

Aplicaciones de la derivada de una función

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

3 de septiembre de 2014

Definiciones

Definición (**Entorno simétrico**)

Se define entorno simétrico de centro x_0 y radio r y se denota por $E(a, r)$ al intervalo: $(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} | a - r < x < a + r\}$

Definición (**Entorno simétrico reducido**)

Se define entorno simétrico reducido de centro x_0 y radio r y se denota por $E^*(a, r)$ al intervalo: $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$

Definición (**Creciente**)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **creciente** en $x_0 \in D_f$ si $\exists E^*(x_0, r) \subset D_f$ tal que $\forall x \in E^*$ se verifica:

$$\text{Si } x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0) \text{ y si } x > x_0 \implies f(x_0) \leq f(x)$$

Definición (Estrictamente creciente)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** en $x_0 \in D_f$ si $\exists E^*(x_0, r) \subset D_f$ tal que $\forall x \in E^*$ se verifica:

$$\text{Si } x < x_0 \implies f(x) < f(x_0) \text{ y si } x > x_0 \implies f(x_0) < f(x)$$

Definición (Decreciente)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **decreciente** en $x_0 \in D_f$ si $\exists E^*(x_0, r) \subset D_f$ tal que $\forall x \in E^*$ se verifica:

$$\text{Si } x < x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \text{ y si } x > x_0 \implies f(x_0) \geq f(x)$$

Definición (Estrictamente decreciente)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente decreciente** en $x_0 \in D_f$ si $\exists E^*(x_0, r) \subset D_f$ tal que $\forall x \in E^*$ se verifica:

$$\text{Si } x < x_0 \implies f(x) > f(x_0) \text{ y si } x > x_0 \implies f(x_0) > f(x)$$

Teorema

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La función es

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente} \\ \text{Estrictamente creciente} \\ \text{Decreciente} \\ \text{Estrictamente decreciente} \end{array} \right.$ en $x_0 \in D_f$ si , y sólo si, existe un

entorno $E^*(x_0, r) \subset D_f$ tal que $\forall x \in E^*$ se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

Ejemplo 1

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \frac{x^{\overset{3}{\cancel{2}}}}{\cancel{x}} = \boxed{x^2 > 0}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

La función en $x_0 = 0$, por el teorema es **ESTRICTAMENTE CRECIENTE**.

Ejemplo 1

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \frac{x^{\overset{3}{\cancel{2}}}}{\cancel{x}} = \boxed{x^2 > 0}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

La función en $x_0 = 0$, por el teorema es **ESTRICTAMENTE CRECIENTE**.

Ejemplo 2

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2$ en $x_0 = 0$.

Ejemplo 1

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \frac{x^{\cancel{2}^3}}{\cancel{x}} = \boxed{x^2 > 0}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

La función en $x_0 = 0$, por el teorema es **ESTRICTAMENTE CRECIENTE**.

Ejemplo 2

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2$ en $x_0 = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \boxed{x} \begin{cases} \text{si } x > 0 \implies \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0 \\ \text{si } x < 0 \implies \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 0 \end{cases}$$

Teorema (Teorema 2)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función . Si f es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente} \\ \text{Estrictamente creciente} \\ \text{Decreciente} \\ \text{Estrictamente decreciente} \end{array} \right.$$

en $x_0 \in D_f$ **y f es derivable en x_0** , entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array} \right.$$

Teorema (Teorema 3)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $x_0 \in D_f$. **Si**

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array} \right. \quad \text{entonces la función en } x_0 \text{ es}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{estrictamente creciente} \\ \text{estrictamente decreciente} \end{array} \right.$$

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$.

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$.

Solución

- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y es continua en su dominio (función polinómica).

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$.

Solución

- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y es continua en su dominio (función polinómica).
- La función es derivable y su función derivada es:
 $f'(x) = x^2 - x - 6$ y es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$.

Solución

- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y es continua en su dominio (función polinómica).
- La función es derivable y su función derivada es:
 $f'(x) = x^2 - x - 6$ y es continua en $\mathbb{R}$.
- Ceros de la función derivada:

$$f'(x) = x^2 - x - 6 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{y } f'(x) = (x + 2)(x - 3)$$

- Estudio del signo de la función primera derivada:

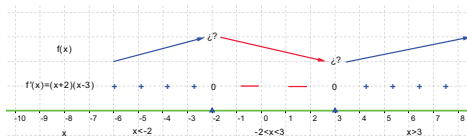
$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$

- Estudio del signo de la función primera derivada:

$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$

- Estudio del signo de la función primera derivada:

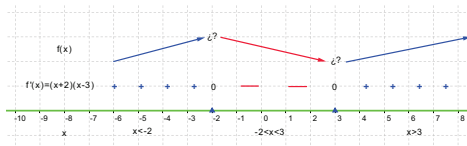
$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$



- Por el teorema 3:

- Estudio del signo de la función primera derivada:

$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$

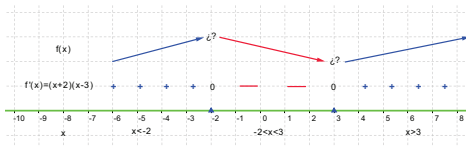


- Por el teorema 3:

- Si $x < -2$ entonces la función es estrictamente creciente.

- Estudio del signo de la función primera derivada:

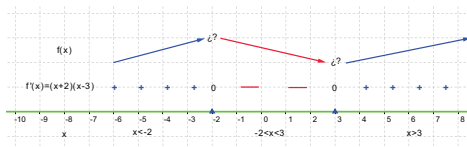
$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$



- Por el teorema 3:
 - Si $x < -2$ entonces la función es estrictamente creciente.
 - Si $-2 < x < 3$ entonces la función es estrictamente decreciente.

- Estudio del signo de la función primera derivada:

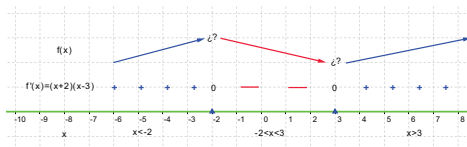
$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$



- Por el teorema 3:
 - Si $x < -2$ entonces la función es estrictamente creciente.
 - Si $-2 < x < 3$ entonces la función es estrictamente decreciente.
 - Si $x > 3$ entonces la función es estrictamente creciente.

- Estudio del signo de la función primera derivada:

$$\begin{cases} \text{Si } x < -2 \implies f'(x) > 0 \\ \text{Si } -2 < x < 3 \implies f'(x) < 0 \\ \text{Si } x > 3 \implies f'(x) > 0 \end{cases}$$



- Por el teorema 3:
 - Si $x < -2$ entonces la función es estrictamente creciente.
 - Si $-2 < x < 3$ entonces la función es estrictamente decreciente.
 - Si $x > 3$ entonces la función es estrictamente creciente.
 - Si $x = -2$ y $x = 3$ NO SE PUEDE AFIRMAR NADA. Hay que realizar un estudio local en los puntos.

Definiciones

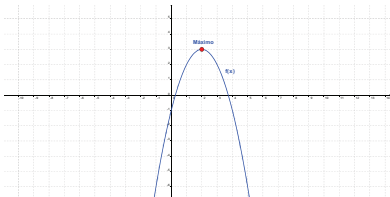
Definición (Máximo absoluto)

La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un **MÁXIMO ABSOLUTO** si $\forall x \in D_f$ se verifica $f(x) \leq f(a)$.

Definición (Mínimo absoluto)

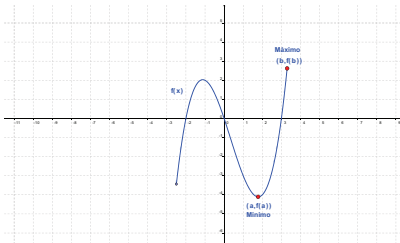
La función $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un **MÍNIMO ABSOLUTO** si $\forall x \in D_f$ se verifica $f(x) \geq f(a)$.

Ejemplos



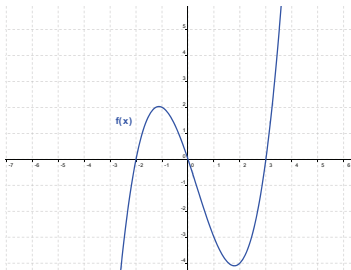
- ❶ La función $f(x)$ alcanza un máximo absoluto en $x = 2$, se cumple $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq f(2) = 3$ y no alcanza mínimo absoluto.

Ejemplos



- 1 La función $f(x)$ alcanza un máximo absoluto en $x = 2$, se cumple
 $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq f(2) = 3$ y no alcanza mínimo absoluto.
- 2 La función $f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en a , se cumple
 $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq f(a)$ y un máximo absoluto en b , se cumple
 $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq f(b)$

Ejemplos



- 1 La función $f(x)$ alcanza un máximo absoluto en $x = 2$, se cumple
 $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq f(2) = 3$ y no alcanza mínimo absoluto.
- 2 La función $f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en a , se cumple
 $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq f(a)$ y un máximo absoluto en b , se cumple
 $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq f(b)$
- 3 La función no tiene extremos absolutos. El recorrido (conjunto imagen) es $\mathbb{R}$.

Definiciones

Definición (Máximo relativo)

La función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un máximo relativo (local) si $\exists E(a, r)$ tal que $\forall x \in E(a, r) \cap D_f$ se cumple que

$$f(a) \geq f(x).$$

Definición (Mínimo relativo)

La función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $a \in D_f$ un mínimo relativo (local) si $\exists E(a, r)$ tal que $\forall x \in E(a, r) \cap D_f$ se cumple que

$$f(a) \leq f(x).$$

NOTA

Todos los extremos absolutos son locales pero **NO todos los**

CANDIDATOS

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = x^3 + 2$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 2$.

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = x^3 + 2$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 2$.
- Sea $h > 0$ infinitesimal:

$$f(0 - h) = (0 - h)^3 + 2 = -h^3 + 2 < 2 = f(0)$$

$$f(0 + h) = (0 + h)^3 + 2 = h^3 + 2 > 2 = f(0)$$

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = x^3 + 2$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 2$.
- Sea $h > 0$ infinitesimal:

$$f(0 - h) = (0 - h)^3 + 2 = -h^3 + 2 < 2 = f(0)$$

$$f(0 + h) = (0 + h)^3 + 2 = h^3 + 2 > 2 = f(0)$$

- En los *alrededores* de $x = 0$, a su izquierda $0 - h$ y a su derecha $0 + h$, NO se cumple ni la definición de máximo local ni la de mínimo local.

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = x^3 + 2$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 2$.
- Sea $h > 0$ infinitesimal:

$$f(0 - h) = (0 - h)^3 + 2 = -h^3 + 2 < 2 = f(0)$$

$$f(0 + h) = (0 + h)^3 + 2 = h^3 + 2 > 2 = f(0)$$

- En los *alrededores* de $x = 0$, a su izquierda $0 - h$ y a su derecha $0 + h$, NO se cumple ni la definición de máximo local ni la de mínimo local.
- La función **NO POSEE EXTREMO LOCAL** en el punto $(0, 2)$.

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = -x^2 + 3$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 3$.

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = -x^2 + 3$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 3$.
- Sea $h > 0$ infinitesimal:

$$f(0 - h) = -(0 - h)^2 + 3 = -h^2 + 3 < 3 = f(0)$$

$$f(0 + h) = -(0 + h)^2 + 2 = -h^2 + 3 < 3 = f(0)$$

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = -x^2 + 3$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 3$.
- Sea $h > 0$ infinitesimal:

$$f(0 - h) = -(0 - h)^2 + 3 = -h^2 + 3 < 3 = f(0)$$

$$f(0 + h) = -(0 + h)^2 + 2 = -h^2 + 3 < 3 = f(0)$$

- En los *alrededores* de $x = 0$, a su izquierda $0 - h$ y a su derecha $0 + h$, **SÍ se cumple la definición de máximo local.**

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = -x^2 + 3$, razonar si la función en $x = 0$ alcanza extremo local.

- La imagen es: $f(0) = 3$.
- Sea $h > 0$ infinitesimal:

$$f(0 - h) = -(0 - h)^2 + 3 = -h^2 + 3 < 3 = f(0)$$

$$f(0 + h) = -(0 + h)^2 + 2 = -h^2 + 3 < 3 = f(0)$$

- En los *alrededores* de $x = 0$, a su izquierda $0 - h$ y a su derecha $0 + h$, SÍ se cumple la definición de máximo local.
- La función **ALCANZA MÁXIMO LOCAL** en el punto $(0, 3)$.

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

❶ En $x = -10$ la función alcanza un

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-5 - h) > f(-5)$ y $f(-5 + h) > f(-5)$.

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-5 - h) > f(-5)$ y $f(-5 + h) > f(-5)$.
- 4 En $x = -2$ la función alcanza un

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-5 - h) > f(-5)$ y $f(-5 + h) > f(-5)$.
- 4 En $x = -2$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-2 - h) < f(-2)$ y $f(-2 + h) < f(-2)$.

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-5 - h) > f(-5)$ y $f(-5 + h) > f(-5)$.
- 4 En $x = -2$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-2 - h) < f(-2)$ y $f(-2 + h) < f(-2)$.
- 5 En $x = 2$ la función

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-5 - h) > f(-5)$ y $f(-5 + h) > f(-5)$.
- 4 En $x = -2$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-2 - h) < f(-2)$ y $f(-2 + h) < f(-2)$.
- 5 En $x = 2$ la función
NO alcanza EXTREMOS LOCALES: $f(2 - h) > f(-2)$ y
 $f(2 + h) < f(2)$.

Ejemplo 3

Sea la función de dominio $D_f = [-10, +\infty)$ cuya gráfica es:

► Gráfica de $f(x)$

- 1 En $x = -10$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-10 + h) > f(-10) = -1$.
- 2 En $x = -8$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-8 - h) < f(-8)$ y $f(-8 + h) < f(-8)$.
- 3 En $x = -5$ la función alcanza un
MÍNIMO LOCAL: $f(-5 - h) > f(-5)$ y $f(-5 + h) > f(-5)$.
- 4 En $x = -2$ la función alcanza un
MÁXIMO LOCAL: $f(-2 - h) < f(-2)$ y $f(-2 + h) < f(-2)$.
- 5 En $x = 2$ la función
NO alcanza EXTREMOS LOCALES: $f(2 - h) > f(-2)$ y
 $f(2 + h) < f(2)$.
- 6 La función en su dominio NO TIENE EXTREMOS
ABSOLUTOS. ¿Por qué?

Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto crítico)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un extremo local en x_0 entonces su derivada es nula, $f'(x_0) = 0$.

Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto crítico)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un extremo local en x_0 entonces su derivada es nula, $f'(x_0) = 0$.

Interpretación del teorema

- Si la función es derivable en un punto y la derivada es cero, recta tangente paralela al eje de abscisas, dicho punto es **CANDIDATO** a extremo local.

Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto crítico)

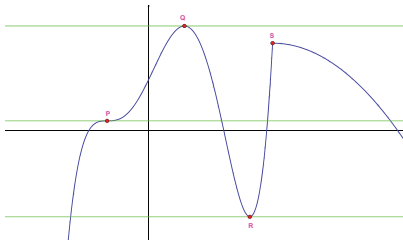
Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un extremo local en x_0 entonces su derivada es nula, $f'(x_0) = 0$.

Interpretación del teorema

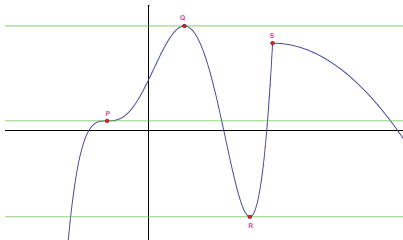
- Si la función es derivable en un punto y la derivada es cero, recta tangente paralela al eje de abscisas, dicho punto es **CANDIDATO** a extremo local.
- El recíproco del teorema, en general, **NO ES CIERTO**. La función $f(x) = x^3$ su derivada en 0 es $f'(0) = 0$ y la función no alcanza extremo local.

Ejemplo

- En el punto P la derivada es cero (tangente horizontal) y la función no alcanza extremo local.

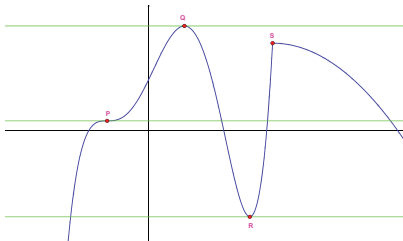


Ejemplo



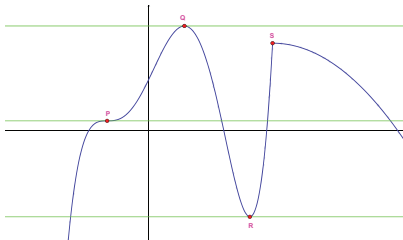
- En el punto P la derivada es cero (tangente horizontal) y la función no alcanza extremo local.
- En el punto Q la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (máximo relativo).

Ejemplo



- En el punto P la derivada es cero (tangente horizontal) y la función no alcanza extremo local.
- En el punto Q la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (máximo relativo).
- En el punto R la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (mínimo relativo).

Ejemplo



- En el punto P la derivada es cero (tangente horizontal) y la función no alcanza extremo local.
- En el punto Q la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (máximo relativo).
- En el punto R la derivada es cero (tangente horizontal) y la función alcanza extremo local (mínimo relativo).
- En el punto S la función **NO** es derivable y la función **alcanza extremo local**.

Teorema (Condición suficiente de punto crítico. Criterio de la primera derivada)

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

- 1 f es continua en D_f y $f'(x_0) = 0$.

Teorema (Condición suficiente de punto crítico. Criterio de la primera derivada)

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

- ① f es continua en D_f y $f'(x_0) = 0$.
- ② f es derivable en un entorno del punto x_0 (por su izquierda y derecha).

Teorema (Condición suficiente de punto crítico. Criterio de la primera derivada)

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

- ① f es continua en D_f y $f'(x_0) = 0$.
- ② f es derivable en un entorno del punto x_0 (por su izquierda y derecha).

entonces si $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0 - h) < 0 \text{ y } f'(x_0 + h) > 0 \\ f'(x_0 - h) > 0 \text{ y } f'(x_0 + h) < 0 \end{array} \right\}$ la función
alcanza en $x = x_0$ un $\left\{ \begin{array}{l} \text{MÍNIMO} \\ \text{MÁXIMO} \end{array} \right\}$ RELATIVO O LOCAL.

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- 1 Hallar el dominio máximo de la función, D_f .

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- 1 Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- 2 Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- 1 Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- 2 Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- 3 **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- 1 Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- 2 Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- 3 **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**
 - Los ceros de la función derivada $f'(x) = 0$, condición necesaria si la función es derivable.

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- ① Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- ② Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- ③ **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**
 - Los ceros de la función derivada $f'(x) = 0$, condición necesaria si la función es derivable.
 - Los valores del dominio D_f que NO PERTENEZCAN al dominio de $D_{f'}$.

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- ① Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- ② Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- ③ **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**
 - Los ceros de la función derivada $f'(x) = 0$, condición necesaria si la función es derivable.
 - Los valores del dominio D_f que NO PERTENEZCAN al dominio de $D_{f'}$.
- ④ Estudiar el **SIGNO DE LA PRIMERA DERIVADA** en los alrededores de los candidatos con $f'(x) = 0$ (monotonía de la función).

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- ❶ Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- ❷ Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- ❸ **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**
 - Los ceros de la función derivada $f'(x) = 0$, condición necesaria si la función es derivable.
 - Los valores del dominio D_f que NO PERTENEZCAN al dominio de $D_{f'}$.
- ❹ Estudiar el **SIGNO DE LA PRIMERA DERIVADA** en los alrededores de los candidatos con $f'(x) = 0$ (monotonía de la función).
- ❺ **RAZONAR** si son extremos locales aplicando la condición suficiente del cambio de signo de la primera derivada.

Pautas a seguir en los ejercicios de extremos locales

- ❶ Hallar el dominio máximo de la función, D_f .
- ❷ Calcular la primera derivada de la función, f' y su dominio $D_{f'} \subseteq D_f$.
- ❸ **CANDIDATOS a EXTREMOS LOCALES (PUNTOS CRÍTICOS):**
 - Los ceros de la función derivada $f'(x) = 0$, condición necesaria si la función es derivable.
 - Los valores del dominio D_f que NO PERTENEZCAN al dominio de $D_{f'}$.
- ❹ Estudiar el **SIGNO DE LA PRIMERA DERIVADA** en los alrededores de los candidatos con $f'(x) = 0$ (monotonía de la función).
- ❺ RAZONAR si son extremos locales aplicando la condición suficiente del cambio de signo de la primera derivada.
- ❻ Si el punto NO es derivable, realizar un estudio local de la función en el punto.

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.
- Puntos críticos: $f'(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$. Las raíces se hallan aplicando Ruffini y son $x = -1$ (doble), $x = -3$ y $x = 3$. La descomposición factorial de la función derivada es $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$.

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.
- Puntos críticos: $f'(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$. Las raíces se hallan aplicando Ruffini y son $x = -1$ (doble), $x = -3$ y $x = 3$. La descomposición factorial de la función derivada es $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$.
- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.
- Puntos críticos: $f'(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$. Las raíces se hallan aplicando Ruffini y son $x = -1$ (doble), $x = -3$ y $x = 3$. La descomposición factorial de la función derivada es $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$.
- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.
- Puntos críticos: $f'(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$. Las raíces se hallan aplicando Ruffini y son $x = -1$ (doble), $x = -3$ y $x = 3$. La descomposición factorial de la función derivada es $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$.
- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):



Conclusiones:

- La función en $(-3, f(-3))$ alcanza un **MÁXIMO LOCAL**.

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.
- Puntos críticos: $f'(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$. Las raíces se hallan aplicando Ruffini y son $x = -1$ (doble), $x = -3$ y $x = 3$. La descomposición factorial de la función derivada es $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$.
- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):



Conclusiones:

- La función en $(-3, f(-3))$ alcanza un **MÁXIMO LOCAL**.
- La función en $x = -1$, **No alcanza extremos local, es estrictamente decreciente.**

Estudiar los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 9x^2 - 9x$$

- La función es polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y derivable, con derivada continua, en $\mathbb{R}$.
- Puntos críticos: $f'(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$. Las raíces se hallan aplicando Ruffini y son $x = -1$ (doble), $x = -3$ y $x = 3$. La descomposición factorial de la función derivada es $f'(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$.
- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):



Conclusiones:

- La función en $(-3, f(-3))$ alcanza un **MÁXIMO LOCAL**.
- La función en $x = -1$, No alcanza extremos local, es estrictamente decreciente.

Estudiar los extremos locales de la función: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$

- La función es cociente de polinomios su dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua y derivable, con derivada continua, en D_f .

Estudiar los extremos locales de la función: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$

- La función es cociente de polinomios su dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua y derivable, con derivada continua, en D_f .

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^4} = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad y$$

$$f'(x) = -\frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x^4}.$$

Estudiar los extremos locales de la función: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$

- La función es cociente de polinomios su dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua y derivable, con derivada continua, en D_f .

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^4} = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad y$$

$$f'(x) = -\frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x^4}.$$

- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):

Estudiar los extremos locales de la función: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$

- La función es cociente de polinomios su dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua y derivable, con derivada continua, en D_f .

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^4} = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad y$$

$$f'(x) = -\frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x^4}.$$

- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):

Estudiar los extremos locales de la función: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$

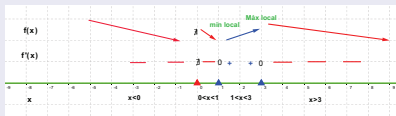
- La función es cociente de polinomios su dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua y derivable, con derivada continua, en D_f .

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^4} = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad y$$

$$f'(x) = -\frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x^4}.$$

- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):



Conclusiones:

- La función en $(1, f(1)) = (1, 0)$ alcanza un **MÍNIMO LOCAL**.

Estudiar los extremos locales de la función: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3}$

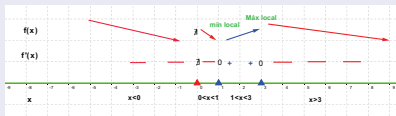
- La función es cociente de polinomios su dominio es $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es continua y derivable, con derivada continua, en D_f .

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^4} = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad y$$

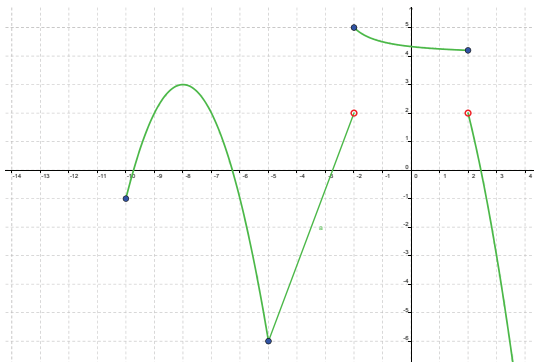
$$f'(x) = -\frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x^4}.$$

- Estudio del signo de la función $f'(x)$ (condición suficiente):



Conclusiones:

- La función en $(1, f(1)) = (1, 0)$ alcanza un MÍNIMO LOCAL.
- La función en $(3, f(3)) = (3, 0)$ alcanza un MÁXIMO LOCAL.



◀ Regresar al ejercicio