

1.1. Definiciones

Definición 1.1 Una matriz $m \times n$ sobre un cuerpo K , es un cuadro de elementos de K , formado por m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \text{ siendo } \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

Una matriz $1 \times n$ recibe el nombre de matriz fila: $A = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})$.

Una matriz $m \times 1$ recibe el nombre de matriz columna: $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Una matriz $n \times n$ es una **matriz cuadrada**.

Notación

Al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ sobre un cuerpo K , las designaremos por $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Si las matrices son cuadradas: $\mathcal{M}_n(K)$

Definición 1.2 La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{ii}

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \searrow & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Definición 1.3 La diagonal secundaria de una matriz cuadrada de orden n está formada por los elementos a_{ij} tal que $i + j = n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & \cdots & \boxed{a_{2n-1}} & a_{2n} \\ \vdots & \swarrow & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{n1}} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.4 Una matriz cuadrada es **triangular superior** si todos sus elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

Definición 1.5 Una matriz cuadrada es **triangular inferior** si todos sus elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

Definición 1.6 Una matriz cuadrada es **diagonal** si todos sus elementos son nulos excepto los de la diagonal principal.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Definición 1.7 Llamamos **matriz unidad** de orden n a una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal igual a 1. Se suele denotar por I_n

Ejemplo

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.8 Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$.

1.2. Operaciones con Matrices

1.2.1. Suma de Matrices

Definición 1.9 Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ se llama suma de A más B y se escribe $A + B$ a la matriz de orden $m \times n$ tal que su elemento (i, j) es igual a $a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$

Ejercicios

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.1 El conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con la operación $+$ tiene estructura de grupo abeliano.

En efecto:

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento neutro. La matriz nula: $A + 0 = 0 + A = A$ siendo la matriz nula:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

- Elemento opuesto. La matriz opuesta: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

$$(-A) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} = (-a_{ij})$$

- Conmutativa: $A + B = B + A$

Las demostraciones de las propiedades se basa en que los elementos a_{ij} pertenecen al cuerpo K .

1.2.2. Producto de una matriz por un escalar

Definición 1.10 Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y $\lambda \in K$, se llama producto de la matriz A por el escalar λ , y se escribe λA , a la matriz de orden $m \times n$ tal que su elemento (i, j) es igual a $\lambda \cdot a_{ij}$.

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Teorema 1.2 El producto de un escalar por una matriz verifica las siguientes propiedades:

- Distributiva respecto de la suma de matrices: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$
- Asociativa: $(\lambda \cdot \mu) A = \lambda(\mu A)$
- Elemento unidad: $1 \cdot A = A$

Las demostraciones de las propiedades se basa en que los elementos a_{ij} pertenecen al cuerpo K .

Teorema 1.3 El conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con la operación interna $+$ la externa producto por un escalar $\cdot$ tiene estructura de K -espacio vectorial.

La demostración es trivial teniendo en cuenta las propiedades anteriores y la definición de espacio vectorial.

1.2.3. Producto de matrices

Definición 1.11 Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times p}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p \times n}(K)$, se llama producto de la matriz A por la matriz B a la matriz $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^p a_{i\alpha} \cdot b_{\alpha j} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^p a_{1\alpha} \cdot b_{\alpha 1} & \sum_{\alpha=1}^p a_{1\alpha} \cdot b_{\alpha 2} & \cdots & \cdots & \sum_{\alpha=1}^p a_{1\alpha} \cdot b_{\alpha n} \\ \sum_{\alpha=1}^p a_{2\alpha} \cdot b_{\alpha 1} & \sum_{\alpha=1}^p a_{2\alpha} \cdot b_{\alpha 2} & \cdots & \cdots & \sum_{\alpha=1}^p a_{2\alpha} \cdot b_{\alpha n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{\alpha=1}^p a_{m\alpha} \cdot b_{\alpha 1} & \sum_{\alpha=1}^p a_{m\alpha} \cdot b_{\alpha 2} & \cdots & \cdots & \sum_{\alpha=1}^p a_{m\alpha} \cdot b_{\alpha n} \end{pmatrix}$$

Ejercicios

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para multiplicar dos matrices es que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.

En el ejemplo anterior el producto $A \cdot B$ se puede efectuar, en cambio no se puede multiplicar la matriz B por la matriz A .

Teorema 1.4 *El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:*

- Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ y $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Producto por un escalar: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$
- Elemento unidad:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \quad A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$$

Donde I_n e I_m son, respectivamente, las matrices unidades de orden n y m .

- En general **no** es conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Proposición 1.1 *Si $A \cdot B = 0$ no implica necesariamente que $A = 0$ ó $B = 0$.*

En efecto si tomamos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.2 *Si $A \cdot B = A \cdot C$ no implica necesariamente que $B = C$.*

En efecto si tomamos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y efectuamos los productos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y efectivamente las matrices B y C son distintas.

1.2.4. Casos particulares

1. Producto de una matriz fila por una matriz columna:

$$A \in \mathcal{M}_{1 \times n}(K) \quad B \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K) \quad \text{entonces} \quad A \cdot B \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(K)$$

es decir un elemento del cuerpo K

2. El producto de una matriz fila de orden $1 \times m$ por una matriz de orden $m \times n$ es una matriz fila de orden $1 \times n$.
3. El producto de una matriz de orden $m \times n$ por una matriz columna de orden $n \times 1$ es una matriz columna de orden $m \times 1$.

1.3. Matriz transpuesta

Definición 1.12 Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, llamamos transpuesta de la matriz y la denotaremos por A' o A^t , a la matriz de orden $n \times m$ tal que su elemento (j, i) es el elemento (i, j) de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.3.1. Propiedades y definiciones

Teorema 1.5 Las propiedades de las matrices transpuestas son:

1. La transpuesta de la transpuesta es igual a la matriz: $(A^t)^t = A$.
2. La transpuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las transpuestas:
 $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. La transpuesta del producto de un escalar por una matriz es igual al escalar por la transpuesta de la matriz: $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$
4. La transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de la transpuesta de la segunda matriz por la transpuesta de la primera: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Las demostraciones de las tres primeras propiedades son evidentes.

Demostremos la cuarta propiedad:

Sea d_{ji} el elemento ji de la matriz $B^t \cdot A^t$ por definición de producto de matrices $d_{ji} = (\text{fila } j \text{ de } B^t) \cdot (\text{columna } i \text{ de } A^t) = (\text{columna } j \text{ de } B) \cdot (\text{fila } i \text{ de } A) = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B) = \text{elemento } (ij) \text{ de } A \cdot B = \text{elemento } (ji) \text{ de } (A \cdot B)^t$ por lo tanto $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Definición 1.13 Una matriz cuadrada diremos que es simétrica si coincide con su transpuesta: $A = A^t$

Definición 1.14 Una matriz cuadrada diremos que es antisimétrica o hemisimétrica si su transpuesta es igual a su opuesta $A^t = -A$

La condición necesaria, no suficiente, para que una matriz cuadrada sea antisimétrica es que los elementos de la diagonal principal deben ser todos nulos. En efecto si A es antisimétrica:

$$a_{ii} = -a_{ii} \implies a_{ii} + a_{ii} = 0 \implies 2 \cdot a_{ii} = 0 \implies a_{ii} = 0$$

por ser un elemento del cuerpo K .

Definición 1.15 Una matriz A cuadrada de orden n diremos que tiene inversa si existe una matriz B cuadrada del mismo orden tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. La matriz B se escribe A^{-1} .

Ejercicios

Calcular la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Definición 1.16 Una matriz A cuadrada de orden n es ortogonal si el producto por su transpuesta es igual a la matriz unidad: $A \cdot A^t = I_n$

Ejercicios

Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.