

Los matemáticos griegos trazaban la línea tangente a una circunferencia en un punto de ella aplicando la propiedad geométrica de, perpendicularidad con la recta determinada por el centro y el punto de tangencia.

Al resto de curvas no podían trazar tangentes con regla y compás.

El problema físico de hallar la velocidad instantánea en un punto, aparentemente sin relación con trazar rectas tangentes, estudiado por Kepler, Galileo y Newton, necesita de la interpretación matemática del límite.

La geometría griega permite trazar la ecuación de una recta si son conocidos dos puntos de ella.

René Descartes unió la geometría euclidiana y las coordenadas cartesianas y permite hallar la ecuación de la recta, es decir, la condición que debe cumplir punto del plano, sus coordenadas, para que pertenezca a la recta.

Conceptos preliminares

- La pendiente de una recta, se denota con la letra m , es la **tangente trigonométrica** del ángulo, α , que forma la recta con el semieje positivo de abscisas.

$$\text{La pendiente es } \begin{cases} \text{positiva si } 0 < \alpha < 90^\circ \\ \text{nula si } \alpha = 0 \\ \text{negativa si } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases}$$

- Las rectas verticales $x = a$ no tienen pendiente: $\tan 90^\circ$ no está definida.
- Por un punto pasan infinitas rectas: haz de rectas de vértice el punto. Si el punto tiene de coordenada $P(x_0, y_0)$ la ecuación de todas las rectas en forma punto-pendiente es:

$$\begin{cases} y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \\ x = x_0 \end{cases}.$$

11.1 Interpretación geométrica de la derivada

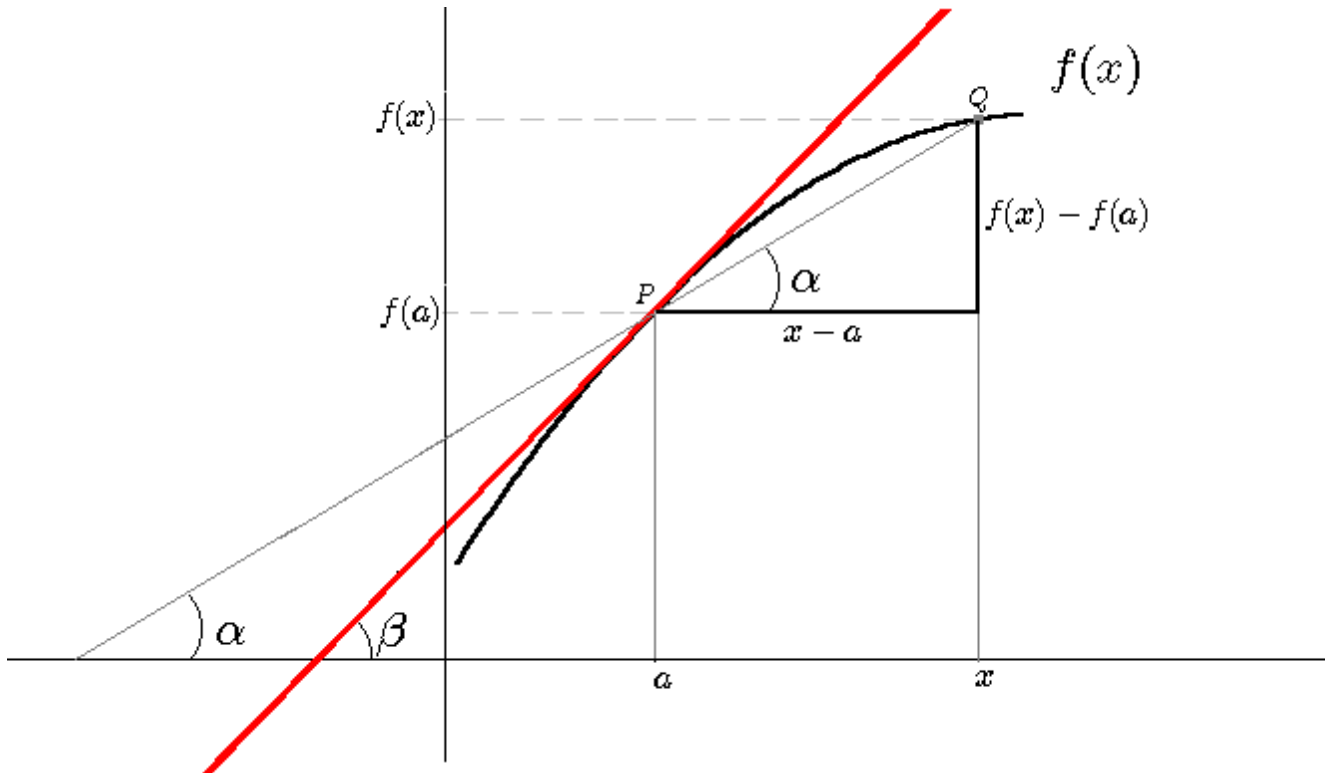


Figura 11.1: Interpretación geométrica de la derivada

La curva viene dada por la función $y = f(x)$ y un punto arbitrario de ella $P(a, f(a))$. Si elegimos otro punto $Q(x, f(x))$ se puede trazar la recta secante. Dicha recta tiene una pendiente m_{secante} .

$$m_{\text{secante}} = \tan \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El cociente anterior recibe el nombre de **tasa de variación media** y físicamente, **velocidad media**. ¿Qué sucede si x tiende a a ? Es decir, hallamos un límite cuando la variable independiente tiende al valor a . El punto Q recorre la gráfica acercándose al punto P hasta confundirse los dos puntos P y Q .

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha = \beta$$

La función trigonométrica tangente es continua en su dominio, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan \alpha = \tan(\lim_{x \rightarrow a} \alpha) = \tan \beta = m_{\text{tangente}}$$

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$ es: $y - f(a) = m_T \cdot (x - a)$ siendo m_T el límite anterior, si existe.

De la misma manera el límite anterior, físicamente, representa la velocidad instantánea en un punto. El concepto matemático asociado a dicho límite es el de derivada de una función en un punto.

Definición 11.1 (Derivada de una función en un punto). Sea f una función real de variable real de dominio D_f , y $a \in D_f$, no aislado, se llama derivada de la función en el punto a , al $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, si existe.

La derivada de una función en un punto tiene diversas notaciones: $f'(a)$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_a$, $f'(a)$, $Df(a)$

- La notación del punto es debida a Isaac Newton.
- La notación $Df(a)$ se lee diferencial de la función en el punto a .
- La notación $f'(a)$ es la empleada habitualmente.
- La notación $\left. \frac{df}{dx} \right|_a$ fue empleada por Leibniz.

Interpretación geométrica

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

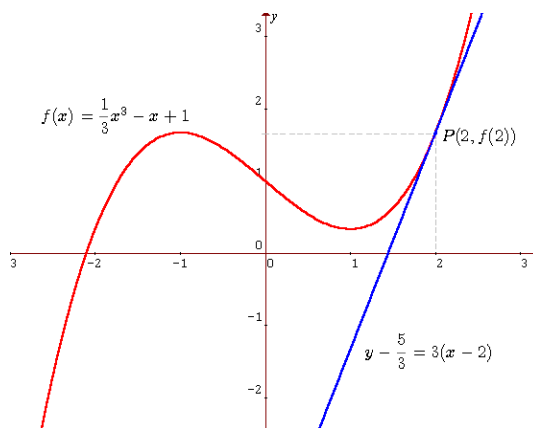
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ en el punto de abscisa 2

El punto de tangencia $P(2, f(2))$, sustituyendo en la función: $f(2) = \frac{8}{3} - 2 + 1 = \frac{5}{3}$. Por la interpretación geométrica de la derivada: $m_T = f'(2)$ y la ecuación de la recta tangente es: $y - \frac{5}{3} = f'(2)(x - 2)$.

$$\begin{aligned} m_T &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3}x^3 - x + 1 - \frac{5}{3}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}}{x - 2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1) = \boxed{3} \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - \frac{5}{3} = 3(x - 2)$



(1) La indeterminación es $\frac{0}{0}$. Descomponemos el numerador por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{3} & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

A la vista de la gráfica de la función, $f(x)$, estudiar el signo de la derivada

- Si la pendiente $m_T > 0$ entonces $f'(a) > 0$, por lo tanto $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- Si la pendiente $m_T < 0$ entonces $f'(a) < 0$, por lo tanto $a \in (-1, 1)$.
- Si la pendiente $m_T = 0$ entonces $f'(a) = 0$, por lo tanto $a = -1$ ó $a = 1$.

11.1.1 Derivadas laterales

La derivada es un límite y un límite existe, si existen los límites laterales y son iguales.

Sea $h > 0$ entonces $\begin{cases} \text{Por la izquierda } x < a \implies a - x > 0 \implies h = a - x \text{ y } h \rightarrow 0 \\ \text{Por la derecha } x > a \implies x - a > 0 \implies h = x - a \text{ y } h \rightarrow 0 \end{cases}$

Definición 11.2 (Derivadas laterales).

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h} \quad (11.1)$$

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (11.2)$$

Teorema 11.1. La derivada de una función en un punto existe si y sólo si existen las derivadas laterales y son iguales.

La demostración por la teoría de los límites es trivial.

Teorema 11.2 (Derivabilidad y continuidad). Toda función derivable en un punto a es continua en dicho punto.

Demostración

Por ser derivable $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y es un número real.

La función es continua, por definición, en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ o $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$. Efectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \stackrel{(3)}{=} f'(a) \cdot 0 \stackrel{(4)}{=} 0$$

- (1) Al ser $x \neq a$ se multiplica numerador y denominador por la diferencia $x - a$.
- (2) Por el álgebra de límites: el límite de un producto de funciones que tienen límite es igual al producto de los límites.
- (3) Existe la derivada y es finita por lo tanto al multiplicar por cero es igual a cero.

El recíproco del teorema es FALSO: no toda función continua en un punto es derivable en dicho punto. En efecto:

Sea $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. En $x = 0$ la función es continua: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Derivadas laterales en $a = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 - h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+h}{-h} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+h}{+h} = 1$$

Existen las derivadas laterales pero son distintas, NO ES DERIVABLE LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO EN 0.

Si $A \implies B$ entonces Negar la proposición $A \implies$ Negar la proposición B .

Si una función NO es continua en a entonces NO es derivable en a

La condición necesaria, no suficiente, para que una función sea derivable en un punto es que sea continua en dicho punto.

Ejemplos:

1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, hallar, si existe, la derivada en el punto 1

En primer lugar se debe estudiar la continuidad en 1:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} 4 - 3x = 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 1 = f(1) \implies \text{la función es continua en 1} \end{aligned}$$

Derivadas laterales en 1:

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2 - 1}{-h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + h^2}{-h} = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 3(1+h) - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 3 - 3h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = -3 \end{aligned}$$

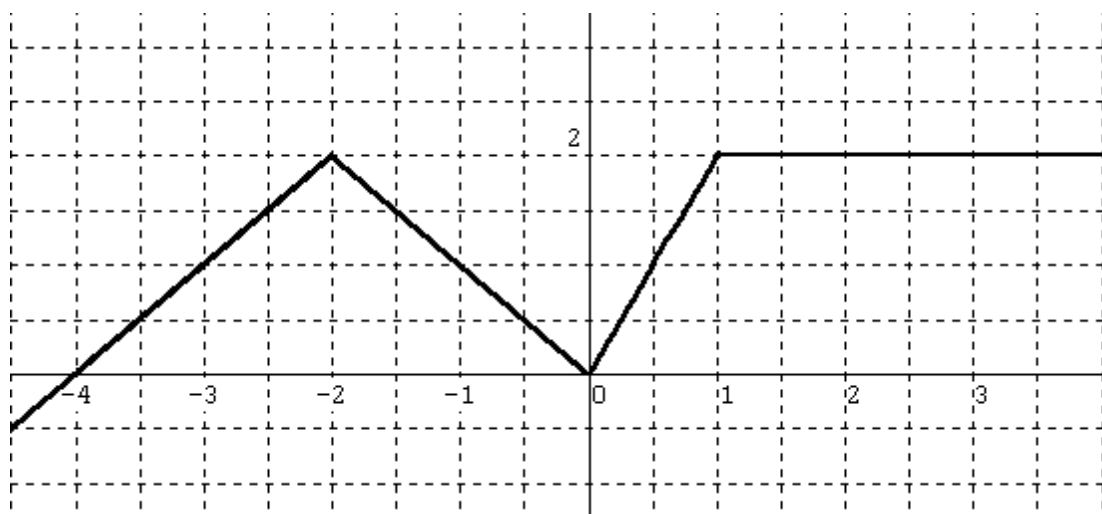
Las derivadas laterales existen pero son distintas: **NO ES DERIVABLE EN 1.**

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, hallar, si existe, la derivada en $x = 0$.

En primer lugar se debe estudiar la continuidad en 0:

$$\begin{aligned} f(0) &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 3 = -3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3 = 3 \\ \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &\implies \text{la función NO es continua en 0} \implies \text{NO ES DERIVABLE EN 0} \end{aligned}$$

Ejercicio: La gráfica de una función $f(x)$ es:



Contestar, razonadamente, las siguientes preguntas:

- (a) ¿Es continua la función?
- (b) Hallar, geoméricamente, $f'(x)$ si $x < -2$
- (c) Hallar, geoméricamente, $f'(x)$ si $-2 < x < 0$
- (d) Hallar, geoméricamente, $f'(x)$ si $0 < x < 1$
- (e) Hallar, geoméricamente, $f'(x)$ si $x > 1$
- (f) ¿En qué puntos la función no es derivable? ¿Por qué?
- (g) Con los resultados anteriores dibujar la gráfica de la función $f'(x)$

Definición 11.3 (Función derivada).

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama función derivada de f y se denota por f' a la aplicación que a cada $x \longmapsto f'(x)$ valor del dominio D le asocia, si existe, el valor de su derivada.

$$f' : D_1 \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Observaciones

El dominio de la función derivada, f' , es como máximo, el mismo que la función f .
No se puede derivar en un punto QUE NO PERTENEZCA al dominio de la función.

Ejemplo: Sea $f(x) = \ln x$ el dominio es $(0, +\infty)$. Su función derivada, como máximo, tendrá de dominio $(0, +\infty)$

11.2 Derivadas de las funciones elementales

Teorema 11.3 (Función constante).

La función constante $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es cero.
 $x \longmapsto f(x) = k$

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

□

Teorema 11.4 (Función identidad).

La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es la unidad.
 $x \longmapsto f(x) = x$

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

□

Teorema 11.5 (Función cuadrática).

La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es el doble de la variable independiente.
 $x \longmapsto f(x) = x^2$

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

□

Teorema 11.6 (Función potencial).

La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo $n \in \mathbb{N}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es el **exponente por la base elevada a una unidad inferior**.
 $x \longmapsto f(x) = x^n$

Demostración.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^{n-1} \right]}{h} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

□

(*)Binomio de Newton

CASO GENERAL DE LA DERIVADA DE UNA POTENCIA

La regla de derivación de potencias de exponente natural es también válida para cualquier tipo de exponente: entero, racional y real.

Derivada de un radical

Los radicales son potencias de exponente racional:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \implies f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \text{ y } D_{f'} \subseteq D_f$$

Caso particular. Derivada de los radicales cuadráticos (raíces cuadradas)

La derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es igual a la unidad dividida por el doble de la raíz cuadrada.

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f(x) = x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

El dominio de la función derivada es $D_{f'} = (0, +\infty)$ ¿Por qué?

11.3 La derivada es un operador lineal

Sean dos funciones reales, f y g , derivables en un punto a . Por la definición de derivada:

$$\boxed{\exists f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \exists g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}}$$

(11.3)

Teorema 11.7 (DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES).

La función suma: $f + g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a y su derivada es igual a la suma de las derivadas

$$x \longmapsto (f + g)(x)$$

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad (11.4)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(a+h) - (f + g)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] \quad (\text{11.3}) \\ &= \boxed{f'(a) + g'(a)} \end{aligned}$$

□

Ejemplos:

- (1) Calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2 + 2$. La función es una suma de tres funciones, su derivada será la suma de las derivadas. Los dos primeros sumandos son funciones potenciales y el tercero una función constante.

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' + 2' = 3x^2 + 2x + 0 = 3x^2 + 2x$$

- (2) Hallar la ecuación de la tangente geométrica en el punto $P(-1, 2)$.

Por la interpretación geométrica de la derivada: $m_T = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 1$. La ecuación de la tangente: $y - f(-1) = m_T \cdot (x - (-1)) \implies y - 2 = 1 \cdot (x + 1) \implies x - y + 3 = 0$

- (3) Hallar la derivada de la función: $f(x) = x^5 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. La función es suma de funciones potenciales:

$$f(x) = x^5 + \sqrt{x} + x^{\frac{1}{3}} \implies f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Teorema 11.8 (DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES).

La función producto: $f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a y su derivada es derivada de la primera función POR la segunda sin derivar MÁS la primera sin derivar POR la derivada de la segunda:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad (11.5)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - (f(a) \cdot g(a))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h) - f(a)] \cdot g(a+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) \cdot [g(a+h) - g(a)]}{h} \quad (11.3) \\ &= \boxed{f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)} \end{aligned}$$

□

CASO PARTICULAR

Corolario 11.1. La derivada de una **constante** por una función es igual a la constante por la derivada de la función

Demostración.

$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ entonces su derivada aplicando (11.5) es igual a

$$(kf)'(a) = k' \cdot f(a) + k \cdot f'(a) \stackrel{(1)}{=} \boxed{k \cdot f'(a)}$$

□

(1) La derivada de una función constante es cero.

Ejemplos: Hallar la derivadas de las funciones

(1) $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ entonces $f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + \frac{1}{2} \cdot 2x + 1 - 0 = 12x^3 + x + 1$

(2) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ La función es el producto de dos funciones y su derivada por 11.5 es:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot (\sqrt{x})' = 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

Si en la función efectuamos primero el producto: $f(x) = x^2\sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$ por lo tanto

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

Teorema 11.9 (DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES).

- En primer lugar demostramos la derivada de la función $\frac{1}{g}$ en el punto $x = a$, por lo tanto $g(a) \neq 0$

Demostración.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h \cdot g(a) \cdot g(a+h)} = -\frac{1}{[g(a)]^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\end{aligned}$$

□

- La función cociente: $\frac{f}{g} : D_f \cap D_g \setminus \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a y su
- $$x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

derivada es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar **MENOS** el numerador por la derivada del denominador dividido entre el cuadrado del denominador.

Demostración.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \stackrel{(11.5)}{=} f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2} \quad (11.6)$$

□

CASOS PARTICULARES

Corolario 11.2. La derivada del cociente de una función entre una **constante** es igual a la derivada de la función entre la constante.

Demostración.

$$g(x) = \frac{f(x)}{k} = \frac{1}{k} \cdot f(x) \text{ aplicando (11.5), caso particular } \boxed{g'(x) = \frac{1}{k} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{k}}$$

□

Corolario 11.3. La derivada del cociente entre una **constante** y una función es igual a **MENOS** la constante **POR** la derivada de la función entre el cuadrado de la función.

Demostración.

$$g(x) = \frac{k}{f(x)} \text{ aplicando (11.6) } g'(x) = \frac{k' \cdot f(x) - k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} \stackrel{(1)}{=} \boxed{\frac{-k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

□

(1) La derivada de una función constante es cero.

Teorema 11.10 (Regla de la cadena).

Sea f una función derivable en a y g una función derivable en $f(a)$ entonces la función composición de f con g , $h = g \circ f$, es derivable en a y su derivada es igual, a la derivada de la función g en $f(a)$ **POR** la derivada de f en a .

$$\boxed{h'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)} \quad (11.7)$$

La demostración no es fácil y en cursos posteriores se demostrará.

Prácticamente cualquier función que el alumno tenga que derivar será composición de funciones. La REGLA DE LA CADENA es el teorema más importante para derivar correctamente.

Ejemplos:

1. Hallar la derivada de la función $h(x) = (x^2 - 3)^{2003}$

La función es la composición de las funciones: $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3 & \text{función polinómica} \\ g(x) = x^{2003} & \text{función potencial} \end{cases}$ entonces:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^{2003}$$

Las dos funciones, f y g , son derivables fácilmente: $\begin{cases} f'(x) = 2x \\ g'(x) = 2003x^{2002} \end{cases}$. Aplicando la regla de la cadena 11.7:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(x^2 - 3) \cdot f'(x) = 2003(x^2 - 3)^{2002} \cdot 2x$$

2. Hallar la derivada de la función $h(x) = \sqrt{2x + 5}$

La función es la composición de las funciones: $\begin{cases} f(x) = 2x + 5 & \text{función polinómica} \\ g(x) = \sqrt{x} & \text{función raíz cuadrada} \end{cases}$ entonces:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = \sqrt{2x + 5}$$

Las dos funciones, f y g , son derivables fácilmente en sus dominios: $\begin{cases} f'(x) = 2 \\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$. Aplicando la regla de la cadena 11.7:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(2x + 5) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x + 5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + 5}}$$

Teorema 11.11 (Derivada de la función inversa (recíproca)). Sea f una función que posee inversa, f^{-1} . La función f es derivable en el punto (a, b) , $b=f(a)$ con $f'(a) \neq 0$ entonces existe la derivada de la función f^{-1} en b y es igual a $\frac{1}{f'(a)}$

Demostración. Por definición de función recíproca: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Derivando y aplicando la regla de la cadena: $(f^{-1}(f(x)))' \cdot f'(x) = 1$. Sustituyendo x por a y $f(x) = f(a) = b$

$$(f^{-1}(b))' \cdot f'(b) = 1 \implies (f^{-1}(b))' \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{f'(a)}$$

(1) Por hipótesis del teorema $f'(a) \neq 0$

□

Ejemplo: Sea la función $f(x) = 3x^3 + 2x - 2$, hallar la derivada de la función inversa $(f^{-1}(3))'$

La antiimagen de 3 es la solución de la ecuación $3x^3 + 2x - 2 = 3 \Rightarrow 3x^3 + 2x - 5 = 0$ POr Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 0 & 2 \\ 1 & & 3 & 3 \\ \hline & 3 & 3 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} -5 \\ 5 \\ 0 \end{array}$$

La ecuación $3x^3 + 2x - 5 = 0$ no tiene raíces reales. ¿Por qué? La función f es derivable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en el punto $P(1, 3)$, La gráfica de la función inversa, f^{-1} , pasa por el punto $Q(3, 1)$. Por el teorema de la función inversa (teorema 11.11):

$$(f^{-1}(3))' = \frac{1}{f'(1)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (f^{-1}(3))' = \frac{1}{11}$$

$$(1) f'(x) = 9x^2 + 2 \Rightarrow f'(1) = 9 + 2 = 11$$

11.4 Derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales

Teorema 11.12 (Derivada de la función logaritmo neperiano).

La función: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in (0, +\infty)$ y su derivada es $f'(x) = \frac{1}{x}$
 $x \longmapsto f(x) = \ln x$

Demostración.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \stackrel{(3)}{=} \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{h}{x} \cdot \frac{1}{h}}\right) \stackrel{(4)}{=} \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(1) Propiedad de la función logaritmo: $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

(2) Indeterminación: $0 \cdot \infty$

(3) Indeterminación: 1^∞

(4) La definición del número e

□

Teorema 11.13 (Derivada de la función logaritmo).

La función: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in (0, +\infty)$ y su derivada es
 $x \longmapsto f(x) = \log_a x$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Demostración.

$$f(x) = \log_a x \stackrel{(1)}{=} \frac{\ln x}{\ln a} \text{ entonces } f'(x) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

(1) Cambio de base: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

(2) Derivada de un cociente de funciones siendo el denominador constante.

□

Teorema 11.14 (Derivada de la función exponencial de base e).

La función: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = e^x$
 $x \longmapsto f(x) = e^x$

Demostración. Las funciones exponencial y logarítmica son inversas. Por el teorema de la función inversa:

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ g(x) = f^{-1}(x) = \ln x \end{cases} \quad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad (f(x))' = \frac{1}{(g(e^x))'} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

□

Teorema 11.15 (Derivada de la función exponencial).

La función: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = a^x \cdot \ln a$
 $x \longmapsto f(x) = a^x$

Demostración. Su función inversa es $g(x) = \log_a x$ y $g'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{(g(a^x))'} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{a^x}} = a^x \cdot \ln a$$

□

Ejemplos:

1. Hallar la derivada de la función: $f(x) = \ln(7x^3 - 5x + 2)$

Es la composición de dos funciones: la polinómica con la logarítmica. Regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{7x^3 - 5x + 2} \cdot (21x^2 - 5) = \frac{21x^2 - 5}{7x^3 - 5x + 2}$$

2. Hallar la derivada de la función: $f(x) = e^{\frac{x+3}{x-1}}$

Composición de la función racional y la función exponencial. Regla de la cadena:

$$f'(x) = e^{\frac{x+3}{x-1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+3)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x+3}{x-1}} \cdot \frac{-4}{(x-1)^2}$$

3. Hallar la derivada de la función: $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}$

Si se lee la función es:

función exponencial de base tres de la función raíz cuadrada de la función polinómica

La función $f(x)$ es la composición de TRES FUNCIONES elementales. Por la regla de la cadena:

$$f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) \text{ siendo } \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 1 & \implies f'_1(x) = 2x \\ f_2(x) = \sqrt{x} & \implies f'_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f_3(x) = 3^x & \implies f'_3(x) = 3^x \cdot \ln 3 \end{cases}$$

$$f'(x) \stackrel{(1)}{=} f'_3((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) \stackrel{(2)}{=} 3^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{3^{\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 3 \cdot x}{\sqrt{x^2-1}}$$

(1) Regla de la cadena para la composición de tres funciones.

(2) $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = \sqrt{x^2-1}$ y $f_1(x) = x^2 - 1$

11.5 Derivadas de las funciones trigonométricas

Teorema 11.16 (Derivada de la función seno).

La función: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = \cos x$
 $x \longmapsto f(x) = \sin x$

Demostración.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \stackrel{(2)}{=} \cos x \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

(1) Transformación de sumas en productos.

(2) Límite fundamental de la trigonometría: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

□

Teorema 11.17 (Derivada de la función coseno).

La función: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = -\sin x$
 $x \longmapsto f(x) = \cos x$

Demostración.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \stackrel{(1)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ f'(x) &\stackrel{(2)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) \stackrel{(3)}{=} -\sin x \end{aligned}$$

(1) El coseno es el complementario del seno.

(2) Regla de la cadena: funciones $f_2(x) = \sin x$ y $f_2(x) = \frac{\pi}{2} - x$

(3) El seno es el complementario del coseno.

□

Teorema 11.18 (Derivada de la función tangente).

La función: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in D$ y su derivada es
 $x \longmapsto f(x) = \tan x$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Demostración.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \stackrel{(1)}{\implies} f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\cos^2 x} \stackrel{(3)}{=} 1 + \tan^2 x$$

(1) Derivada de un cociente de funciones derivables.

(2) Relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(3) Identidades trigonométricas.

□

¿Para qué valores NO es derivable la función tangente? ¿Por qué?

11.6 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas (recíprocas)

Teorema 11.19 (Derivada de la función arco tangente).

La función: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y su derivada es $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 $x \longmapsto f(x) = \arctan x$

Demostración. Su función inversa es $g(x) = \tan x$ y $g'(x) = 1 + \tan^2 x$. Entonces:

$$f'(x) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(g(\arctan x))'} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

- (1) Derivada de la función inversa (pàg197).
- (2) Derivada de la función tangente.
- (3) $\tan(\arctan x) = x$, son funciones inversas.

□

Teorema 11.20 (Derivada de la función arco seno).

La función: $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in (-1, 1)$ y su derivada es
 $x \longmapsto f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración. Su función inversa es $g(x) = \sin x$ y $g'(x) = \cos x$. Entonces:

$$f'(x) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(g(\arcsin x))'} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (1) Derivada de la función inversa (pàg197).
- (2) Derivada de la función seno.
- (3) Relación fundamental de la trigonometría:

$$\begin{aligned} \sin^2(\arcsin x) + \cos^2(\arcsin x) &= 1 \implies \cos^2(\arcsin x) = 1 - (\sin(\arcsin x))^2 = 1 - x^2 \\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

□

Teorema 11.21 (Derivada de la función arco coseno).

La función: $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in (-1, 1)$ y su derivada es
 $x \longmapsto f(x) = \arccos x$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La demostración se deja como ejercicio. En el apéndice C se encuentran las reglas de derivación, la tabla de derivadas inmediatas y de las derivadas de las funciones compuestas.

Ejemplo:

1. Derivar la función $f(x) = \arcsin(e^x)$

La lectura de la función es: **arco seno** de **la función exponencial** Regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \frac{e^x}{1-e^{2x}}$$

2. Derivar y simplificar la función $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$

La función es composición de tres funciones:

$$f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) \text{ siendo } \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 1 & \Rightarrow f'_1(x) = 2x \\ f_2(x) = \sqrt{x} & \Rightarrow f'_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f_3(x) = \arctan x & \Rightarrow f'_3(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$f'(x) = f'_3((f_2 \circ f_1)(x)) \cdot f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

11.6.1 Método de la derivada logarítmica

Las propiedades de los logaritmos permiten transformar potencias en productos. Las funciones de exponencial-potencial, $h(x) = (f(x))^{g(x)}$, $f(x) > 0$ aplicando logaritmos:

$$\ln h(x) = \ln (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln h(x) = g(x) \cdot \ln(f(x)) \Rightarrow h(x) = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

$$h'(x) \stackrel{(1)}{=} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \stackrel{(2)}{=}$$

$$= (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

(1) Regla de la cadena y derivada de un producto de funciones

(2) Las funciones exponencial y logarítmicas son inversas.

NO ES NECESARIO, NI RECOMENDABLE, APRENDERSE LA FÓRMULA.

Lo mejor es tomar logaritmos y seguir el procedimiento.

Ejemplo: Derivar la función $f(x) = x^{\cos x}$

$$\ln f(x) = \ln x^{\cos x} = \cos x \cdot \ln x \Rightarrow f(x) = e^{\cos x \cdot \ln x} \text{ derivando}$$

$$f'(x) = e^{\cos x \cdot \ln x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$$

Ejercicio: Demostrar, aplicando derivada logarítmica, que la derivada de la función $f(x) = x^r$, $\forall r \in \mathbb{R}$ es igual al exponente por la base elevada a una unidad inferior: $(f'(x) = r \cdot x^{r-1})$

11.7 Derivadas sucesivas

Definición 11.4 (Derivada segunda). Se llama derivada segunda de la función f a la derivada de la función derivada f' . Se denota por f'' o $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (se lee derivada segunda de la función respecto de la variable x dos veces)

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

La definición se puede repetir y se obtiene la derivada tercera, cuarta, etc.

Ejemplo: Sea $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$, calcular $f''(2)$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \implies f''(x) = 12x - 10 \implies f''(x=1) = 12 \cdot 1 - 10 = 2$$

En cinemática la derivada del espacio respecto del tiempo $\frac{ds}{dt}$ es la velocidad instantánea

$v(t)$. La derivada de la velocidad instantánea $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$ es la aceleración en función del tiempo t .

Ejemplo: La posición de un objeto viene expresada por la función $s(t) = 2t^2 - 12t + 8$, donde s se mide en cm y t en segundos. Determinar la velocidad en los instantes $t = 1$ y $t = 6$. ¿Cuándo la velocidad es nula? Hallar la aceleración.

La velocidad instantánea es: $v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$ y $\begin{cases} t = 1 \text{ entonces } v(t=1) = 4 \cdot 1 - 12 = -8\text{cm/s} \\ t = 6 \text{ entonces } v(t=6) = 4 \cdot 6 - 12 = 12\text{cm/s} \end{cases}$

La velocidad es nula si $v(t) = 0$. Resolviendo la ecuación de primer grado $4t - 12 = 0 \implies t = 3$ segundos.

La aceleración instantánea: $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 4\text{cm/s}^2$ ¿Qué interpretación física tiene que la aceleración no depende del tiempo?

11.8 Derivada implícita

Las funciones trabajadas son funciones explícitas: la variable dependiente y depende **explícitamente** de la variable independiente x (la y está despejada en función de x).

La pregunta es la siguiente: ¿si no podemos, o no sabemos, despejar la y en función de x ?

Matemáticamente se dice que tenemos una expresión de dos variables.

Para derivar supondremos que y **está en función de x** y que no sabemos despejar.

La derivada de y respecto de x es $\frac{dy}{dx} = y'$.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y^3 + y + 2 = x^2$ en el punto $P(-1, 0)$

La interpretación geométrica de la derivada en el punto P , nos permite hallar la pendiente de la tangente y la ecuación de dicha tangente.

No sabemos despejar y en función de x para derivar explícitamente. Derivamos implícitamente:

$$3y^2 \cdot y' + 1 \cdot y' + 0 = 2x \xrightarrow{(1)} y'(3y^2 + 1) = 2x \xrightarrow{(2)} y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}$$

$$m_T = y'_{(-1,0)} = \frac{2 \cdot (-1)}{1 + 0} = -2. \text{ Ecuación de la tangente } y - 0 = -2(x - (-1)) \implies y = -2x - 2.$$

(1) Factor común de y' .

(2) La expresión $3y^2 + 1$ es distinta de cero $\forall y \in \mathbb{R}$. Se despeja y' dividiendo por $3y^2 + 1$.

La derivación implícita lleva consigo problemas de dominio. No es lo mismo derivar una función que una curva.

Ejemplo: Calcular la tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto de abscisa $x = 1$

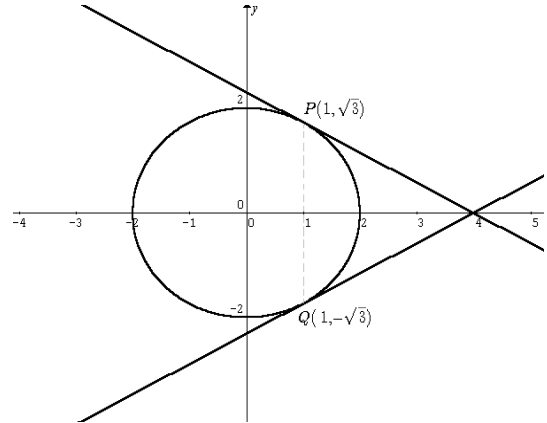
Derivando implícitamente: $2x + 2y \cdot y' = 0 \implies y' = \frac{-x}{y}$ si $y \neq 0$. En los puntos de abscisa CERO no hay tangente.

Si el punto de tangencia tiene de abscisa $x = 1$ entonces $1^2 + y^2 = 4 \implies y^2 = 3 \implies y = \pm\sqrt{3}$. La curva tendrá dos tangentes: $P(1, \sqrt{3})$ y $Q(1, -\sqrt{3})$.

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$P(1, \sqrt{3}) \quad m_T = -\frac{1}{\sqrt{3}} \implies y - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$

$$Q(1, -\sqrt{3}) \quad m_T = -\frac{1}{-\sqrt{3}} \implies y + \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$



La curva tendrá dos tangentes: $P(1, \sqrt{3})$ y $Q(1, -\sqrt{3})$.

Las ecuaciones de las tangentes son:

También se puede aplicar la derivada implícita al método de la derivación logarítmica (pág. 202).

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $y = x^{\cos x}$

Tomando logaritmos neperianos y derivando implícitamente:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x \implies \frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \xRightarrow{(1)} y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) \xRightarrow{(2)}$$

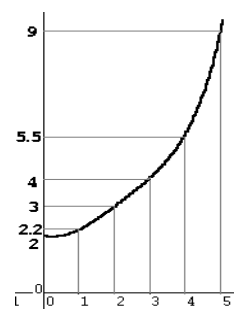
$$y' = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

(1) Despejando y' .

(2) Sustituyendo $y = x^{\cos x}$

Las aplicaciones de las derivadas se estudian en segundo de bachillerato.

1. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la población P (en millares) en un nuevo complejo industrial respecto del tiempo t (en años). Hallar la tasa de variación de la población durante los periodos siguientes:



- (a) $t = 0$ a $t = 5$ (d) $t = 2$ a $t = 3$
 (b) $t = 2$ a $t = 5$
 (c) $t = 2$ a $t = 4$ (e) $t = 4$ a $t = 5$

2. Razonar el signo de la derivada, si existe, y el valor cuando sea posible de las funciones que tienen como gráficas:

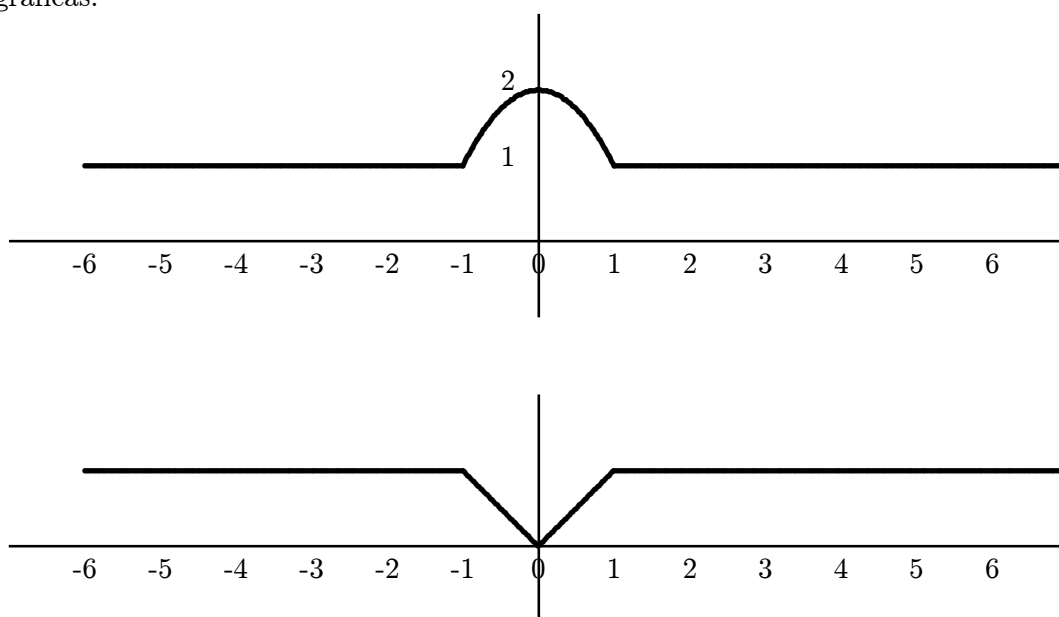


Figura 11.2: Ejercicio:2

3. Calcular, aplicando la definición, las derivadas de las funciones en los puntos indicados.

(a) $f(x) = 3x - 2$ en $x_0 = 1$

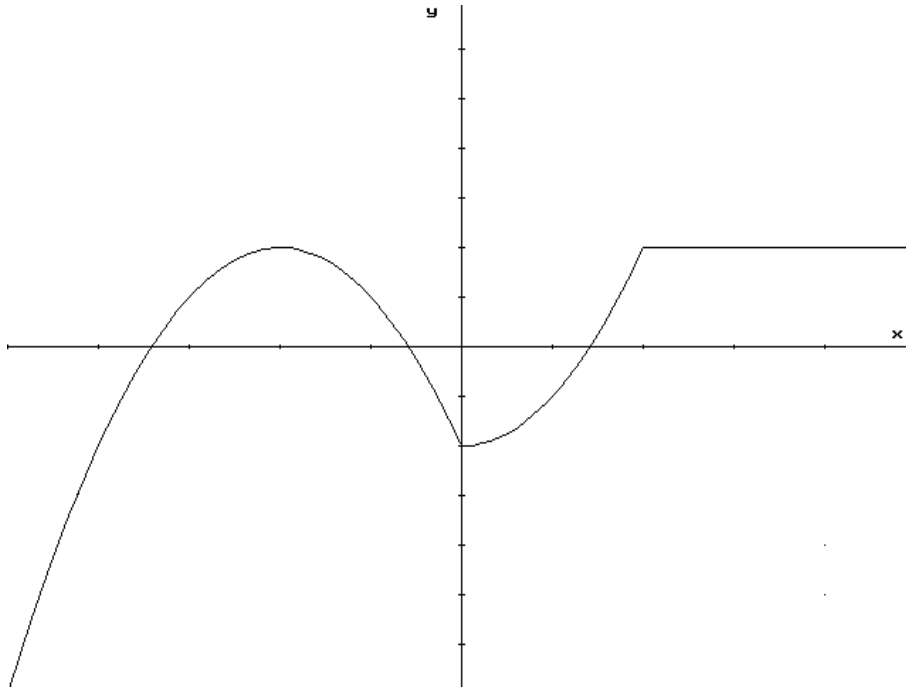
(c) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ en $x_0 = 0$

(b) $f(x) = x^2 + 1$ en $x_0 = -2$

(d) $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$ en $x_0 = \sqrt{2}$

4. Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de las funciones del ejercicio (3) en el punto dado.

5. Sea $f(x)$ la función cuya gráfica es:



Aplicando la interpretación geométrica de la derivada de una función:

(a) ¿En qué intervalos $f'(x) > 0$?

(c) Hallar $f'(0^+)$

(b) ¿En qué puntos $f'(x) = 0$?

(d) ¿En qué puntos la función **no es derivable**?

6. Calcular, aplicando la definición, las derivadas de las funciones:

(a) $f(x) = 3x - 1$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = 5x^2 + 3$

(d) $f(x) = +\sqrt{x}$

7. Determinar el valor de k para que se verifique la condición dada:

(a) $f'(1) = 5$ si $f(x) = x^2 + kx$

(c) $f'(1) = 1$ si $f(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 + k}$

(b) $f'(2) = -2$ si $f(x) = \frac{x+k}{x-k}$

(d) $f'(2) = 0$ si $f(x) = x^3 - kx^2 + 1$

8. Consideremos la función $f(x) = \frac{2x+k}{x}$, aplicando la definición de derivada de una función en un punto, hallar el valor de k si $f'(1) = -2$.

9. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + k}{3x + 2}$, hallar, aplicando la definición de derivada, el valor de k sabiendo que $f'(-1) = 3$.

10. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$(a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$(d) f(x) = |2x+1| \quad \text{en } x = -\frac{1}{2}$$

$$(e) f(x) = |x| + 3 \quad \text{en } x = 0.$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

11. Dadas las funciones f y g tal que $f(1) = 3$ y $g(1) = 0$ y $f'(1) = -2$ y $g'(1) = 3$, calcular si es posible:

$$(a) (f+g)'(1)$$

$$(d) \left(\frac{f}{g}\right)'(1)$$

$$(b) (g-f)'(1)$$

$$(e) \left(\frac{g}{f}\right)'(1)$$

$$(c) (f \cdot g)(1)$$

12. Dadas las funciones f y g tal que $f(3) = 2$ y $g(3) = 3$ y $f'(3) = -1$ y $g'(3) = -4$, calcular si es posible:

$$(a) (f+g)'(3)$$

$$(c) \left(\frac{f}{g}\right)'(3)$$

$$(b) (f \cdot g)(3)$$

$$(d) (f \circ g)'(3)$$

13. Si $f(2) = 4$, $f'(4) = 6$ y $f'(2) = -2$, hallar:

$$(a) \frac{d}{dx} (f(x))^3 \quad \text{en } x = 2$$

$$(b) \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{f(x)} \right) \quad \text{en } x = 2$$

$$(c) (f \circ f)'(2)$$

14. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ kx-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(a) Hallar el valor de k sabiendo que la función es derivable en $x = 0$.

(b) Hallar la derivada de la función en todo su dominio.

15. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las gráficas de las funciones en los puntos indicados:

$$(a) y = x^3 \quad \text{en } x_0 = 2$$

$$(d) y = \frac{1}{x} \quad \text{en } (-1, -1)$$

$$(b) y = x^2 + x \quad \text{en } (0, 0)$$

$$(e) y = 2x^5 + 4 \quad \text{en } (-1, 2)$$

$$(c) y = x^2 - 6x + 8 \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$(f) y = 2x^6 - 3x + 8 \quad \text{en } (0, 8)$$

16. Hallar los puntos de las curvas en los que la tangente es paralela al eje de abscisas:

(a) $y = x^3 - 2x$

(c) $y = x^3 - 12x$

(b) $y = 2x^3 - 4x$

(d) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1$

17. Encontrar los puntos de la curva $y = x^3 - 4x^2$ en que la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

18. Definir, **la función derivada**, de las funciones:

(a) $f(x) = x \cdot |x|$

(b) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Aplicando la regla de la derivada de una suma y de una potencia, calcular las derivadas de las funciones:

1. $f(x) = 4x^3$

9. $f(x) = (2x - 3)^2$

2. $f(x) = 6 - 3x^2$

10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

3. $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$

11. $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}}$

4. $f(x) = \sqrt{x}(x^4 - 3x^2 - 5x + 1)$

12. $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 3)$

5. $f(x) = \frac{x}{5}$

13. $f(x) = 3^x - 5^x$

6. $f(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \pi$

14. $f(x) = 7^x + e^x - \ln x$

7. $f(x) = 8x^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt[3]{x}$

15. $f(x) = \log_2 x + \ln x$

8. $f(x) = 6x - \frac{1}{x}$

16. $f(x) = \sin x - \cos x$

Aplicando la regla de la derivada del producto, y del cociente, hallar las derivadas de las funciones:

1. $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 4)$

11. $f(x) = \frac{2x(3x - 2)}{5x - 2}$

2. $f(x) = (5x^2 - 7) \cdot (4x^3 - 2)$

12. $f(x) = \frac{(2x^2 - 3) \cdot (5x - 1)}{1 - x^2}$

3. $f(x) = (3 - 5x) \cdot (8x^2 - 5x + 3)$

13. $f(x) = \frac{(5x^2 - 3x + 1) \cdot (2x - x^2)}{3 + \sqrt{x}}$

4. $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) \cdot \left(3x^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right)$

14. $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{5x - \sqrt{x}}$

5. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{x}\right) \cdot \left(3x^{-\frac{1}{3}}\right)$

15. $f(x) = e^x \cdot \ln x$

6. $f(x) = x^{-3} \cdot (2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)$

16. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

7. $f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}$

17. $f(x) = (x - 1) \cdot \ln x$

8. $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{2x + 3}$

18. $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot e^x$

9. $f(x) = \frac{5x^2 - 3}{\sqrt{x} - 3}$

19. $f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$

10. $f(x) = \frac{3}{2 - x}$

20. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \arctan x$

21. $f(x) = (3x - 1) \cdot \arccos x$

- Suponer que un incendio se propaga por una montaña según el modelo matemático: $s(t) = 2t + \frac{t^2}{2}$ donde $s(t)$ representa la distancia que ha recorrido el fuego en el tiempo t desde el punto en el que se inicia. Calcular $\frac{ds}{dt}$ e interpretar su significado. Evaluar $\frac{ds}{dt}$ en $t = 2$.
- Un avión viaja de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria cuya ecuación es $f(x) = 3x^2 + 4$. En el punto $P(-1, 7)$ dispara un proyectil el cual viaja en la dirección de la recta tangente en P . ¿Daré el proyectil blanco en un blanco localizado en el punto $T(4, 0)$? **Razonar.**

Regla de la cadena

- Dadas las funciones $f(x)$ descomponerlas en dos funciones g $f(x)$ h tales que $f(x) = (h \circ g)(x)$. Hallar la derivada de la función f aplicando la regla de la cadena.

(a) $f(x) = (x^2 - 1)^{1998}$

(e) $f(x) = \ln(\cos x)$

(b) $f(x) = +\sqrt{2 - x^3}$

(f) $f(x) = \arctan(e^x + 1)$

(c) $f(x) = \sin^2 x$

(g) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \sin x^2$

(h) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

Derivada logarítmica

1. $f(x) = x^x$

4. $f(x) = \sqrt{x+3}$

2. $f(x) = (\cos x)^x$

5. $f(x) = (2x - 1)^{\ln x}$

3. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

6. $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$

Hallar las derivadas de las funciones:

1. $f(x) = \sqrt{2x - \sin 2x}$

8. $f(x) = 2 \cdot \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$

2. $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

9. $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = x \cdot \ln x - x$

10. $f(x) = e^{\frac{x}{a}} \cdot \cos \frac{x}{a}$

4. $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$, calcular $f'(1)$

11. $f(x) = e^{-x} \cdot (\cos x + \sin x)$

5. $f(x) = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$

12. $f(x) = \ln(e^{-x} + x \cdot e^{-x})$

13. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$, calcular $f'(0)$

6. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \tan \frac{x}{2}$

14. $f(x) = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$

7. $f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$

15. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}$

16. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \tan x + \ln \cos x$

17. $f(x) = \ln(1 + \sec x)$

18. $f(x) = (\sin x)^{2x}$

19. $f(x) = a \cdot \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2+ax}$

20. $f(t) = \ln \frac{2+\tan t}{2-\tan t}$, calcular $f'(\frac{\pi}{2})$

21. $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

22. $f(x) = x - \arctan x$

23. $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

24. $f(x) = \arcsin e^{3x}$

25. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2-5}$

26. $f(x) = 3 \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) - \frac{2}{x+2}$

27. $f(x) = \arctan x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

28. $f(x) = x \cdot \arctan x - \frac{a}{2} \cdot \ln(x^2 + a^2)$

29. $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$

30. $f(x) = \arctan e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$

31. $f(x) = 4 \cdot \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2-4x}$

32. $f(x) = \ln(x - \cos x)$

33. $f(x) = 5 \cdot \tan \frac{x}{5} + \tan \frac{\pi}{8}$

34. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$

35. $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$

36. $f(x) = e^{-x^2} \cdot \ln x$

37. $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$

38. $f(x) = \arctan \frac{x+1}{x-1}$

39. $f(x) = e^{2x+3} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$

40. $f(x) = \frac{2 \cdot \sin^2 x}{\cos 2x}$

41. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{x \cdot \sqrt{3}}{1-x^2}$

42. $f(x) = \frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{x}$

43. $f(x) = \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cot \frac{x}{2}$

44. $f(x) = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$

45. $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \arctan x + \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{x}{1-x^2}$

46. $f(x) = \arcsin \sqrt{\sin x}$

47. $f(x) = x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$

48. $f(x) = \cos \frac{\arcsin x}{2}$

49. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

50. $f(x) = \sin^2 \left(\frac{1-\ln x}{x} \right)$

51. $f(x) = \ln \arctan \frac{1}{1+x}$

52. $f(x) = -\frac{15}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2}$

53. $f(x) = \frac{1}{15}(3 \cos^2 x - 5) \cdot \cos^3 x$

54. $f(x) = \ln(e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x)$

55. $f(x) = (3x^2 - 5)^{x-2}$

56. $f(x) = x \cdot \sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2$

75. $f(x) = \ln \tan \frac{x}{2} - \cot x \cdot \ln(1 + \sin x) - x$

57. $f(x) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

76. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$

58. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x \cdot \sqrt{x + 3}}$

77. $f(x) = 2 \cdot \ln(2x - 3\sqrt{1 - 4x^2}) - 6 \arcsin 2x$

59. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

78. $f(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^4}$

60. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$

79. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$

61. $f(x) = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$

80. $f(x) = \arctan e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}$

62. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

81. $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{x+1}$

63. $f(x) = 10^{x \cdot \tan x}$

82. $f(x) = \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x^3)^5}$

64. $f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$

83. $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)$

65. $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x$

84. $f(x) = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$

66. $f(x) = 2 \ln \frac{x}{x}$

85. $f(x) = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$

67. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \arccos \frac{x}{a}$

86. $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1+x^2} + \arctan x$

68. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

87. $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

69. $f(x) = e^{ax}(a \sin x - \cos x)$

88. $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+1}$

70. $f(x) = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}$

89. $f(x) = e^{1 - \sin^4 \frac{x}{3}}$

71. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}}$

90. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

72. $f(x) = 2 \cdot \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$

91. $f(x) = \sin(\cos 2x)$

73. $f(x) = x - \ln(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$

92. $f(x) = (3x^2 + 1)^{\cos x^2}$

74. $f(x) = e^{\arctan \sqrt{1 + \ln(2x+3)}}$

93. $f(x) = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}$

94. $f(x) = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$

95. $f(x) = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$
96. $f(x) = 3a^2 \arctan \sqrt{\frac{x}{a-x}} - (3a+2x)\sqrt{ax-x^2}$
97. $f(x) = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$
98. $f(x) = \frac{2-x}{\pi} \cos \pi(x+3) + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi(x+3)$
99. $f(x) = 6 \left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x}) + \frac{11}{3} \right)$
100. $f(x) = x\sqrt{(x^2+a^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
101. $f(x) = (x^2 + a^2) \cdot \arctan \frac{x}{a} - ax$ f(x) calcular $f'(a)$
102. $f(x) = e^{-\frac{x}{a}} \cdot \cos \frac{x}{a}$ f(x) **demostrar** que $f(0) + a \cdot f'(0) = 0$.
103. $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ f(x) **demostrar** que $f(\frac{\pi}{4}) - 3 \cdot f'(\frac{\pi}{4}) = 3$.
104. Hallar $\frac{d^3s}{dt^3}$ sabiendo que $s(t) = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2-t^2} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}}$.
105. Dada la función $f(x) = 2 \cdot \sin 2x + \tan x$:
- (a) Hallar la ecuación de la tangente a la función en el punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
 - (b) ¿Existe algún punto en el cuál no existe la derivada de la función? **Razonar la contestación**
106. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ kx-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- (a) Hallar el valor de k sabiendo que la función es derivable en $x = 0$.
 - (b) Hallar la derivada de la función en todo su dominio.
107. Hallar las funciones derivada primera y segunda de:
- (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$
 - (b) $f(x) = x \cdot e^x$
 - (c) $f(x) = \sin^2 x$
 - (d) $f(x) = x - \ln x$

Ejercicios de derivadas con solución

1. $y = \frac{2x-3}{x^2-5x+5}$

2. $y = \frac{2x^3+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$y' = \frac{-2x^2-6x-5}{(x^2-5x+5)^2}$

$$y' = \frac{4x^4 + 6x^2 - x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

$$3. y = e^{x^2+1} \cdot \sin 3x$$

$$y' = e^{x^2+1} \cdot (2x \sin 3x + 3 \cos 3x)$$

$$4. y = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right]$$

$$y' = \sec x$$

$$5. y = \ln \left(e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 2} \right)$$

$$y' = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x + 2}}$$

$$6. y = \arctan \frac{x+a}{1-ax} \text{ donde } a \in \mathbb{R}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$7. y = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y' = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$8. y = \sqrt[x]{x}$$

$$y' = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$9. y = \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$y' = \sec x$$

$$10. y = \frac{1}{2} \cdot \arctan x + \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{x}{(1+x^2) \cdot (1+x)}$$

$$11. y = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) - \frac{\cos x}{2 \cdot \sin^2 x}$$

$$y' = \csc^3 x$$

$$12. y = x^{x^x}$$

$$y' = x^{x^x} \cdot x^{x-1} \cdot (1 + x \cdot \ln x + x \cdot \ln^2 x)$$

$$13. y = \ln \left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right)$$

$$y' = \sec x$$

$$14. y = x^{\ln x}$$

$$y' = x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x^2}{x}$$

$$15. y = (\sin x)^{x^2}$$

$$y' = x^2 \cdot (\sin x)^{x^2-1} \cdot \cos x + (\sin x)^{x^2} \cdot \ln(\sin x) \cdot 2x$$

$$16. y = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} + x^3$$

$$y' = 3x^2$$

$$17. y = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$18. y = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$y' = 8x$$

$$19. y = \ln \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$$

$$y' = \sec 2x$$

$$20. y = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \cdot \ln \left(x + \sqrt{x^2 - m^2} \right)$$

$$y' = \sqrt{x^2 - m^2}$$

$$21. y = \ln \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \frac{a}{b} \cdot \arctan \frac{x-a}{b} \quad \text{si } b \neq 0$$

$$y' = \frac{x}{(x-a)^2 + b^2}$$

$$22. y = \sqrt{2x - \sin 2x}$$

$$y' = \frac{2 \cdot \sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$$

$$23. y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$$

$$y' = \frac{-\sin 2x}{4 \cdot \sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$$

$$24. y = x \cdot \ln x - x$$

$$y' = \ln x$$

$$25. f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}} \text{ y calcular } f'(1)$$

$$f'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$26. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{4a^2 \cdot x}{a^4 - x^4}$$

$$27. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \tan \frac{x}{2}$$

$$y' = -\frac{2 \cdot \cot^2 x}{\sin x}$$

$$28. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$$

$$y' = \frac{2}{x - ax^5}$$

$$29. y = 2 \cdot \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)$$

$$y' = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

$$30. y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot e^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$31. y = e^{\frac{x}{a}} \cdot \cos \frac{x}{a}$$

$$y' = \frac{1}{a} \cdot e^{\frac{x}{a}} \cdot \left(\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a} \right)$$

$$32. y = e^{-x} \cdot (\cos x + \sin x)$$

$$y' = -2 \cdot e^{-x} \cdot \sin x$$

$$33. y = \ln(e^{-x} + x \cdot e^{-x})$$

$$y' = -\frac{x}{x+1}$$

$$34. f(t) = \ln(1 + a^{-2t}) \text{ y calcular } f'(0)$$

$$f'(0) = -\ln a$$

$$35. y = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

$$36. y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}$$

$$y' = \frac{\cot 2x}{1 - \sin 2x}$$

$$37. y = \frac{1}{2} \ln \tan x + \ln \cos x$$

$$y' = \cot 2x$$

$$38. y = \ln(1 + \sec x)$$

$$y' = \frac{\tan x}{1 + \cos x}$$

$$39. y = (\sin x)^{2x}$$

$$y' = 2x \cdot (\sin x)^{2x-1} \cdot \cos x + 2 \cdot (\sin x)^{2x} \cdot \ln \sin x$$

$$40. y = a \cdot \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2 + ax}$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{ax + x^2}}$$

$$41. f(t) = \ln \frac{2 + \tan t}{2 - \tan t} \text{ y calcular } f'(\frac{\pi}{4})$$

$$53. y = \sqrt[3]{3x^2 - 5}$$

$$y' = 6 \cdot (3x^2 - 5)^{\frac{1-x}{x}} - \frac{(3x^2 - 5)^{1/x} \cdot \ln(3x^2 - 5)}{x^2}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{8}{3}$$

$$42. y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

$$y' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$43. y = x - \arctan x$$

$$y' = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$44. y = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

$$y' = 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$45. y = \arcsin e^{3x}$$

$$y' = \frac{3 \cdot e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$$

$$46. y = 3 \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right) - \frac{2}{x+2}$$

$$y' = \frac{7x+20}{x^3+3x^2-4}$$

$$47. y = \arctan x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y' = \frac{2}{1-x^4}$$

$$48. y = x \cdot \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \cdot \ln(x^2 + a^2)$$

$$y' = \arctan \frac{x}{a}$$

$$49. y = e^x \cdot \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$$

$$y' = 2 \cdot e^x \cdot \sqrt{1-e^{2x}}$$

$$50. y = 6 \left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x}) + \frac{11}{3} \right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$

$$51. y = \arctan e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$$

$$y' = \frac{4 \cdot e^{2x}}{1-e^{8x}}$$

$$52. y = 4 \cdot \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}) + \sqrt{x^2-4x}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$$

Tabla de derivadas

Operación	Función derivada	
$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$	La derivada de una suma(diferencia) de funciones es igual a la suma(diferencia) de las derivadas de dichas funciones
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	La derivada de un producto de funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera, sin derivar, por la derivada de la segunda
Caso particular del producto		
$f(x) = k \cdot u(x)$	$f'(x) = k \cdot u'(x)$	La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$	La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador dividido por el cuadrado del denominador
Casos particulares del cociente		
$f(x) = \frac{u(x)}{k}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{k}$	La derivada del cociente entre una función y una constante es igual a la derivada de la función dividida por dicha constante
$f(x) = \frac{k}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{-k \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$	La derivada de una constante dividida por una función es igual a menos la constante por la derivada de la función dividida entre el cuadrado de la función
$f(x) = u(v(x)) = (u \circ v)(x)$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	REGLA DE LA CADENA

Función $f(x)$	Función derivada $f'(x)$	Función $f(x)$	Función derivada $f'(x)$
k	0		
$x^n \quad n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$[u(x)]^n$	$n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a^{u(x)}$	$a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$
e^x	e^x	$e^{u(x)}$	$e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$\log_a u(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)} \cdot \log_a e$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u(x)$	$\cos u(x) \cdot u'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u(x)$	$-\sin u(x) \cdot u'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan u(x)$	$\frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = (1 + \tan^2 u(x)) \cdot u'(x)$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot u(x)$	$\frac{-u'(x)}{\sin^2 u(x)} = -(1 + \cot^2 u(x)) \cdot u'(x)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos u(x)$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$