

Definición 8.1 (Función seno). *Se llama función seno a la función real de variable real que asocia a cada número real x , el seno trigonométrico del ángulo de x radianes.*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

Propiedades de la función seno

Dominio máximo: Por la definición de seno: *razón entre la ordenada y el radio*, se puede calcular la imagen de cualquier número real. Entonces $D_{\sin} = \mathbb{R}$.

Recorrido: Por las propiedades estudiadas: $-1 \leq \sin x \leq 1$. $Im = [-1, 1]$. La función seno está acotada.

Paridad $\sin(-x) = -\sin x$ La función es IMPAR. Su gráfica simétrica respecto el origen de coordenadas.

Periodicidad La función es periódica: $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ de periodo principal $T = 2\pi$.

Gráfica de la función seno

Consideremos una circunferencia de radio unidad ($R = 1$). Aplicando la definición:

$$\sin x = \text{ordenada del extremo del arco que mide } x \text{ radianes}$$

Asociando la ordenada de los extremos del arco, la gráfica $\forall x \in [0, 2\pi)$ es:

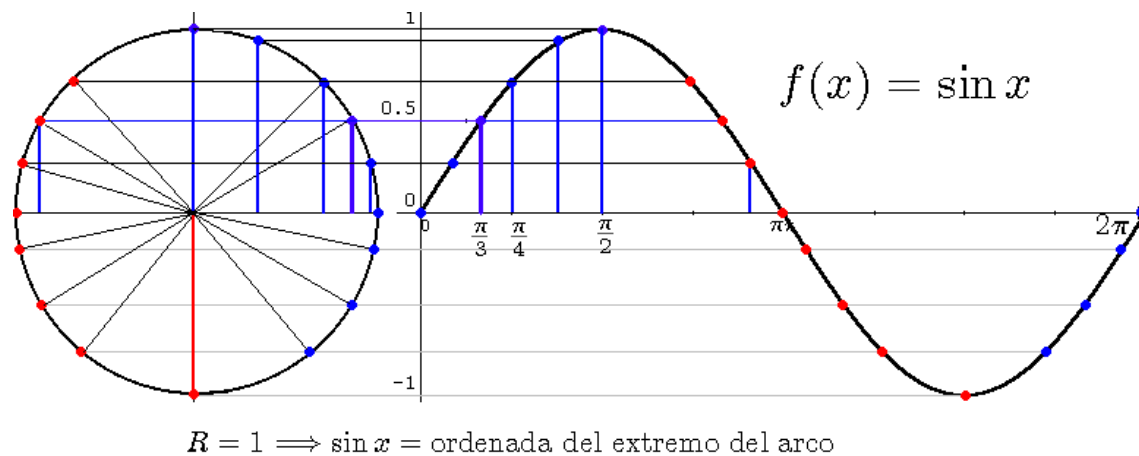


Figura 8.1: Función $f(x) = \sin x \forall x \in [0, 2\pi)$

Las tablas de valores por cuadrantes:

Primer cuadrante	
0	0
0.1	0.0998
0.2	0.1987
0.3	0.2955
0.4	0.3894
0.5	0.4794
0.6	0.5646
0.7	0.6442
0.8	0.7174
0.9	0.7833
1.0	0.8415
1.1	0.8912
1.2	0.932
1.3	0.9636
1.4	0.9854
1.5	0.9975
$\frac{\pi}{2}$	1

Segundo cuadrante	
1.6	0.9996
1.7	0.9917
1.8	0.9738
1.9	0.9463
2.0	0.9093
2.1	0.8632
2.2	0.8085
2.3	0.7457
2.4	0.6755
2.5	0.5985
2.6	0.5155
2.7	0.4274
2.8	0.335
2.9	0.2392
3.0	0.1411
3.1	0.0416
π	0

Tercer cuadrante	
3.2	-0.0584
3.3	-0.1577
3.4	-0.2555
3.5	-0.3508
3.6	-0.4425
3.7	-0.5298
3.8	-0.6119
3.9	-0.6878
4.0	-0.7568
4.1	-0.8183
4.2	-0.8716
4.3	-0.9162
4.4	-0.9516
4.5	-0.9775
4.6	-0.9937
4.7	-0.9999
$\frac{3\pi}{2}$	-1

Cuarto cuadrante	
4.8	-0.9962
4.9	-0.9825
5.0	-0.9589
5.1	-0.9258
5.2	-0.8835
5.3	-0.8323
5.4	-0.7728
5.5	-0.7055
5.6	-0.6313
5.7	-0.5507
5.8	-0.4646
5.9	-0.3739
6.0	-0.2794
6.1	-0.1822
6.2	-0.0831
6.25	-0.0331
2π	0

Aplicando las propiedades de la función seno:

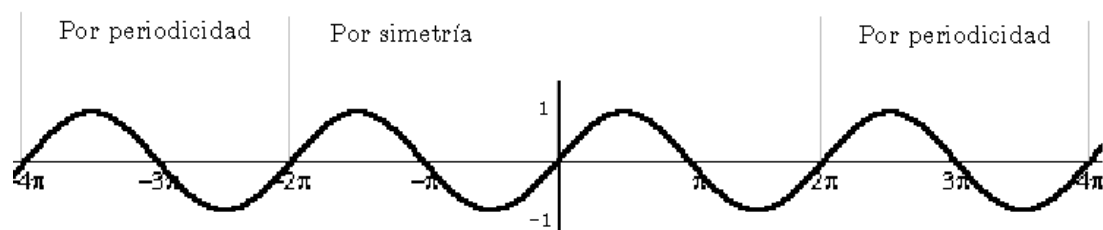


Figura 8.2: La función seno en general

Definición 8.2 (Función coseno). Se llama función coseno a la función real de variable real que asocia

a cada número real x , el coseno trigonométrico del ángulo de x radianes.

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \cos x \end{array}$$

Propiedades de la función coseno

Dominio máximo: Por la definición de coseno: *razón entre la abscisa y el radio*, se puede calcular la imagen de cualquier número real. Entonces $D_{\cos} = \mathbb{R}$.

Recorrido: Por las propiedades estudiadas: $-1 \leq \cos x \leq 1$. $Im = [-1, 1]$. La función coseno está acotada.

Paridad $\cos(-x) = \cos x$ La función es PAR. Su gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas.

Periodicidad La función es periódica: $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ de periodo principal $T = 2\pi$.

Gráfica de la función coseno

Traslación de la función seno

El coseno es el complementario del seno, es decir: $f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$:

- La gráfica del seno se traslada a la derecha $\frac{\pi}{2}$ unidades.

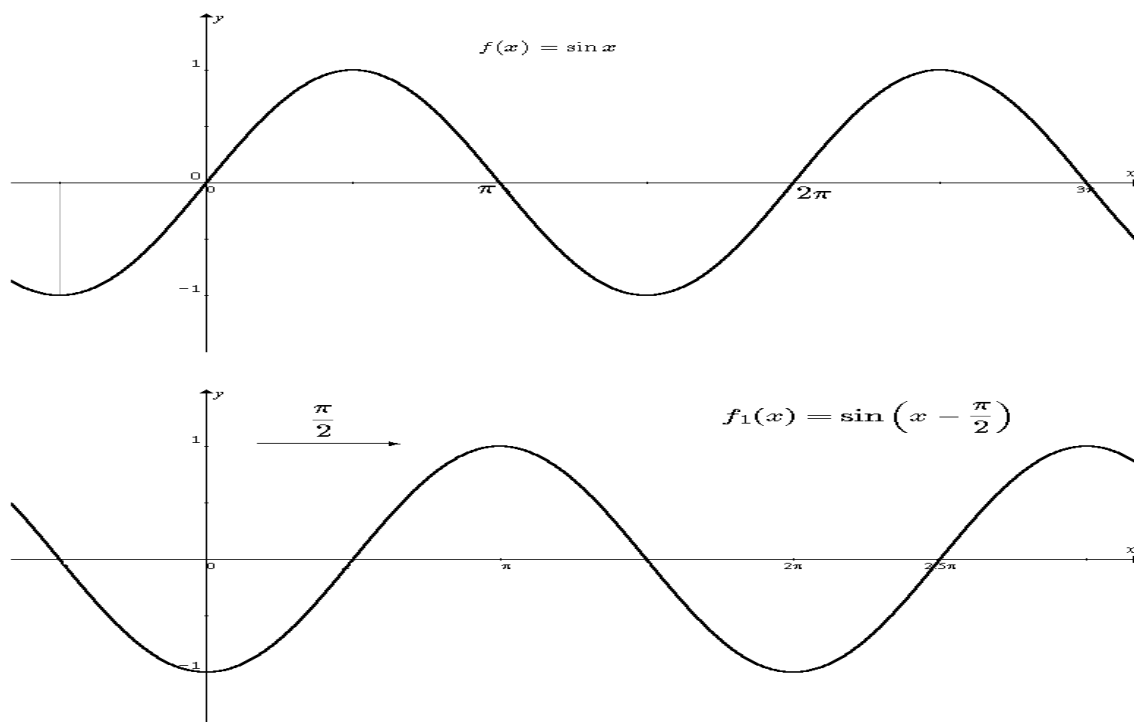


Figura 8.3: Función $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

- El signo MENOS nos indica la OPUESTA.

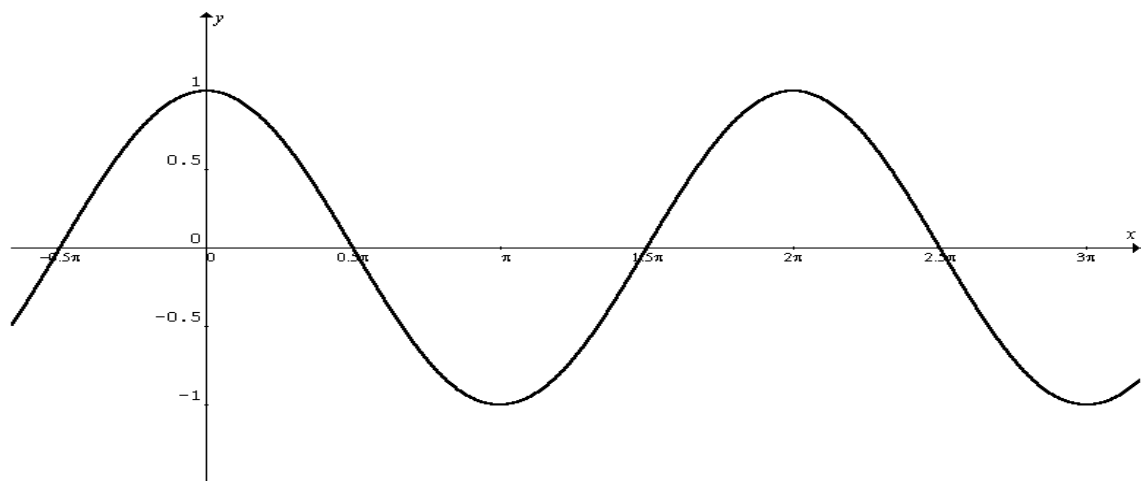


Figura 8.4: Función $f_2(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Tabla de valores

Las tablas de valores por cuadrantes:

Primer cuadrante		Segundo cuadrante		Tercer cuadrante		Cuarto cuadrante	
0	1.0	1.6	-0.0292	3.2	-0.99829	4.8	0.0875
0.1	0.995	1.7	-0.12884	3.3	-0.98748	4.9	0.18651
0.2	0.98007	1.8	-0.2272	3.4	-0.9668	5.0	0.28366
0.3	0.95534	1.9	-0.32329	3.5	-0.93646	5.1	0.37798
0.4	0.92106	2.0	-0.41615	3.6	-0.89676	5.2	0.46852
0.5	0.87758	2.1	-0.50485	3.7	-0.8481	5.3	0.55437
0.6	0.82534	2.2	-0.5885	3.8	-0.79097	5.4	0.63469
0.7	0.76484	2.3	-0.66628	3.9	-0.72593	5.5	0.70867
0.8	0.69671	2.4	-0.73739	4.0	-0.65364	5.6	0.77557
0.9	0.62161	2.5	-0.80114	4.1	-0.57482	5.7	0.83471
1.0	0.5403	2.6	-0.85689	4.2	-0.49026	5.8	0.88552
1.1	0.4536	2.7	-0.90407	4.3	-0.4008	5.9	0.92748
1.2	0.36236	2.8	-0.94222	4.4	-0.30733	6.0	0.96017
1.3	0.2675	2.9	-0.97096	4.5	-0.2108	6.1	0.98327
1.4	0.16997	3.0	-0.98999	4.6	-0.11215	6.2	0.99654
1.5	0.07074	3.1	-0.99914	4.7	-0.01239	6.25	0.99944
$\frac{\pi}{2}$	0	π	0	$\frac{3\pi}{2}$	0	2π	1

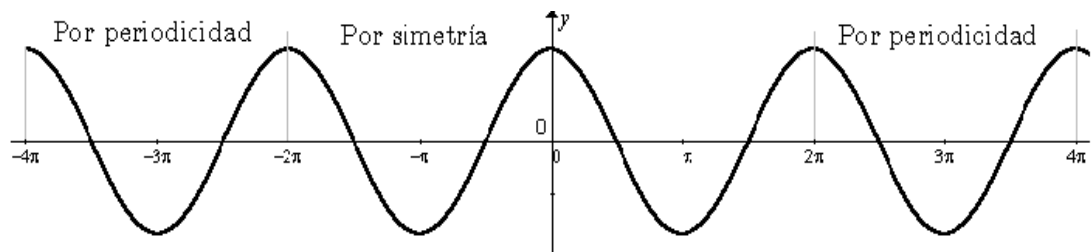


Figura 8.5: La función coseno en general

Definición 8.3 (Función tangente). Se llama *función tangente* a la función real de variable real que

asocia a cada número real x , la tangente trigonométrica del ángulo de x radianes.

$$\boxed{\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \tan x \end{array}}$$

Propiedades de la función tangente

Dominio máximo: La tangente es la razón entre el seno y el coseno del ángulo si $\cos x \neq 0$. Por lo tanto:

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \stackrel{(*)}{=} \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(*) Ver la gráfica de la función coseno (8.5)

Asíntota vertical La recta $x = \frac{\pi}{2}$ es asíntota vertical de la función. Efectivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - h)}{\cos(\frac{\pi}{2} - h)} = \frac{1}{+0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + h)}{\cos(\frac{\pi}{2} + h)} = \frac{1}{-0} = -\infty \end{aligned}$$

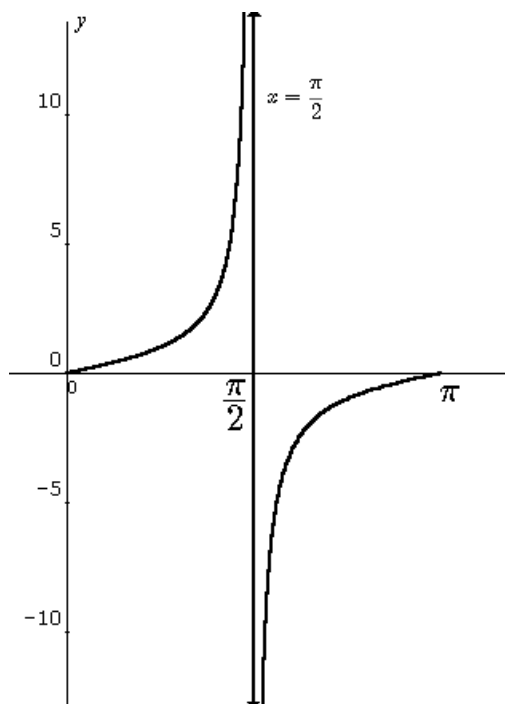
Recorrido: Por las propiedades estudiadas: $Im = \mathbb{R}$. La función NO ESTÁ ACOTADA.

Paridad $\tan(-x) = -\tan x$ La función es IMPAR. Su gráfica simétrica respecto del origen de coordenadas.

Periodicidad La función es periódica: $f(x + k\pi) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ de periodo principal $T = \pi$.

Por la periodicidad: las rectas $x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \forall k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales de la función.

Gráfica de la función tangente



Primer cuadrante		Segundo cuadrante	
0	0	1.575	-237.8857
0.1	0.1003	1.58	-108.6492
0.2	0.2027	1.6	-34.2325
0.3	0.3093	1.7	-7.6966
0.4	0.4228	1.8	-4.2863
0.5	0.5463	1.9	-2.9271
0.6	0.6841	2.0	-2.185
0.7	0.8423	2.1	-1.7098
0.8	1.0296	2.2	-1.3738
0.9	1.2602	2.3	-1.1192
1.0	1.5574	2.4	-0.916
1.1	1.9648	2.5	-0.747
1.2	2.5722	2.6	-0.6016
1.3	3.6021	2.7	-0.4727
1.4	5.7979	2.8	-0.3555
1.5	14.1014	2.9	-0.2464
1.55	48.0784	3.0	-0.1425
1.57	1255.7658	3.1	-0.0416

Por la periodicidad de la función tangente y su simetría impar:

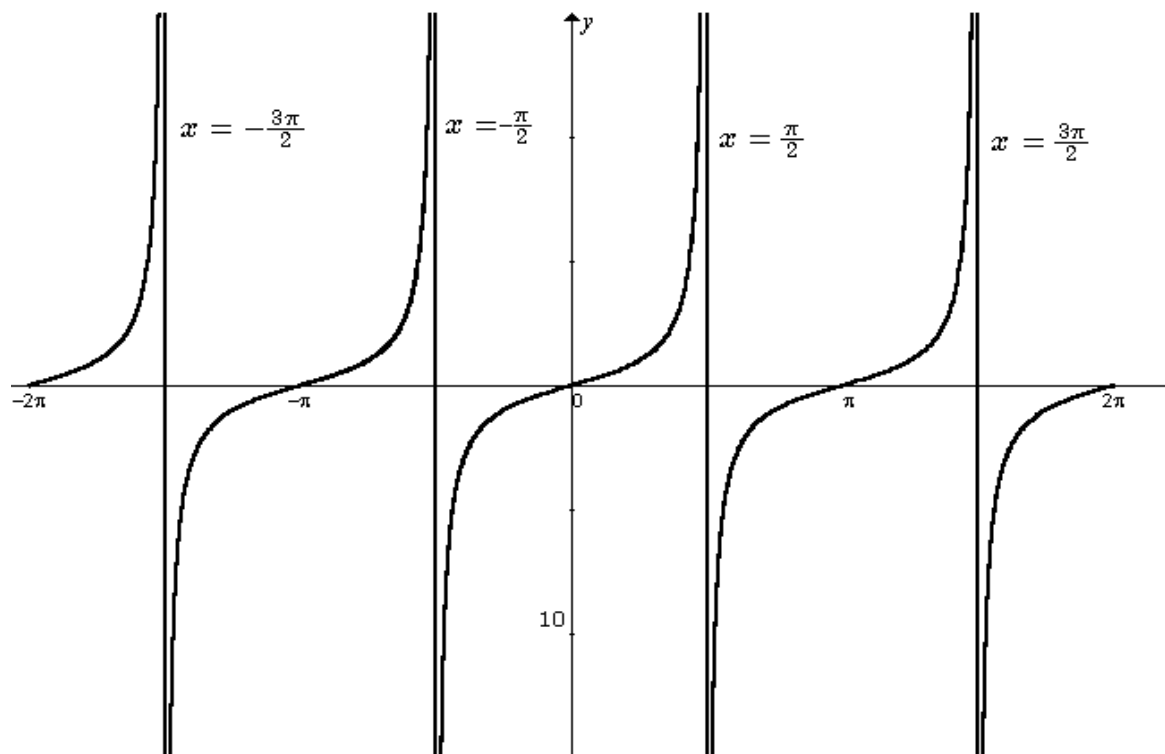


Figura 8.6: Gráfica de la función tangente

Definición 8.4 (Función cosecante). Se llama función cosecante a la función real de variable real que asocia a cada número real x , la secante trigonométrica del ángulo de x radianes.

$$\boxed{\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \csc x \end{array}}$$

Propiedades de la función cosecante

Dominio máximo: La cosecante es la inversa, como producto, del seno: $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

$$D_{\csc} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} \stackrel{(*)}{=} \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2 \cdot \pi, \pm 3 \cdot \pi, \dots\} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

(*) Ver la gráfica de la función seno (8.2)

Asíntotas Las rectas $x = k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales de la función cosecante:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(0 - h)} = \frac{1}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(0 + h)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\pi - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\pi - h)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\pi + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\pi + h)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Recorrido: Por ser $Im_{\sin} = [-1, 1]$ entonces $Im_{\csc} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Paridad La función seno es IMPAR, por lo tanto, la función cosecante también. Su gráfica simétrica respecto el origen de coordenadas.

Periodicidad La periodicidad es la misma de la función seno: $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ de periodo principal $T = 2\pi$.

Gráfica de la función cosecante

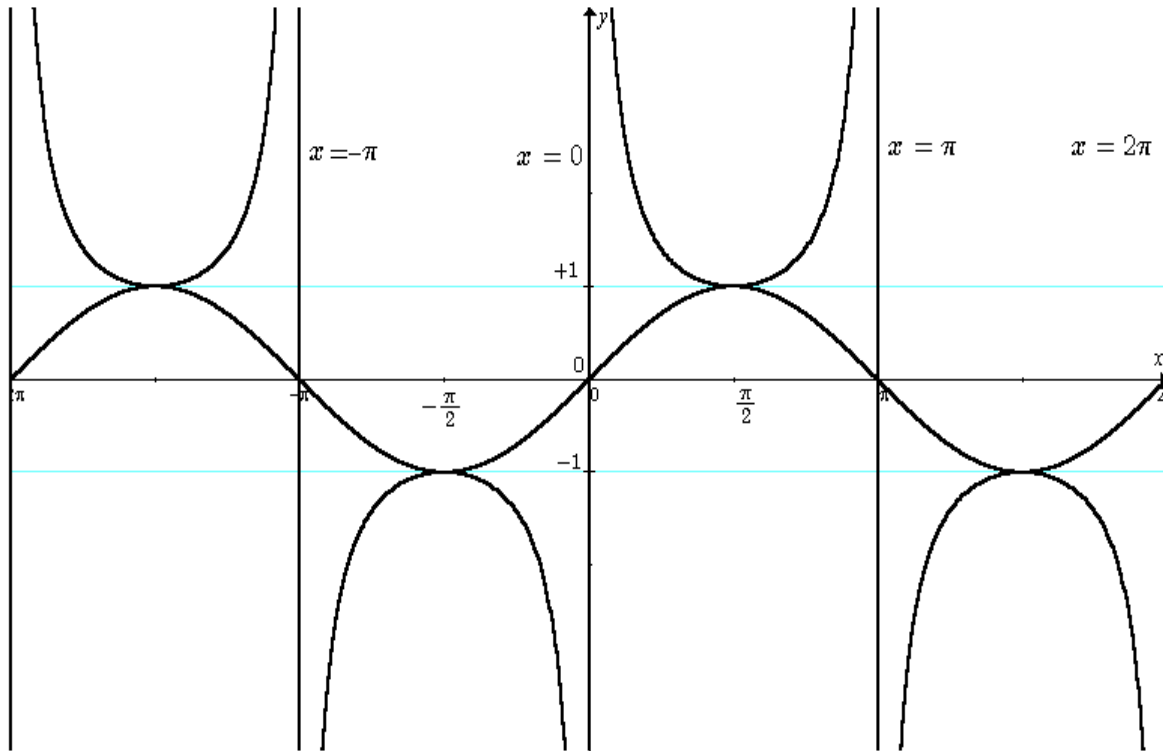


Figura 8.7: Gráfica de la función $f(x) = \csc x$

Definición 8.5 (Función secante). Se llama función secante a la función real de variable real que asocia a cada número real x , la secante trigonométrica del ángulo de x radianes.

$$\boxed{\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \sec x \end{array}}$$

Propiedades de la función secante

Dominio máximo: La secante es la inversa, como producto, del coseno: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

$$D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \stackrel{(*)}{=} \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(*) Ver la gráfica de la función coseno (8.5)

Asíntota vertical Las rectas $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales de la función.

Efectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - h)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} + h)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f\left(\frac{3\pi}{2} - h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2} - h)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f\left(\frac{3\pi}{2} + h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2} + h)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Recorrido: Por ser $Im_{\cos} = [-1, 1]$ entonces $Im_{\sec} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Paridad La función coseno es PAR, por lo tanto, la función secante también. Su gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas.

Periodicidad La periodicidad es la misma de la función coseno: $f(x + 2k\pi) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}$ de periodo principal $T = 2\pi$.

Gráfica de la función secante

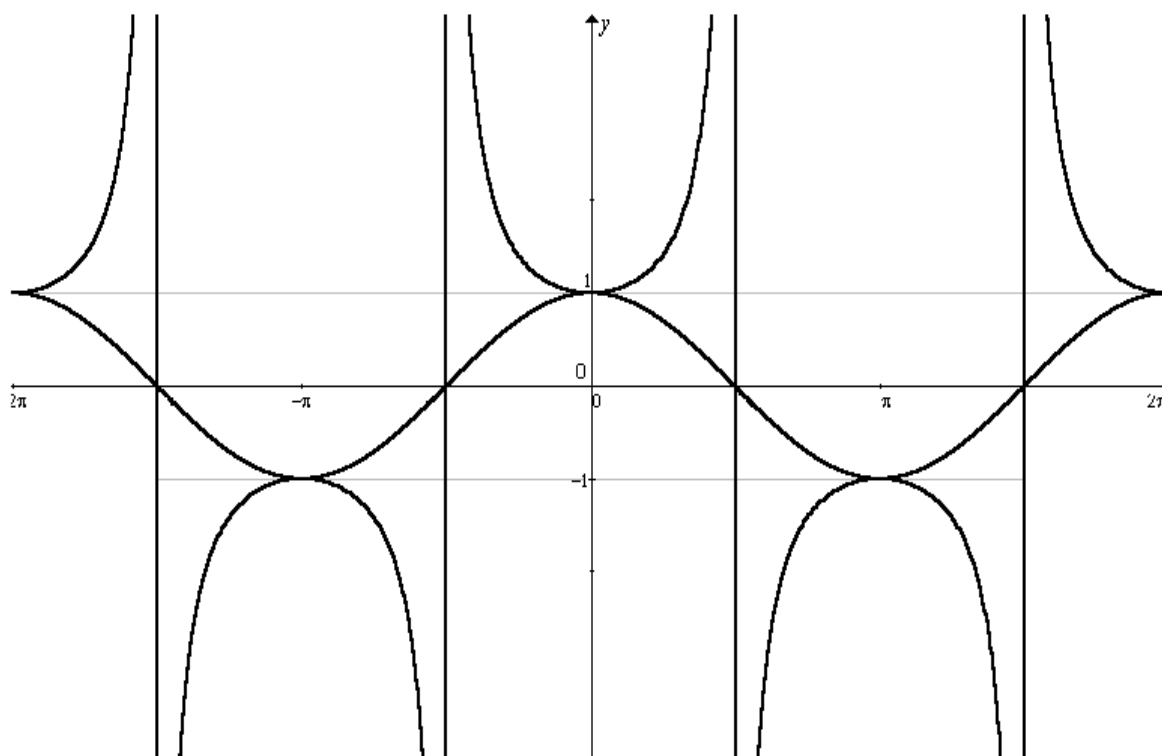


Figura 8.8: Gráfica de la función $f(x) = \csc x$

Definición 8.6 (Función cotangente). Se llama función cotangente a la función real de variable real que asocia a cada número real x , la cotangente trigonométrica del ángulo de x radianes.

$$\boxed{\begin{array}{l} f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \cot x \end{array}}$$

Propiedades de la función cotangente

Dominio máximo: La cotangente es la inversa, como producto, de la tangente: $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2 \cdot \pi, \pm 3 \cdot \pi, \dots\} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Asíntotas Las rectas $x = k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales de la función cotangente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(0 - h)} = \frac{1}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(0 + h)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\pi - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\pi - h)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\pi + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\pi + h)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Recorrido: Por ser $Im_{\tan} = \mathbb{R}$ entonces $Im_{\cot} = \mathbb{R}$

Paridad La función tangente es IMPAR, por lo tanto, la función cotangente también. Su gráfica simétrica respecto el origen de coordenadas.

Periodicidad La periodicidad es la misma de la función tangente: $f(x + k\pi) = f(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ de periodo principal $T = \pi$.

Gráfica de la función cotangente

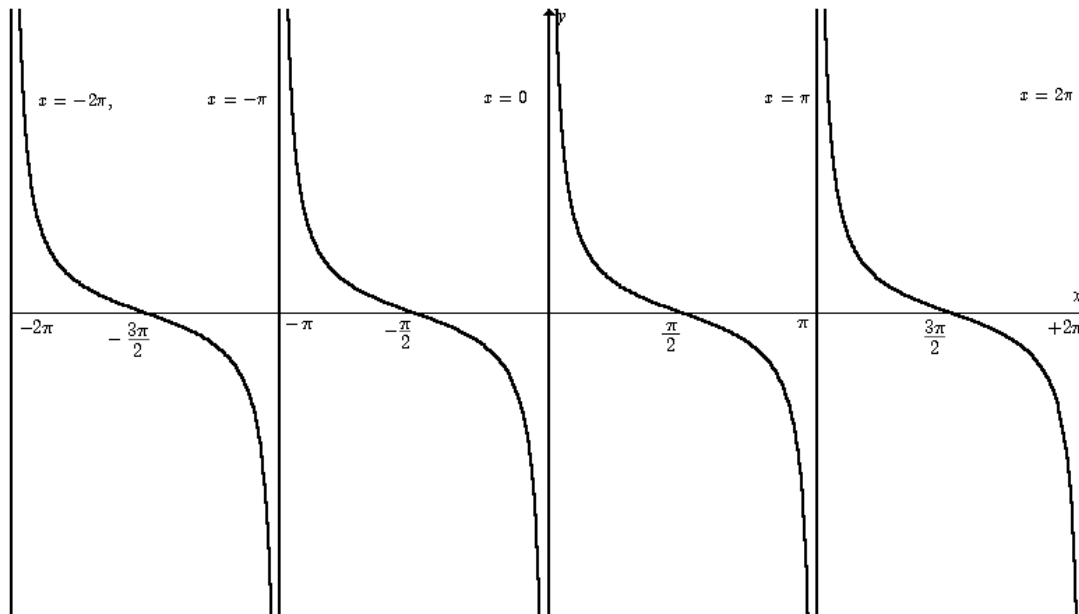


Figura 8.9: Gráfica de la función $f(x) = \cot x$

8.1 Funciones trigonométricas recíprocas (inversas)

Las funciones trigonométricas son periódicas, esto implica que **NO SON INYECTIVAS**. No poseen función recíproca en su dominio máximo.

8.1.1 Función arco seno

Si nos fijamos en la gráfica de la función seno (fig.8.2) en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la función SÍ es inyectiva y su recorrido es $[-1, 1]$, es decir biyectiva.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}} \text{ es biyectiva}$$

Definición 8.7 (Función arco seno). Se llama función arco seno a la función real de variable real que asocia a cada número real x , el arco cuyo seno trigonométrico es x .

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \arcsin : [-1, 1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & f(x) = \arcsin x \end{array}}$$

Por la definición de funciones inversas:
$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = Id \implies \arcsin(\sin x) = x \\ f \circ f^{-1} = Id \implies \sin(\arcsin x) = x \end{cases}$$

Gráfica de la función arco seno

Las gráficas de las funciones recíprocas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (la recta $y=x$):

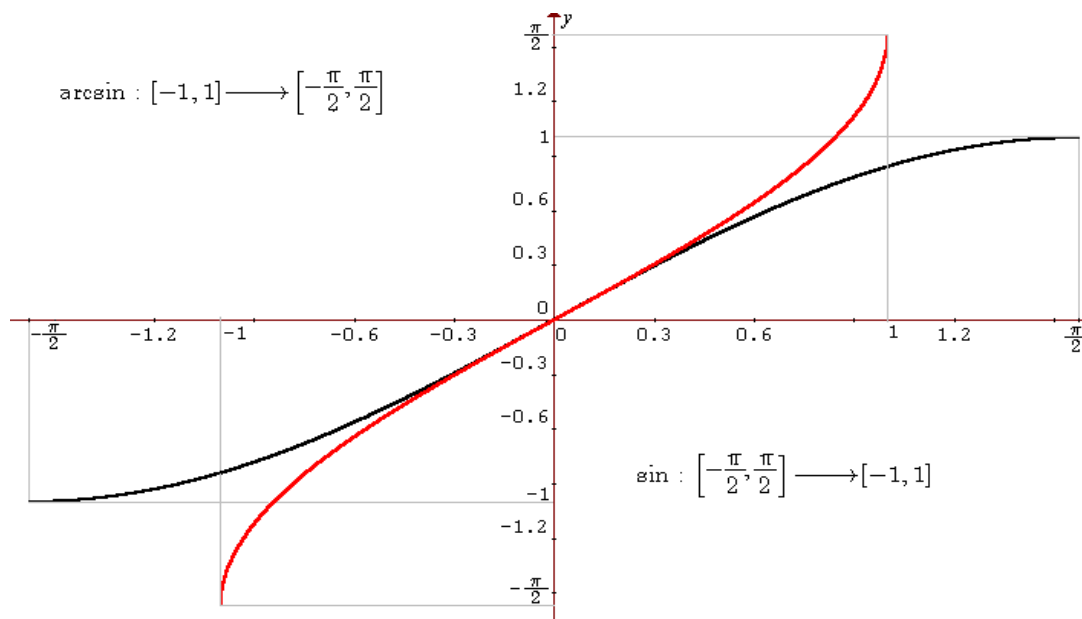


Figura 8.10: Gráfica de la función $f(x) = \arcsin x$

8.1.2 Función arco coseno

Si nos fijamos en la gráfica de la función coseno (fig.8.5) en el intervalo $[0, \pi]$, la función SÍ es inyectiva y su recorrido es $[-1, 1]$, es decir biyectiva.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \cos : [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \cos x \end{array}}$$

Definición 8.8 (Función arco coseno). Se llama función arco coseno a la función real de variable real que asocia a cada número real x , el arco cuyo coseno trigonométrico es x .

$$\begin{array}{ccc} \arccos : [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & f(x) = \arccos x \end{array}$$

Por la definición de funciones inversas:
$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = Id \implies \arccos(\cos x) = x \\ f \circ f^{-1} = Id \implies \cos(\arccos x) = x \end{cases}$$

Gráfica de la función arco coseno

Las gráficas de las funciones recíprocas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (la recta $y=x$):

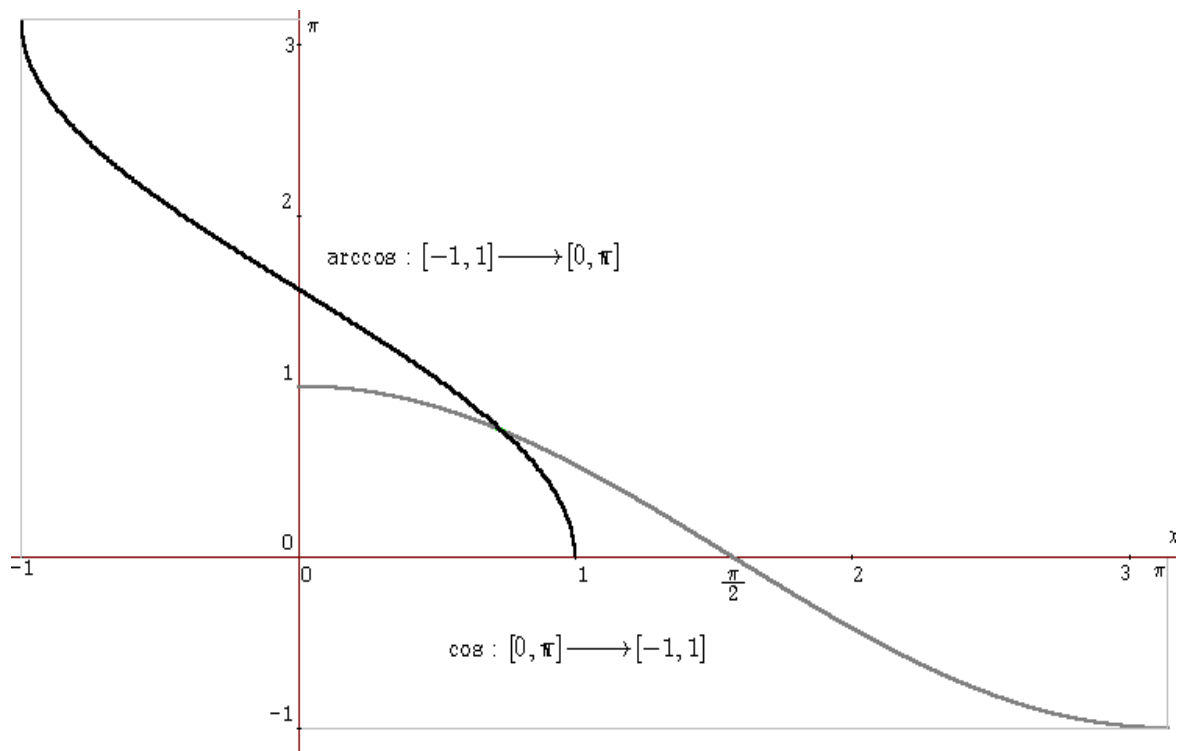


Figura 8.11: Gráfica de la función $f(x) = \arccos x$

8.1.3 Función arco tangente

Si nos fijamos en la gráfica de la función tangente (fig.??) en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la función SÍ es inyectiva y su recorrido es $\mathbb{R}$, es decir biyectiva.

$$\begin{array}{ccc} \tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \tan x \end{array}$$

Definición 8.9 (Función arco tangente). Se llama función arco tangente a la función real de variable real que asocia a cada número real x , el arco cuyo tangente trigonométrica es x .

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & f(x) = \arctan x \end{array}}$$

Por la definición de funciones inversas:
$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = Id \implies \arctan(\tan x) = x \\ f \circ f^{-1} = Id \implies \tan(\arctan x) = x \end{cases}$$

Gráfica de la función arco tangente

Las gráficas de las funciones recíprocas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Las asíntotas verticales de la función tangente, se transforman en asíntotas horizontales en la gráfica de la función arco tangente.

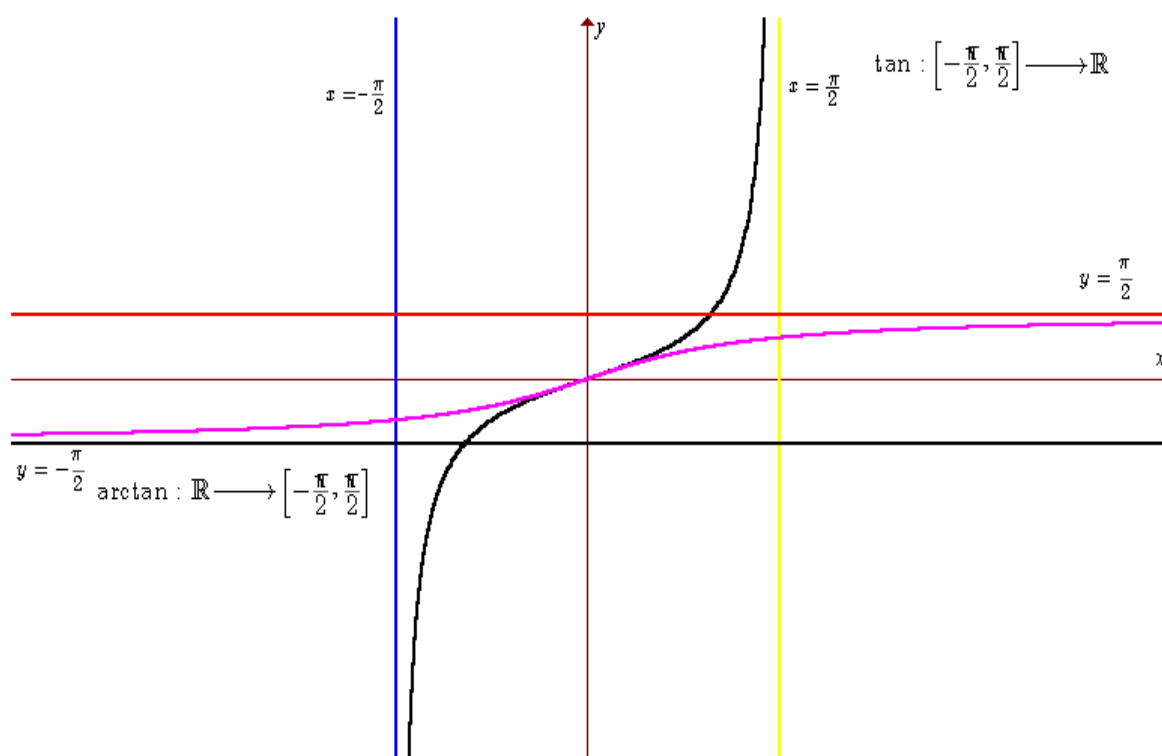


Figura 8.12: Gráfica de la función $f(x) = \arctan x$

8.2 Gráficas de las funciones trigonométricas en general

Las funciones trigonométricas aplicadas a otras ciencias, en general, corresponden con funciones de la forma: $f(x) = A \cdot \sin(Bx + C)$, $f(x) = A \cdot \cos(Bx + C)$, etc. Matemáticamente es la composición de una función lineal con una función trigonométrica.

La construcción de la gráfica conlleva la aplicación de la teoría expuesta anteriormente (gráficas 8.1 y 8.4) y el dibujo de gráficas por traslaciones.

Gráficas asociadas a funciones de la forma $\boxed{F(x) = A \cdot \sin x}$

Características generales:

- Dominio de la función: $D = \mathbb{R}$
- Recorrido de la función. El recorrido de la función $f(x) = \sin x$ es $[-1, 1]$. Al multiplicar por una constante (A), el recorrido será: $Im = [-A, A]$.

La gráfica **se estira**, al factor que produce el estiramiento recibe el nombre de AMPLITUD y

$\begin{cases} \text{Si } A > 1 \Rightarrow \uparrow\uparrow \\ \text{Si } 0 < A < 1 \Rightarrow \downarrow\downarrow \end{cases}$ Si $A < 0$ la gráfica es opuesta respecto del eje de abscisas.

- La función es periódica y su periodo principal es $T = 2\pi$.

Ejemplos:

(a) $f_1(x) = 2 \sin x \Rightarrow A = 2$

• $D = \mathbb{R}$

• $Im f_1 = [-2, 2]$

• $T = 2\pi$

(b) $f_2(x) = \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

• $D = \mathbb{R}$

• $Im f_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

• $T = 2\pi$

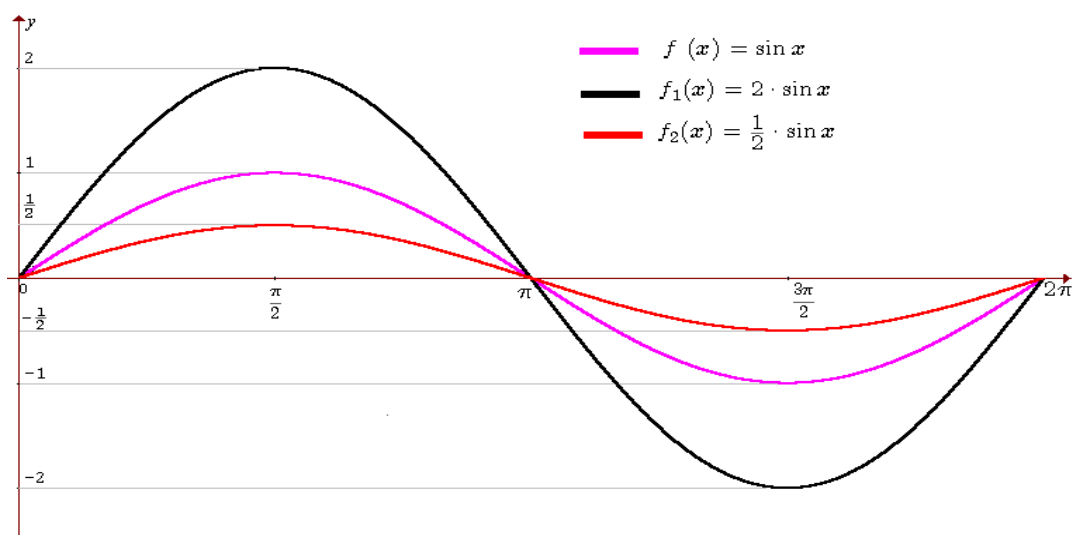


Figura 8.13: Gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$, $f_1(x) = 2 \sin x$ y $f_2(x) = \frac{1}{2} \sin x$

Gráficas asociadas a funciones de la forma $F(x) = \sin Bx$ con $B > 0$

Características generales:

- Dominio de la función: $D = \mathbb{R}$
- Recorrido de la función es el mismo que el de la función seno: $Im = [-1, 1]$
- La función es periódica y su periodo principal es:

$$F(x + P) = F(x) \iff \sin(B(x + P)) = \sin Bx \iff \sin(Bx + B \cdot P) = \sin B \cdot x$$

La función seno tiene de periodo principal 2π , por lo tanto $B \cdot P = 2\pi \Rightarrow \boxed{P = \frac{2\pi}{B}}$ El factor B

comprime o alarga la función en el eje de abscisas: $\begin{cases} 0 < B < 1 \Rightarrow \text{alarga} \\ B > 1 \Rightarrow \text{comprime} \end{cases}$

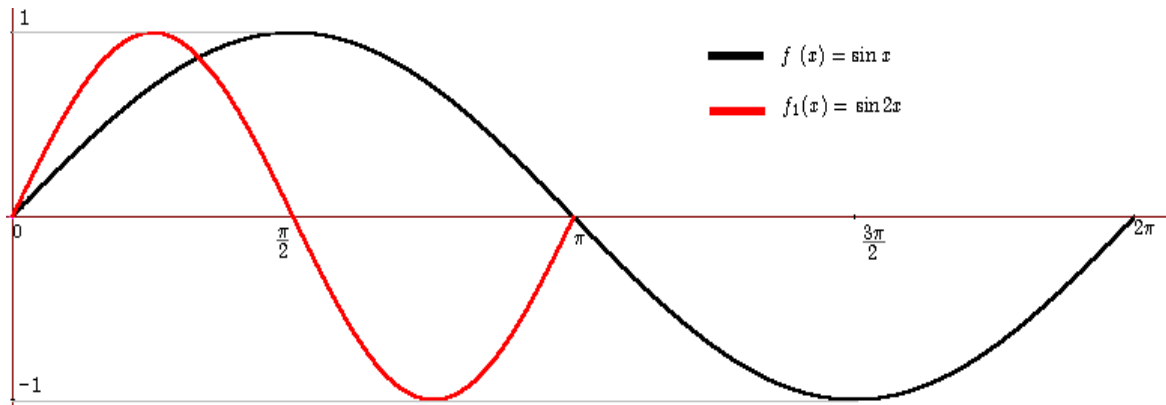
Ejemplos:

(a) $f_2(x) = \sin 2x \Rightarrow B = 2$

• $D = \mathbb{R}$

• $Im f_2 = [-1, 1]$

• $T = \frac{2\pi}{2} = \boxed{\pi}$



(b) $f_3(x) = \sin \frac{1}{2}x \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

• $D = \mathbb{R}$

• $Im f_3 = [-1, 1]$

• $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \boxed{4\pi}$

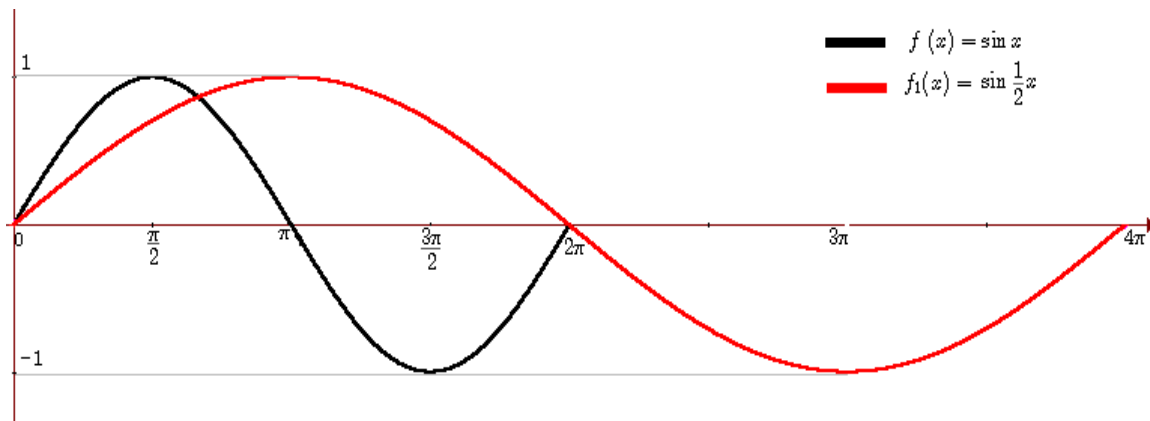


Figura 8.14: Gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$ y $f_3(x) = \sin \frac{1}{2}x$

Gráficas asociadas a funciones de la forma $F(x) = A \cdot \sin Bx$ o $F(x) = A \cdot \cos Bx$

Características generales teniendo en cuenta las funciones ya estudiadas:

- Dominio de la función: $D = \mathbb{R}$
- Recorrido de la función: $Im = [-A, A]$
- La función es periódica y su periodo principal es $T = \frac{2\pi}{B}$

Ejemplo: Dibujar, razonadamente, la gráfica de la función $f(x) = 2 \cdot \cos 3x$

- $D = \mathbb{R}$
- Al ser la amplitud $A = 2$, entonces $Imf = [-2, 2]$
- EL coeficiente $B = 3$. El periodo principal de la función es: $T = \frac{2\pi}{3}$

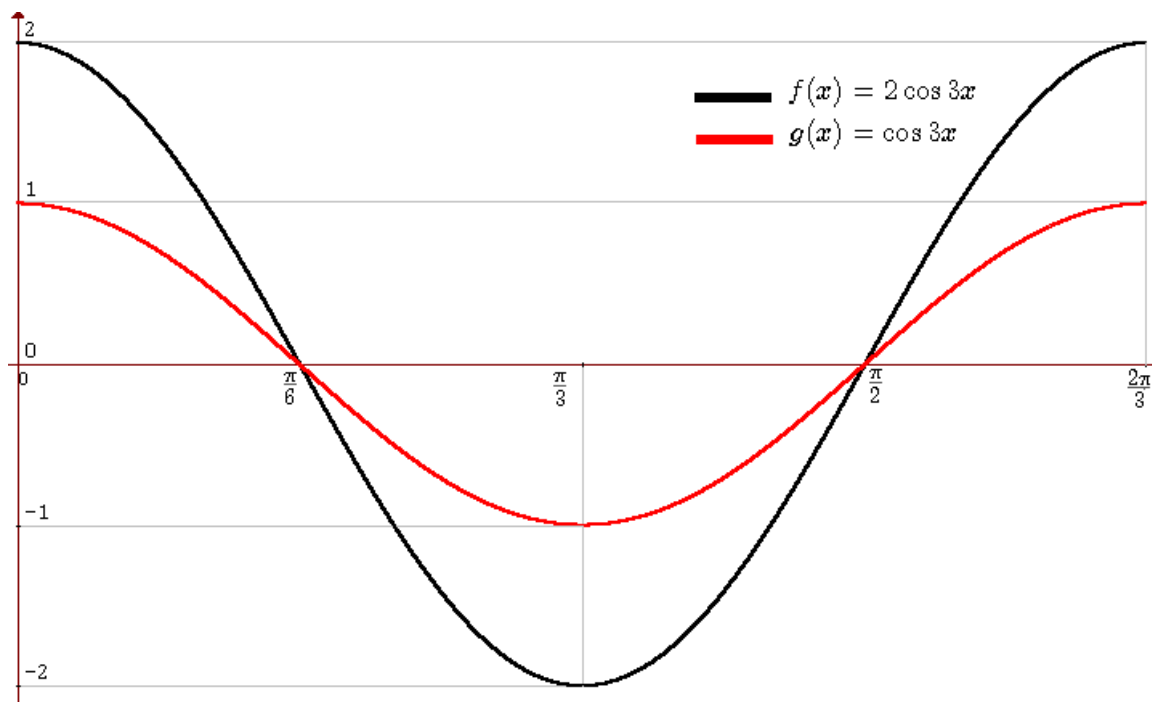


Figura 8.15: Gráficas de las funciones $g(x) = \cos 3x$ y $f(x) = 2 \cos 3x$

Gráficas asociadas a funciones de la forma $F(x) = A \cdot \sin(Bx + C)$ o $F(x) = A \cdot \cos(Bx + C)$

Las gráficas de las funciones son las estudiadas anteriormente trasladadas en el eje de abscisas (ver página 27). La traslación de las curvas recibe el nombre de **CAMBIO DE FASE**.

Efectivamente:

$$f(x) = A \cdot \sin(Bx + C) = A \cdot \sin B \left(x + \frac{C}{B} \right) \qquad f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) = A \cdot \cos B \left(x + \frac{C}{B} \right)$$

La constante $\frac{C}{B}$ es el cambio de fase. En resumen:

Amplitud = $ A $ Periodo $T = \frac{2\pi}{B}$ Cambio de fase $\begin{cases} \left \frac{C}{B} \right \text{ unidades a la derecha si } \frac{C}{B} < 0 \\ \frac{C}{B} \text{ unidades a la izquierda si } \frac{C}{B} > 0 \end{cases}$

Ejemplo: Hallar las principales características de la función $f(x) = \frac{1}{3} \sin(2x + 1)$ y dibujar su gráfica

La función $f(x) = \frac{1}{3} \sin(2x + 1) = \frac{1}{3} \sin 2 \left(x + \frac{1}{2} \right)$.

- Amplitud $A = \frac{1}{3} \Rightarrow Im_f = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$
- El parámetro $B = 2$. Periodo principal: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Cambio de fase $\frac{C}{B} = \frac{1}{2}$. La gráfica se traslada **media unidad a la izquierda**

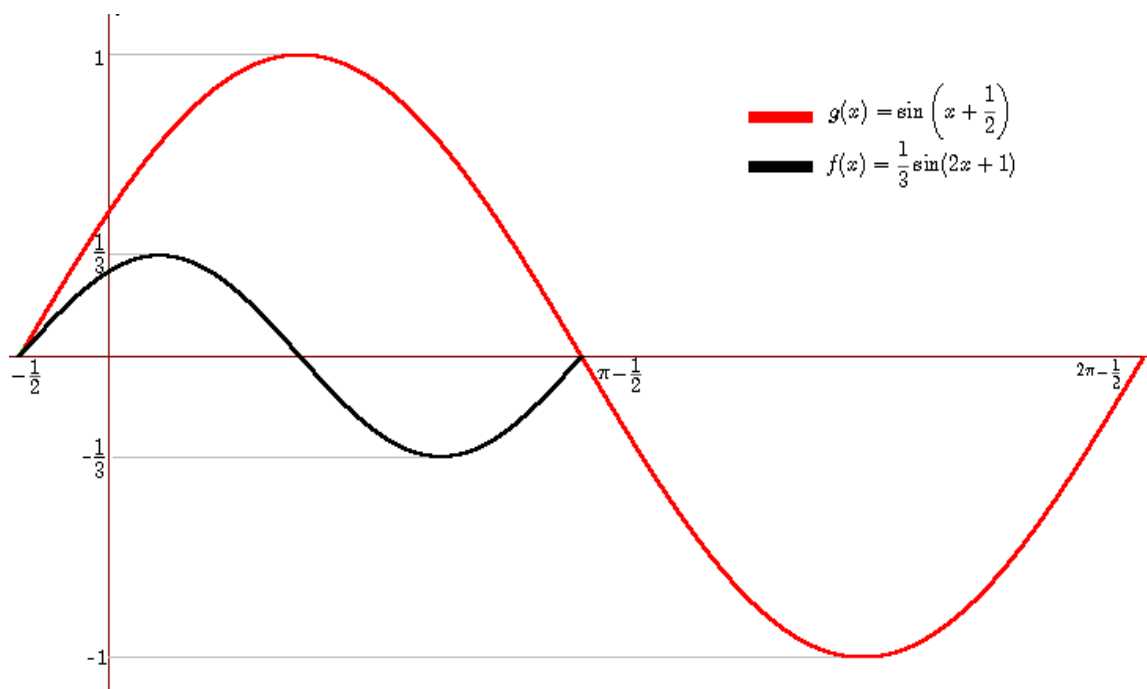


Figura 8.16: Gráficas de las funciones $g(x) = \sin(2x + 1)$ y $f(x) = \frac{1}{3} \sin(2x + 1)$

(f) $f(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x - 6)$

