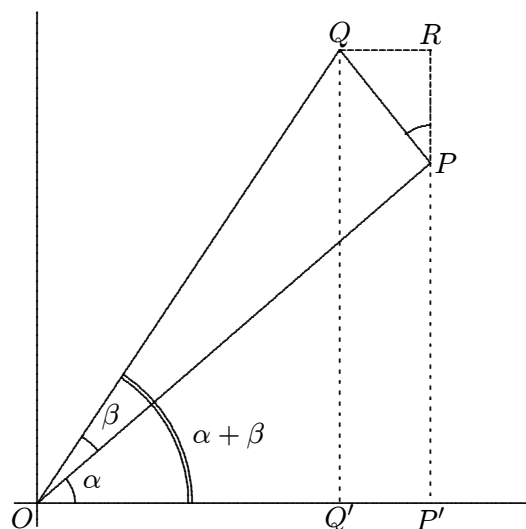


9.1 Fórmulas de adición y sustracción

9.1.1 Coseno de la suma de dos ángulos

Consideremos dos ángulos α y β , y los representamos en los ejes de coordenadas cartesianas con la condición que $\overline{OQ} = 1$. Los triángulos de vértices: OPQ , $OQ'Q$ y PRQ son **rectángulos** por construcción. Entonces:



$$\text{En } OPQ : \begin{cases} \overline{OP} = \cos \beta \\ \overline{PQ} = \sin \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{En } OQ'Q : \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \overline{OQ'} = \overline{OP'} - \overline{Q'P'} = \overline{OP'} - \overline{QR} (*)}$$

En PRQ , el ángulo correspondiente al vértice P es α .
¿Por qué?

$$\sin \alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \boxed{\overline{QR}} = \sin \alpha \cdot \overline{PQ} \stackrel{(1)}{=} \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2)$$

En $OP'P$:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \Rightarrow \boxed{\overline{OP'}} = \cos \alpha \cdot \overline{OP} \stackrel{(1)}{=} \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad (3)$$

Sustituyendo en (*): (2) y (3):

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \quad (9.1)$$

El coseno de la suma de dos ángulos es igual a la DIFERENCIA entre el producto de sus cosenos y de sus senos.

Ejemplo: Calcular el $\cos 75^\circ$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

9.1.2 Coseno de la diferencia de dos ángulos

Para deducir el $\cos(\alpha - \beta)$ aplicamos las propiedades trigonométricas del coseno:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) \stackrel{(9.1)}{=} \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) \stackrel{(1)}{=} \cos \alpha \cdot \cos \beta \boxed{+} \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

(1) La función coseno es PAR: $\cos(-\beta) = \cos \beta$ y la función seno es IMPAR: $\sin(-\beta) = -\sin \beta$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta} \quad (9.2)$$

El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual a la **SUMA** entre el producto de sus cosenos y de sus senos.

Ejemplo: Calcular el $\cos 15^\circ$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

9.1.3 Seno de la suma de dos ángulos

Para deducir la fórmula del seno de la suma de dos ángulos aplicamos que, el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \stackrel{(9.2)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin \beta = \\ &\stackrel{(1)}{=} \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

(1) Por razones de ángulos complementarios.

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \quad (9.3)$$

El seno de la suma de dos ángulos es igual a la **SUMA** del seno de uno por el coseno del otro y el coseno del primero por el seno del segundo

9.1.4 Seno de la diferencia de dos ángulos

Para deducir el $\sin(\alpha - \beta)$ aplicamos las propiedades trigonométricas del coseno:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) \stackrel{(9.3)}{=} \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta) \stackrel{(1)}{=} \sin \alpha \cdot \cos \beta \boxed{-} \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

(1) La función coseno es PAR: $\cos(-\beta) = \cos \beta$ y la función seno es IMPAR: $\sin(-\beta) = -\sin \beta$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta} \quad (9.4)$$

El seno de la diferencia de dos ángulos es igual a la **DIFERENCIA** del seno de uno por el coseno del otro y el coseno del primero por el seno del segundo

9.1.5 Tangente de la suma de dos ángulos

La tangente de la suma de dos ángulos se deduce de la relación entre la tangente, el seno y el coseno.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \stackrel{(9.3)}{=} \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}\end{aligned}$$

(1) Si $\cos \alpha \neq 0$ y $\cos \beta \neq 0$, se divide numerador y denominador por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$

(2) Simplificando y relación entre las razones trigonométricas.

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}} \quad (9.5)$$

9.1.6 Tangente de la diferencia de dos ángulos

La tangente de la diferencia de dos ángulos se deduce de la relación entre la tangente, el seno y el coseno.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \stackrel{(9.4)}{=} \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}} \quad (9.6)$$

Ejemplo: Calcular $\tan 105^\circ$

$$\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) \stackrel{(9.5)}{=} \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{-2} = -(2 + \sqrt{3})$$

Resumen:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}\end{aligned}$$

9.2 Fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad

9.2.1 Seno del ángulo doble

Consideremos en la fórmula (9.3) que los ángulos α y β sean iguales:

$$\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a} \quad (9.7)$$

En general se puede leer así:

El seno de un ángulo es igual al doble del seno del ángulo mitad POR el coseno del ángulo mitad

Ejemplos:

1. Calcular $\sin 60^\circ$

$$\sin 60^\circ = \sin 2 \cdot 30^\circ = 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Desarrollar en producto de seno y coseno

$$(a) \sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$(b) \sin 3x = \sin 2 \cdot \frac{3x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

9.2.2 Coseno del ángulo doble

Consideremos en la fórmula (9.1) que los ángulos α y β sean iguales:

$$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \stackrel{(1)}{=} 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

(1) Relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \quad (9.8)$$

En general:

El coseno de un ángulo es igual a la DIFERENCIA de los cuadrados del coseno y seno del ángulo mitad.

9.2.3 Tangente del ángulo doble

Consideremos la fórmula (9.5):

$$\tan 2a = \tan(a + a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a} = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\boxed{\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}} \quad (9.9)$$

9.2.4 Seno y coseno del ángulo mitad

Aplicando la fórmula 9.8:

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a \Rightarrow \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2} \Rightarrow \sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a \Rightarrow \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2} \Rightarrow \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\boxed{\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}} \quad (9.10)$$

$$\boxed{\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}} \quad (9.11)$$

En general:

El seno cuadrado de un ángulo es igual a la unidad MENOS el coseno del ángulo doble dividido entre dos

El coseno cuadrado de un ángulo es igual a la unidad MÁS el coseno del ángulo doble dividido entre dos

9.2.5 Tangente del ángulo mitad

Aplicando las fórmulas: 9.10 y 9.11:

$$\boxed{\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}} \quad (9.12)$$

Ejemplos:

(1) Si el $\sin a = -\frac{3}{5}$ y $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, hallar:

(a) $\sin 2a$ y $\cos 2a$. ¿En qué cuadrante se encuentra el extremo de $2a$?

Por la relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cos a = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2a \stackrel{(9.7)}{=} 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2a \stackrel{(9.8)}{=} \cos^2 a - \sin^2 a = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

Al ser $\sin 2a > 0$ y $\cos 2a > 0$ implica que $2a$ pertenece al primer cuadrante.

(1) El ángulo a pertenece al tercer cuadrante, por lo tanto el $\cos a$ es NEGATIVO.

(b) Hallar $\cos \frac{a}{2}$.

Aplicando la fórmula del ángulo mitad (9.11):

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{5-4}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

El enunciado del ejercicio nos dice: $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, dividiendo por 2:
 $\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \frac{3\pi}{4} \implies \frac{a}{2} \in$ segundo cuadrante. El coseno es NEGATIVO:

$$\cos \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

(2) Calcular $\tan 15^\circ$.

$$\tan 15^\circ = \tan \frac{30^\circ}{2} \stackrel{(1)}{=} \boxed{+} \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = + \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} \stackrel{(2)}{=} + \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = 2 - \sqrt{3}$$

- (1) El ángulo 15° pertenece al primer cuadrante, por lo tanto, $\tan 15^\circ$ positiva.
 (2) Racionalizando la fracción.

9.3 Fórmulas para transformar sumas(diferencias) en productos

9.3.1 Suma(diferencia) de senos

Consideremos las igualdades (9.3) y (9.4). Sumando y restando:

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \\ \hline \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cdot \cos b \end{aligned} \tag{9.13}$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \cdot \sin b$$

Definimos las nuevas variables:

$$\begin{cases} a+b=A \\ a-b=B \end{cases} \text{ resolviendo el sistema } \begin{cases} a = \frac{A+B}{2} \\ b = \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo en (9.13):

$$\boxed{\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}} \tag{9.14}$$

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}}$$

9.3.2 Suma(diferencia) de cosenos

Consideremos las igualdades (9.1) y (9.2). Sumando y restando:

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b \end{array} \quad (9.15)$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = \boxed{-} 2 \sin a \cdot \sin b$$

Definimos las nuevas variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b=A \\ a-b=B \end{array} \right. \text{ resolviendo el sistema } \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{A+B}{2} \\ b = \frac{A-B}{2} \end{array} \right.$$

Sustituyendo en (9.15):

$$\boxed{\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}$$

$$\boxed{\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}}$$
(9.16)

Ejemplos:

(a) *Calcular:* $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$. Aplicando (9.14):

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \cdot \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(b) *Expresar como producto:* $\cos 4t - \cos 2t$. Aplicando (9.16):

$$\cos 4t - \cos 2t = -2 \cdot \sin \frac{4t + 2t}{2} \cdot \sin \frac{4t - 2t}{2} = -2 \sin 3t \cdot \sin t$$

(c) *Demostrar:* $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x+y}{2}$ Aplicando (9.14) y (9.16):

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \tan \frac{x+y}{2}$$

9.4 Ecuaciones trigonométricas

Definición 9.1 (Ecuación trigonométrica). Una ecuación es trigonométrica si la incógnita se encuentra en el argumento de las funciones trigonométricas.

Definición 9.2 (Solución de la ecuación). Un valor real a es solución de la ecuación si al sustituir la incógnita por a , la ecuación se convierte en una identidad.

Número de soluciones

Las funciones trigonométricas son periódicas, por lo tanto el número de soluciones de una ecuación trigonométrica es infinito o no tiene. Si el dominio de solución está acotado, el número de soluciones es finito.

Ecuaciones trigonométricas elementales

Ecuaciones de la forma: $\sin x = a$ y $\cos x = a$

- Si $|a| > 1$ entonces la ecuación NO TIENE SOLUCIÓN. ¿Por qué?
- Si $|a| \leq 1$. Para despejar la incógnita se emplea las funciones inversas arcoseno y arcocoseno y la periodicidad de las funciones $T = 2\pi$ y los signos de las funciones según los cuadrantes:

$$\sin x = a \implies \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \implies \begin{cases} \text{Primer cuadrante} & x = \arcsin a + 2k\pi \\ \text{Segundo cuadrante} & x = (\pi - \arcsin a) + 2k\pi \end{cases} \\ -1 \leq a \leq 0 \implies \begin{cases} \text{Tercer cuadrante} & x = (\pi + \arcsin |a|) + 2k\pi \\ \text{Cuarto cuadrante} & x = (2\pi - \arcsin |a|) + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \implies \begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \implies \begin{cases} \text{Primer cuadrante} & x = \arccos a + 2k\pi \\ \text{Cuarto cuadrante} & x = (2\pi - \arccos a) + 2k\pi \end{cases} \\ -1 \leq a \leq 0 \implies \begin{cases} \text{Segundo cuadrante} & x = (\pi - \arccos |a|) + 2k\pi \\ \text{Tercer cuadrante} & x = (\pi + \arccos |a|) + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ecuaciones de la forma: $\tan x = a$ Estas ecuaciones tienen solución para cualquier valor de a . ¿Por qué? El periodo principal de la función tangente es $T = \pi$

$$\tan x = a \implies \begin{cases} a \geq 0 \implies \text{Primer cuadrante} & x = \arctan a + k\pi \\ a < 0 \implies \text{Segundo cuadrante} & x = (\pi - \arctan |a|) + k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos: Resolver las ecuaciones trigonométricas

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{cases} \text{Primer cuadrante} & x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{Segundo cuadrante} & x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Sol. 1er cuadrante} \implies x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \text{Segundo cuadrante} & x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{Tercer cuadrante} & x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$(c) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{Sol. 1er cuadrante} \implies x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Segundo cuadrante } x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$(d) \sec x = \frac{2}{5}$$

$$\sec x = \frac{2}{5} \implies \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{5} \implies \cos x = \frac{5}{2} > 1$$

No tiene solución

$$(e) \csc x = -2$$

$$\csc x = -2 \implies \frac{1}{\sin x} = -2 \implies \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{Sol. 1er cuadrante} \implies x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \text{Tercer cuadrante} & x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{Cuarto cuadrante} & x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ecuaciones trigonométricas en general Resolver ecuaciones trigonométricas consiste en aplicar todos los conocimientos de la trigonometría para llegar a ecuaciones trigonométricas elementales.

Sugerencias

- Emplear las identidades y fórmulas trigonométricas estudiadas.
- Factorizar la ecuación.
- Cambios de variable del tipo $\sin x = t$, $\cos x = t$, etc. Para transformar la ecuación en una algebraica. Resolverla y deshacer el cambio para hallar, si existen, las soluciones de la ecuación trigonométrica.

Ejemplos: Resolver las ecuaciones en el conjunto de los reales.

(a) $\sin 2x = \sin x$. Por la identidad del ángulo doble (9.7):

$$\sin 2x = \sin x \implies 2 \sin x \cos x = \sin x \implies 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \implies \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

Si el producto de dos números reales es cero, al menos, uno de los factores es cero

$$\begin{cases} \sin x = 0 \implies x = \arcsin 0 \implies x = \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \iff x = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \arccos \frac{1}{2} \implies x = \begin{cases} \text{Primer cuadrante: } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{Cuarto cuadrante: } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(b) $1 + \sin^2 2x = \cos 2x$. Transformamos la ecuación en función del coseno con la relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha$

$$1 + \sin^2 2x = \cos 2x \implies 1 + 1 - \cos^2 2x = \cos 2x \implies \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \cos 2x = 1 \implies 2x = \arccos 1 \implies 2x = 0 + 2k\pi \implies x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = -2 \text{ No hay solución } \cos 2x \notin [-1, 1] \ni \end{cases}$$

(c) Resolver en el intervalo $[0, 2\pi)$ la ecuación: $\sin 3x + \sin 5x = -\sqrt{3} \cdot \sin 4x$

Mediante la identidad (9.14) que permite transformar sumas en productos. Resolviendo en todo los reales.

$$2 \sin \frac{3x+5x}{2} \cdot \cos \frac{3x-5x}{2} = -\sqrt{3} \cdot \sin 4x \xrightarrow{(1)} 2 \sin 4x \cdot \cos x = -\sqrt{3} \cdot \sin 4x \xrightarrow{(2)} \sin 4x \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 4x = 0 \implies 4x = k\pi \implies x = \frac{k\pi}{4}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \arccos \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{(3)} \begin{cases} x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones en la primera circunferencia: $x \in [0, 2\pi)$:

$$x = \frac{k\pi}{4} \implies \begin{cases} k=0 \implies x=0 & k=1 \implies x=\frac{\pi}{4} \\ k=2 \implies x=\frac{\pi}{2} & k=3 \implies x=\frac{3\pi}{4} \\ k=4 \implies x=\pi & k=5 \implies x=\frac{5\pi}{4} \\ k=6 \implies x=\frac{3\pi}{2} & k=7 \implies x=\frac{7\pi}{4} \\ x=\frac{5\pi}{6} & \text{y} & x=\frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

(1) El coseno es una función par: $\cos(-x) = \cos x$

(2) Sacando factor común $\sin 4x$.

(3) Soluciones en los cuadrantes segundo y tercero por ser el coseno negativo.

(d) Un generador de corriente alterna produce corriente que viene expresada por: $I = 30 \cdot \sin 120\pi t$, donde t tiempo en segundos e, I en amperios. Hallar el MENOR valor positivo de t , con cuatro decimales, tal que $I = 25$ amperios

La solución es resolver la ecuación trigonométrica $30 \cdot \sin 120\pi t = 25$, despejando:

$$\sin 120\pi t = \frac{5}{6} \implies 120\pi t = \arcsin \frac{5}{6} \implies t = \frac{1}{120\pi} \arcsin \frac{5}{6}$$

Trabajando en RADIANTES con la calculadora:

$$t = \frac{1}{120\pi} \cdot 0.98511 = 0.0026 \text{ segundos}$$

Gráficamente:

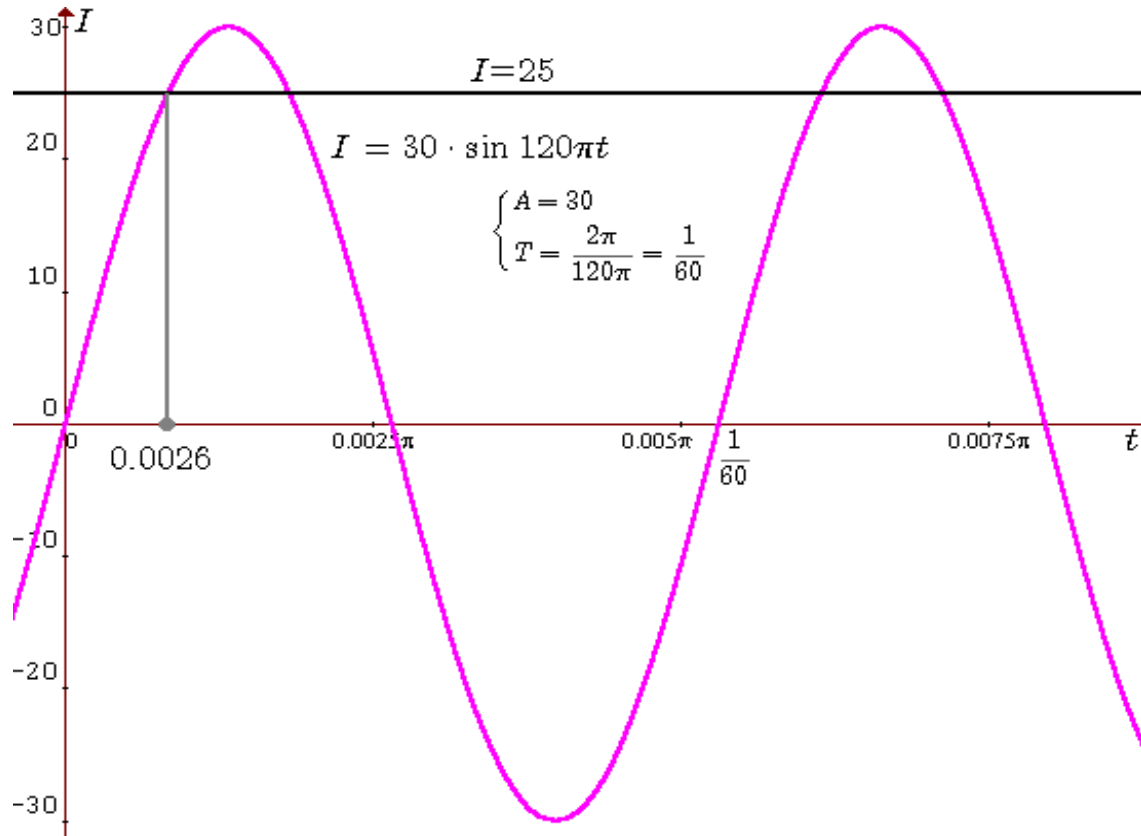


Figura 9.1: $I(t) = 30 \cdot \sin 120\pi t$ e $I = 25$