iguales, por tener los ángulos agudos iguales y la hipotenusa común $R = 1$. Por lo tanto los catetos son iguales, aplicando las definiciones del seno y coseno y las líneas trigonométricas:

$$\sin \beta = -\sin \alpha \quad \cos \beta = \cos \alpha \quad \tan \beta = -\tan \alpha \quad (7.11)$$

Si el extremo del ángulo α tiene de coordenadas (x, y) entonces el de β tiene de coordenadas $(x, -y)$.

El ángulo β es el opuesto del ángulo α , por lo tanto:

$$\sin \beta = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos \beta = \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \tan \beta = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \quad (7.12)$$

Las razones trigonométricas de los ángulos de extremos situados en el cuarto cuadrante, son las razones trigonométricas del $(360^\circ - \alpha)$ con los signos del cuarto cuadrante.

7.5.3 Ángulos mayores que una circunferencia

Un ángulo mayor que una circunferencia su extremo estará situado en uno de los cuadrantes y por lo tanto las razones trigonométricas del ángulo vendrán dadas por la ordenada y la abscisa del extremo del arco.

La forma práctica del cálculo de las razones es:

- Reducir al ángulo (β) al correspondiente de la primera circunferencia, para ello basta dividir por 360° y el resto de la división es el ángulo (α) que tiene el mismo extremo del arco.
- Aplicar los apartados anteriores para calcular sus razones trigonométricas.

Ejemplos

1. Calcular las razones trigonométricas de 210° .

El ángulo $\beta = 210^\circ$ pertenece al tercer cuadrante, aplicando (4.10), las razones del ángulo β son las del ángulo $\alpha = \beta - 180^\circ = 30^\circ$ con el signo del tercer cuadrante:

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \quad \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 210^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Calcular las razones trigonométricas de 225° . El ángulo $\beta = 225^\circ$ pertenece al cuarto cuadrante, aplicando (4.11), las razones del ángulo β son las del ángulo $\alpha = 360^\circ - \beta = 45^\circ$ con el signo del cuarto cuadrante:

$$\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 225^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 225^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

3. Calcular las razones trigonométricas de -240° . Es un ángulo negativo, aplicando ángulos opuestos (4.12), las razones trigonométricas:

$$\sin(-240^\circ) = -\sin 240^\circ, \quad \cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ, \quad \tan(-240^\circ) = -\tan 240^\circ$$

El ángulo $\beta = 240^\circ$ pertenece al tercer cuadrante, aplicando (4.10), las razones del ángulo β son las del ángulo $\alpha = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ con el signo del tercer cuadrante:

$$\sin(-240^\circ) = -\sin 240^\circ = -(-\sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-240^\circ) = -\tan 240^\circ = -(+\tan 60^\circ) = -\sqrt{3}$$

4. Calcular las razones trigonométricas de 5640°

Las razones de 5640° son las mismas que las del ángulo 240° , aplicando (4.10):

5640°	360°	$\sin 5640^\circ = \sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2040	15 vueltas	
240°		

$$\cos 5640^\circ = \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\tan 5640^\circ = \tan 240^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$