

En esta unidad trataremos los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Los métodos serán variados y veremos como la teoría de matrices nos será de utilidad para buscar soluciones y las condiciones en que éstas existen.

3.1. Definiciones

Definición 3.1 Una expresión de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ donde las x_i representan variables y las a_i y b son números dados (elementos de un cuerpo conmutativo K , generalmente $\mathbb{R}$) constituye una ecuación algebraica de primer grado en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, o bien simplemente una **ecuación lineal con n incógnitas**.

- Las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ se denominan **incógnitas** de la ecuación.
- Los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman **coeficientes** de la ecuación.
- b recibe el nombre de **término independiente** de la ecuación.
- Si $b = 0$, la ecuación se denomina **homogénea**.

Definición 3.2 Llamaremos **solución** de la ecuación a una n -tupla de valores de K $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, que al ser sustituidos por las incógnitas en la ecuación satisfacen a la misma, es decir que: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b$

Ejercicios

Dada la ecuación $2x - 3y + 5z = 2$, comprobar si las ternas: $(1, 2, -3)$ y $(12, 4, -2)$ son solución de la ecuación:

- Sustituyendo en la ecuación: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 2 - 6 - 15 = -19$ y $-19 \neq 2$, por lo tanto, la terna $(1, 2, -3)$ **no** es solución.
- Sustituyendo en la ecuación: $2 \cdot 12 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) = 24 - 12 - 10 = 2$ y $2 = 2$, por lo tanto, la terna $(12, 4, -2)$ **sí** es solución.

Definición 3.3 Dos ecuaciones con el mismo número de incógnitas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Definición 3.4 Se denomina **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de m ecuaciones con las mismas n incógnitas y coeficientes en K .

[illegible]

escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff A \cdot X = B \quad (3.2)$$

Definición 3.5 Llamaremos **solución** del sistema (3.1) a toda n -tupla valores de K $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que al sustituirlas en las m -ecuaciones las convierte en m -identidades.

Definición 3.6 *Un sistema que tiene solución se denomina compatible.*

- Un sistema con solución única recibe el nombre de **compatible determinado**.
- Un sistema con varias soluciones recibe el nombre **compatible indeterminado**.

Definición 3.7 *Un sistema que no tiene solución se denomina incompatible.*

3.2. Sistemas equivalentes

Definición 3.8 Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Teorema 3.1 Si multiplicamos (o dividimos) una ecuación por un número real **distinto de cero**, obtenemos un sistema equivalente al dado.

Teorema 3.2 *Si se sustituye una ecuación por ella misma más una c.l. de las restantes ecuaciones, el sistema que se obtiene es equivalente al dado.*

Teorema 3.3 *Si una ecuación es c.l. de otras ecuaciones del sistema, el sistema que resulta de suprimir esa ecuación es equivalente al dado.*

La aplicación de los teoremas anteriores permite transformar un sistema de ecuaciones en otro, generalmente más sencillo, equivalente. La resolución de sistemas de ecuaciones por el método de reducción consiste en aplicar los teoremas anteriores.

3.3. Sistemas de Cramer

Definición 3.9 Se dice que un sistema 3.1 es un **sistema de Cramer** si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y $\det(A) \neq 0$.

Teorema 3.4 *La solución de un sistema de Cramer*

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \iff A \cdot X = B$$

 es

$$x_i = \frac{b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + \dots + b_n \cdot A_{ni}}{|A|} \quad \text{con } 1 \leq i \leq n$$

Demostración

Por ser un sistema de Cramer la matriz A es regular, por lo tanto posee inversa. Multiplicando por la izquierda:

$$A \cdot X = B \iff A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \iff I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B \iff X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

multiplicando las matrices e igualando ($1 \leq i \leq n$):

$$x_i = \frac{b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + \cdots + b_n \cdot A_{ni}}{|A|} = \frac{\begin{array}{ccccccc} & & & \text{columna i-ésima} & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array}}{|A|}$$

Para obtener el valor de la incógnita i-ésima (x_i) se calcula el cociente entre el determinante que se obtiene de sustituir la columna i-ésima de la matriz A por la columna de los términos independientes y el determinante de la matriz de los coeficientes. Son las **fórmulas de Cramer**.

Ejercicios

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{rrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 8 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 9 \\ 3x & & & + & 2z & = & 5 \end{array} \right\}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -32$$

El sistema es cuadrado y $\det(A) \neq 0$, por lo tanto de Cramer, aplicando las fórmulas obtenidas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 9 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-32} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-32} = -2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-32} = 1$$

3.4. Sistemas arbitrarios de ecuaciones lineales

Sea el sistema 3.1 de m ecuaciones con n incógnitas.

Este sistema lleva asociadas dos matrices:

- La matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ formada por los coeficientes de las incógnitas que se denomina **matriz de los coeficientes**.
- La matriz $(A|B) = A^*$ de orden $m \times (n + 1)$ que consiste en añadir a la matriz M la columna B formada por los términos independientes y recibe el nombre de **matriz ampliada**.

el determinante D de la matriz de los coeficientes es no nulo, es un sistema de Cramer, tiene solución y única: **sistema compatible determinado**.

2. Si $r < n$ elegimos las r primeras ecuaciones del sistema dejando en el primer miembro r incógnitas:

$$\left. \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots & = & \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{array} \right\}$$

Si damos valores arbitrarios a las incógnitas $x_{r+1}, \dots, x_n$, obtendremos valores para las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_r$, por lo tanto el sistema es compatible pero indeterminado.

El sistema se resuelve por las fórmulas de Cramer y los valores de $x_1, x_2, \dots, x_r$ dependerán de los valores de $x_{r+1}, \dots, x_n$, que reciben el nombre de **parámetros**.

Resumen:

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = r$. **SISTEMA COMPATIBLE**. Como n es el número de incógnitas, entonces:

$$\text{Si } \begin{cases} r = n & \text{Compatible determinado} \\ r < n & \text{Compatible indeterminado, depende de } n - r \text{ parámetros} \end{cases}$$

- $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^*)$. **SISTEMA INCOMPATIBLE**

3.4.2. Sistemas homogéneos

Definición 3.10 Un sistema de m -ecuaciones lineales con n -incógnitas se dice **homogéneo** si todos sus términos independientes son nulos.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Teorema 3.6 Un sistema de ecuaciones homogéneo (??) es siempre compatible.

Demostración

La matriz ampliada de un sistema homogéneo está formada por los elementos de la matriz de los coeficientes y su última columna es de ceros, por lo tanto el rango de la matriz de los coeficientes es siempre igual que el rango de la matriz ampliada. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es siempre compatible.

1. Si el rango coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y su única solución es la **trivial o impropia**: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
2. Si el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de parámetros: **soluciones propias**.
Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ son una solución, también es solución $\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n\}$ con $\lambda \neq 0$.

3.5. Técnicas de solución de sistemas

3.5.1. Método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar el sistema dado en otro de forma triangular equivalente. Para obtener el sistema triangular se aplican las transformaciones elementales ya estudiadas.

- Intercambio de ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- Combinaciones lineales de ecuaciones.

Discusión del sistema

- Si al efectuar transformaciones elementales una de las ecuaciones queda reducida a $\boxed{0 = m}$ con $m \neq 0$ entonces el sistema es **incompatible**.
- Si al efectuar transformaciones elementales una de las ecuaciones queda reducida a $\boxed{0 = 0}$ dicha ecuación se suprime.
 - Si el número de ecuaciones l.i. es igual al número de incógnitas entonces el sistema es **compatible determinado**.
 - Si el número de ecuaciones l.i. es menor al número de incógnitas entonces el sistema es **compatible indeterminado**.

3.5.2. Método de Gauss-Jordan

Es una modificación del anterior que consiste en eliminar cada incógnita no sólo de las ecuaciones posteriores a las que estamos utilizando, sino también de las anteriores (es decir dejar una incógnita por ecuación en el caso de que coincidan).

Trabajando con matrices, se simplifican los cálculos:

Ejercicios

Resolver el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - 4z = 6 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

La solución es $\boxed{x = 1, y = -1, z = -1}$

3.5.3. Cálculo de la matriz inversa

sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ con $\det(A) \neq 0$, aplicando la definición de matriz inversa $\exists B \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Al multiplicar e igualar las matrices resultantes, se plantean n-sistemas de ecuaciones lineales con n-incógnitas, en los cuales la matriz de los coeficientes es A:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \cdots A \cdot \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{nn} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones elementales en los n-sistemas serán iguales, ya que la matriz de los coeficientes es la misma, lo que cambia es la columna de los términos independientes.

La forma práctica de resolverlo es colocar la matriz unidad a continuación de la matriz de los coeficientes y realizar las transformaciones elementales a la vez en las dos matrices, hasta conseguir que la matriz de los coeficientes se convierta en la matriz unidad I_n . La matriz que resulta a su derecha es la inversa de A.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

La matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

La matriz A es cuadrada y su determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -28$$

por lo tanto existe inversa de A.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3/4 & -9/4 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3/4 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 3/4 & -9/4 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3/4 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/28 & 9/28 & 2/7 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/28 & 9/28 & 2/7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3/28 & 19/28 & -2/7 \\ 0 & 2 & 0 & 4/28 & -12/28 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -3/28 & 9/28 & 2/7 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/28 & 7/28 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/28 & -6/28 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -3/28 & 9/28 & 2/7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/14 & -3/14 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -3/28 & 9/28 & 2/7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/14 & -3/14 & 1/7 \\ -3/28 & 9/28 & 2/7 \end{pmatrix}$$

3.5.4. Sistemas con parámetros

Para finalizar el tema resolveremos un problema general de sistemas de ecuaciones.

Ejercicios

Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az &= a+4 \\ (4a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z &= a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z &= a-1 \end{cases}$$

Llamamos A a la matriz de los coeficientes y A^* a la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a+2 & 3 & a & a+4 \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 & a+2 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 & a-1 \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix} = a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = (a-1)(a-2)(a-3)$$

El rango de la matriz A es 3 si su determinante es distinto de cero, por lo tanto igualamos el $\det A = 0$ y las soluciones de la ecuación son: $a = 1$, $a = 2$ y $a = 3$.

Discusión del sistema

1^{er} caso

Para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y coincide con el número de incógnitas, por lo tanto el sistema es **compatible determinado**. La solución la calculamos por las fórmulas de Cramer.

$$x = \frac{2a^2 - 4a - 15}{a^2 - 5a + 6} \quad y = \frac{a + 18}{a^2 - 5a + 6} \quad z = -3 \cdot \frac{a^2 - a - 7}{a^2 - 5a + 6}$$

2^o caso

Si $a = 1$ efectuamos el estudio de los rangos de las matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y es dos, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es **compatible indeterminado** la solución depende de un parámetro:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3^{er} caso

Si $a = 2$ efectuamos el estudio de los rangos de las matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es igual a 2, tiene dos filas linealmente independientes o el orden máximo de sus menores no nulos es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, las tres filas son linealmente independientes.

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es **incompatible**.

4^o caso

Si $a = 3$ efectuamos el estudio de los rangos de las matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 11 & 4 & -5 & 8 \\ 11 & 4 & -5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 11 & 4 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es igual a 2, tiene dos filas linealmente independientes o el orden máximo de sus menores no nulos es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, las tres filas son linealmente independientes.

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es **incompatible**.