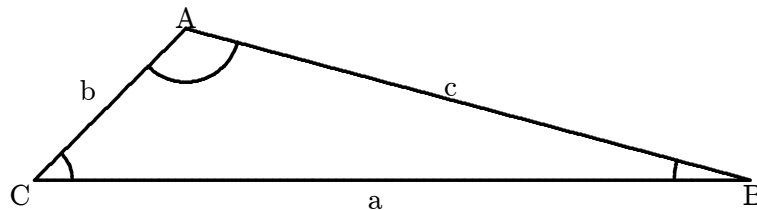


10.1 Conceptos generales

Sea un triángulo de vértices A , B y C :



Propiedad 10.1. *En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

Propiedad 10.2. *En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Propiedad 10.3. *Inversamente, a ángulos iguales se oponen lados iguales.*

Propiedad 10.4. *En todo triángulo, a ángulo mayor se opone lado mayor. Y recíprocamente, a lado mayor, ángulo mayor.*

Propiedad 10.5 (Suma de los ángulos de un triángulo). *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos (180°).*

Líneas notables de un triángulo

Definición 10.1 (Altura de un triángulo). *Se llama **altura** de un triángulo a la recta perpendicular a un lado desde el vértice opuesto.*

Las alturas pueden ser interiores, exteriores o coincidir con algún lado del triángulo.

El punto de intersección de las alturas recibe el nombre de **ortocentro**.

Definición 10.2 (Mediana). *Se llama **mediana** de un triángulo, al segmento trazado desde un vértice al punto medio del lado opuesto.*

Las tres medianas de un triángulo son interiores a él.

El punto de intersección de las medianas recibe el nombre de **baricentro (G)** o centro de gravedad del triángulo.

Propiedad fundamental del baricentro

El baricentro dista $\frac{1}{3}$ del lado y $\frac{2}{3}$ del vértice.

Dado el triángulo de vértices A, B, C y sea M_{AB} el punto medio del lado AB , entonces $|\overline{MG}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{MC}|$ y $|\overline{GC}| = \frac{2}{3} \cdot |\overline{MC}|$

Definición 10.3 (Mediatriz). Se llama **mediatriz** de un triángulo a la recta perpendicular a un lado en su punto medio.

El punto de intersección de las mediatrices recibe el nombre de **circuncentro**, su propiedad es ser equidistante con los vértices del triángulo, por lo tanto es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo y su radio es: $R_{\text{circun}} = d(\text{circuncentro, uno de los vértices})$

Definición 10.4. Se llama **bisectriz** de un triángulo al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos lados del triángulo.

- La bisectriz divide al ángulo en dos partes iguales.
- Cada ángulo del triángulo tiene dos bisectrices, una interior y otra exterior.
- Las dos bisectrices son perpendiculares entre sí.

El punto de intersección de las bisectrices interiores recibe el nombre de **incentro** o centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, su radio es igual a la distancia desde el incentro a cualquiera de los lados.

Propiedades particulares

El triángulo equilátero tiene estas propiedades:

- 1ª Lados y ángulos iguales.
- 2ª Cada ángulo mide 60°
- 3ª Las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices se confunden y concurren en un mismo punto.

El triángulo isósceles tiene estas propiedades:

- 1ª Los ángulos contiguos a la base (lado desigual) son iguales.
- 2ª Si se conoce un ángulo se pueden calcular los otros dos.
- 3ª La altura correspondiente a la base (lado desigual) se confunde con su mediatriz, y mediana, y con la bisectriz del ángulo opuesto.

El triángulo rectángulo tiene estas propiedades:

- 1ª Los ángulos agudos son complementarios.
- 2ª La hipotenusa es mayor que cualquier cateto.
- 3ª Si es isósceles, los ángulos agudos miden 45° .
- 4ª Si un cateto es la base entonces el otro es la altura.
- 5ª El punto medio de la hipotenusa es el circuncentro del triángulo.
- 6ª El vértice de intersección de los dos catetos es el ortocentro.

Propiedad 10.6 (Teorema de Pitágoras). El cuadrado de la hipotenusa es igual a la SUMA de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

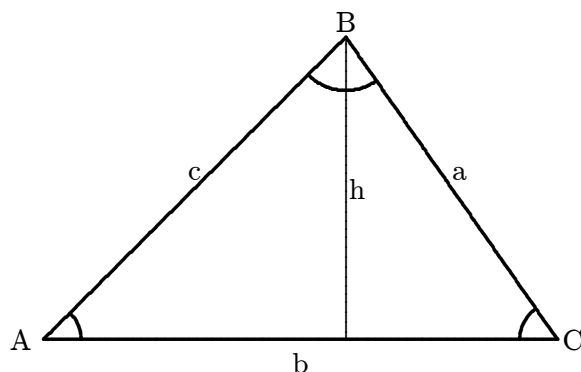
10.2 Teorema del seno

Teorema 10.1. *Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

$$\boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}} \quad (10.1)$$

Demostración

Primer caso: triángulos acutángulos:



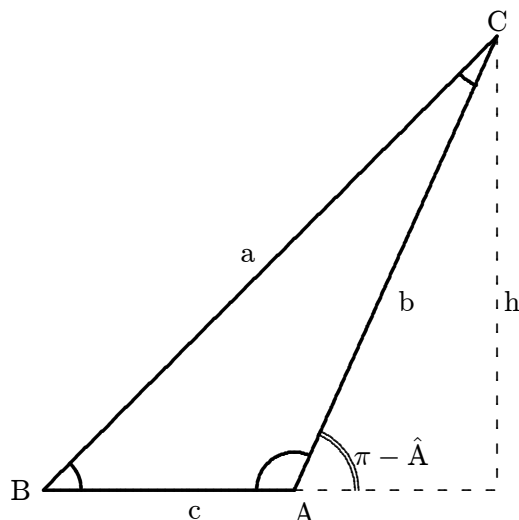
Al trazar la altura, h , desde el vértice B se construyen dos triángulos rectángulos:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \hat{A} = \frac{h}{c} \\ \sin \hat{C} = \frac{h}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = c \cdot \sin \hat{A} \\ h = a \cdot \sin \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Si se traza la altura relativa al vértice C :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Segundo caso: triángulos obtusángulos:



Al trazar la altura, h , desde el vértice C se construyen dos triángulos rectángulos:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\pi - \hat{A}) = \frac{h}{b} \\ \sin \hat{B} = \frac{h}{a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin(\pi - \hat{A}) = \sin \hat{A} \\ h = b \cdot \sin \hat{A} \\ h = a \cdot \sin \hat{B} \end{array} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

El teorema del seno es muy útil aplicarlo cuando:

- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

El seno de un ángulo agudo y de un ángulo obtuso es siempre positivo. Entonces el teorema del seno **NO DETERMINA UNIVOCAMENTE EL ÁNGULO. DOS SOLUCIONES POSIBLES.**

- Se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de los ángulos.

10.3 Teorema del coseno

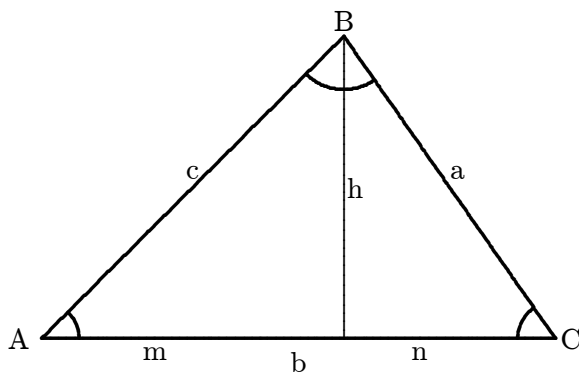
La generalización del teorema de Pitágoras para los triángulos NO RECTÁNGULOS, recibe el nombre de teorema del coseno.

Teorema 10.2. *Un lado al cuadrado es igual a la SUMA de los cuadrados de los otros dos lados MENOS, el doble producto de ellos POR el coseno del ángulo comprendido.*

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}\end{aligned}\tag{10.2}$$

Demostración

Primer caso: triángulos acutángulos:



Al trazar la altura, h , desde el vértice B se construyen dos triángulos rectángulos:

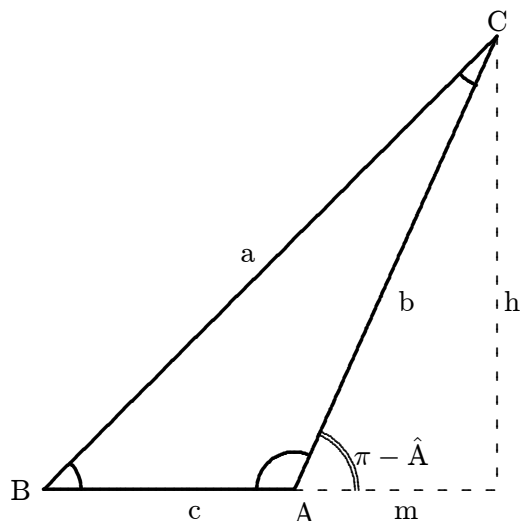
$$\left. \begin{aligned}m + n &= b \Rightarrow n = b - m \\ \cos \hat{A} &= \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos \hat{A} \quad (*) \\ \text{Teorema de Pitágoras} &\left\{ \begin{aligned} h^2 &= c^2 - m^2 \\ h^2 &= a^2 - n^2 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}a^2 &= c^2 + n^2 - m^2 = c^2 + (b - m)^2 - m^2 = \\ &= c^2 + b^2 - 2bm + m^2 - m^2 \stackrel{(*)}{=} b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}\end{aligned}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

Lo mismo con las restantes alturas.

Segundo caso: triángulos obtusángulos:



Al trazar la altura, h , desde el vértice C se construyen dos triángulos rectángulos:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\pi - \hat{A}) = -\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos \hat{A} (*) \\ \text{Teorema de Pitágoras} \left\{ \begin{array}{l} h^2 = a^2 - (m + c)^2 \\ h^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right. \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a^2 - m^2 - 2mc - c^2 = b^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2mc \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

El teorema del coseno es muy útil aplicarlo cuando:

- Se conocen tres lados

El coseno de un ángulo agudo es positivo y de un ángulo obtuso es negativo. Entonces el teorema del coseno DETERMINA UNÍVOCAMENTE EL ÁNGULO. ÚNICA SOLUCIÓN del problema.

- Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Ejemplos: Resolver los triángulos:

1. $a = 3.4$ cm, $b = 8.43$ cm, $\hat{A} = 18^\circ 17'$. Los datos del triángulo son dos lados y un ángulo opuesto a un lado dado. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{3.4}{\sin 18^\circ 17'} = \frac{8.43}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{8.43 \cdot \sin 18^\circ 17'}{3.4} = 0.7778318$$

$$\hat{B} = \arcsin 0.7778318 = \begin{cases} \hat{B}_1 = 51^\circ 3' 45'' \\ \hat{B}_2 = 128^\circ 56' 15'' \end{cases}$$

Primera solución: El ángulo $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}_1 = 180^\circ - 18^\circ 17' - 51^\circ 3' 45'' = 110^\circ 39' 15''$.
El lado c aplicando el teorema del seno:

$$\frac{3.4}{\sin 18^\circ 17'} = \frac{c}{\sin 110^\circ 39' 15''} \Rightarrow c = \frac{3.4 \cdot \sin 110^\circ 39' 15''}{\sin 18^\circ 17'} = 10.14 \text{ cm}$$

Segunda solución: El ángulo $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}_2 = 180^\circ - 18^\circ 17' - 128^\circ 56' 15'' = 32^\circ 46' 45''$.
El lado c aplicando el teorema del seno:

$$\frac{3.4}{\sin 18^\circ 17'} = \frac{c}{\sin 32^\circ 46' 45''} \Rightarrow c = \frac{3.4 \cdot \sin 32^\circ 46' 45''}{\sin 18^\circ 17'} = 5.87 \text{ cm}$$

El problema tiene dos soluciones distintas.

2. $\hat{A} = 64^\circ 27' 12''$, $b = 3.5$ cm y $c = 6$ cm. Los datos son dos lados y el ángulo comprendido, el teorema del coseno nos permite calcular el lado a .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} = 3.5^2 + 6^2 - 2 \cdot 3.5 \cdot 6 \cdot \cos 64^\circ 27' 12'' = 30.1376 \Rightarrow a = +\sqrt{30.1376} = 5.49 \text{ cm}$$

Para hallar los ángulos que faltan aplicando el teorema del seno:

$$\frac{5.49}{\sin 64^\circ 27' 12''} = \frac{3.5}{\hat{B}} = \frac{6}{\sin \hat{C}} \implies$$

$$\begin{cases} \sin \hat{B} = \frac{3.5 \cdot \sin 64^\circ 27' 12''}{5.49} = 0.575218 \implies \hat{B} = \arcsin 0.575218 = 35^\circ 6' 54'' \\ \sin \hat{C} = \frac{6 \cdot \sin 64^\circ 27' 12''}{5.49} = 0.986049 \implies \hat{C} = \arcsin 0.986049 = 80^\circ 25' 6'' \end{cases}$$

- (1) Las soluciones de los ángulos suplementarios NO SON VÁLIDAS, la suma con el ángulo dado $\hat{A}$ es mayor de 180° .
 - (2) Para calcular el ángulo $\hat{C}$, una vez calculado el $\hat{B}$, se puede aplicar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
-