

① Discutir y resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = a \end{cases}$ según los valores del parámetro a

El sistema en forma matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, sistema de **tres** ecuaciones con **dos** incógnitas.

La matriz de los coeficientes: $A \in \mathcal{M}(3 \times 2)$ y la matriz ampliada: $A^* \in \mathcal{M}(3 \times 3)$.

La matriz de los coeficientes tiene un menor de orden dos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, por lo tanto el rango es dos: $\text{rang}(A) = 2, \forall a \in \mathbb{R}$.

El rango de matriz ampliada puede ser 2 ó 3. Si el $\det(A^*) \neq 0$ entonces el $\text{rang}(A^*) = 3$ y en caso contrario $\text{rang}(A^*) = 2$ (todo menor de la matriz A es menor de la matriz A^*).

$$\begin{aligned} \det(A^*) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & a-9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -1 & a-9 \end{vmatrix} = \\ &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a-9 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-8 \end{vmatrix} = -5 \cdot (a-8) = 0 \iff \boxed{a=8} \end{aligned}$$

Razonamientos

$$(1) \ f_2 = f_2 + (-2) \cdot f_1 \text{ y } f_3 = f_3 + (-3) \cdot f_1 \qquad (2) \ f_2 = f_2 + 5 \cdot f_1$$

Estudio y discusión:

Caso 1: Si $a \neq 8$ entonces $\left. \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 3 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{T.R.F.}} \text{Sistema incompatible}$

Caso 2: Si $a = 8$ entonces $\left. \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 2 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{T.R.F.}} \text{Sistema compatible. El número de incógnitas, } n = 2, \text{ por lo tanto sistema compatible determinado (solución única).}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

② Discutir y resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + y = 3 \\ x + ay = 4 \end{cases}$ según los valores del parámetro a

El sistema en forma matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, sistema de **tres** ecuaciones con **dos** incógnitas.

La matriz de los coeficientes: $A \in \mathcal{M}(3 \times 2)$ y la matriz ampliada: $A^* \in \mathcal{M}(3 \times 3)$.

La matriz de los coeficientes tiene un menor de orden dos: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, por lo tanto el rango es dos: $\text{rang}(A) = 2, \forall a \in \mathbb{R}$.

El rango de matriz ampliada puede ser 2 ó 3. Si el $\det(A^*) \neq 0$ entonces el $\text{rang}(A^*) = 3$ y en caso contrario $\text{rang}(A^*) = 2$ (todo menor de la matriz A es menor de la matriz A^*).

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a+2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a+2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (a+2) = 4 - a = 0 \iff \boxed{a = 4}$$

Razonamientos

(1) $f_2 = f_2 + (-1) \cdot f_1$ y $f_3 = f_3 + (-1) \cdot f_1$

(2) Desarrollo del determinante por la primera columna

Estudio y discusión

Caso 1: Si $a \neq 4$ entonces $\left. \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 3 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{T.R.F.}} \text{Sistema incompatible}$

Caso 2: Si $a = 4$ entonces $\left. \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 2 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{T.R.F.}} \text{Sistema compatible. El número de incógnitas, } n = 2, \text{ por lo tanto sistema compatible determinado (solución única).}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ Discutir y resolver el sistema } \begin{cases} ax + ay + (a+1)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases} \quad \text{según los valores del parámetro } a$$

El sistema en forma matricial, $A \cdot X = B$, es: $\begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, sistema de **tres** ecuaciones con **tres** incógnitas.

La matriz de los coeficientes: $A \in \mathcal{M}(3 \times 3)$ y la matriz ampliada: $A^* = (A|B) \in \mathcal{M}(3 \times 4) \implies \begin{cases} \text{rang}(A) \leq 3 \\ \text{rang}(A^*) \leq 3 \end{cases}$

El mayor menor que se puede formar de la matriz A es su determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ a & 1 & a-1 \\ a+1 & 1 & 2a+3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 2a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a$$

$$\det(A) = 0 \iff a = 0$$

Razonamientos

(1) $f_2 = f_2 + (-1) \cdot f_1$ y $f_3 = f_3 + (-1) \cdot f_1$

(2) Desarrollo del determinante por la segunda fila

Estudio y discusión del sistema

Caso 1: Si $a \neq 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rang}(A) = 3 \\ \text{rang}(A^*) = 3 \end{array} \right\} \stackrel{T.R.F.}{\implies} \text{S.Compatible} \left. \begin{array}{l} \\ \text{Número de incógnitas: } n = 3 \end{array} \right\} \implies \text{Sistema compatible determinado}$$

El sistema es de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ 1 & a & 2a+3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2a(a-1)}{-2a} \stackrel{(1)}{=} 1-a, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ 1 & 1 & 2a+3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2a^2}{-2a} \stackrel{(1)}{=} a, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{-2a} = 0$$

Razonamientos

(1) Como $a \neq 0$ se simplifica la fracción por el factor a .

Caso 2: Si $a = 0$. Estudio de los rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 2 \end{array} \right\} \stackrel{T.R.F.}{\implies} \text{S.Compatible} \left. \begin{array}{l} \\ \text{Número de incógnitas: } n = 3 \end{array} \right\} \implies \text{Compatible indeterminado.}$$

$$\text{La solución depende de, } 3 - 2 = 1, \text{ parámetro: } \begin{cases} x + 3z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{4} \text{ Discutir y resolver el sistema } \begin{cases} 2x + y + z + t &= 0 \\ kx - 2y + 3z + 4t &= 0 \\ 3x - y - z + 4t &= 0 \\ -2x + 4y - z - 9t &= 0 \end{cases} \text{ según los valores del parámetro } k$$

El sistema en forma matricial, $A \cdot X = 0$, es un **sistema homogéneo** de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Si el $\det(A) \neq 0$ el sistema es compatible determinado y la única solución es la trivial $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ k & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -9 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k+4 & -2 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 0 & 5 \\ -10 & 4 & -5 & -13 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} k+4 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 \\ -10 & -5 & -13 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \\ = -5 \begin{vmatrix} k+4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ k-6 & 0 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} 25 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k-6 & -7 \end{vmatrix} = 25(-7-k+6) = -25(k+1) = 0 \iff \boxed{k = -1}$$

Razonamientos

$$(1) \begin{cases} c_1 = c_1 + (-2)c_2 \\ c_3 = c_3 + (-1)c_2 \\ c_4 = c_4 + (-1)c_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2) \text{ Desarrollo del determinante por la primera fila.} \\ (3) f_3 = f_3 + f_1 \\ (4) \text{ Desarrollo del determinante por la segunda columna.} \end{array}$$

Si $k = -1$

Rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -9 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -9 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 9 \\ 0 & -7 & 8 & 16 \\ 0 & 5 & 0 & -8 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & 16 \\ 0 & 5 & 0 & -8 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 50 & 30 \\ 0 & 0 & -30 & -18 \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonamientos

$$\begin{array}{l} (1) \text{ Intercambiar las filas primera y segunda.} \\ (2) \begin{cases} f_2 = f_2 + 2f_1 \\ f_3 = f_3 + 3f_1 \\ f_4 = f_4 + f_2 \end{cases} \\ (3) f_2 = (-2)f_2 + f_3 \\ (4) \begin{cases} f_3 = f_3 + (-7)f_2 \\ f_4 = f_4 + 5f_2 \end{cases} \\ (5) \begin{cases} f_3 = \frac{f_3}{10} \\ f_4 = \frac{f_4}{6} \end{cases} \\ (6) f_4 = f_4 + f_3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rang}(A) = 3 \\ \text{Número de incógnitas} = 4 \end{array} \right\} \implies \text{Sistema compatible indeterminado, la solución depende de un parámetro}$$

El sistema equivalente es:
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y + 3z + 4t = 0 \\ y + 6z + 2t = 0 \\ 5z + 3t = 0 \end{cases}$$

Elegimos como parámetro la incógnita t y despejamos: $5z = -3t \Rightarrow z = -\frac{3}{5}t$, sustituyendo en la segunda ecuación: $y + 6\left(-\frac{3}{5}t\right) + 2t = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{5}t$,

sustituyendo en la primera ecuación: $x = -2y + 3z + 4t \Rightarrow x = \left(-\frac{16}{5} - \frac{9}{5} + 4\right)t \Rightarrow x = -t$

Solución del sistema:

$$\begin{cases} x = -5\alpha \\ y = 8\alpha \\ z = -3\alpha \\ t = 5\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

⑤ Resolver los sistemas:

$$a) \quad \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 6z = 0 \\ 3x - 11y + 12z = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 6z = 0 \\ 3x - 11y + 12z = 0 \end{cases}$$
. Los términos independientes son todos nulos, es decir, el sistema es homogéneo y siempre es compatible. La matriz de los coeficientes, $A \in \mathcal{M}(4 \times 3)$, su rango máximo es tres.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 10 & -12 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es DOS y el sistema tiene TRES incógnitas, el sistema es compatible INDETERMINADO, la solución depende de $3 - 2 = 1$ parámetros.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 5y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{6}{5}z, \text{ sustituyendo en la primera ecuación: } x = \frac{2}{5}z$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 6\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, y, z) = \alpha \cdot (2, 6, 5), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$$
. El sistema tiene cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. La matriz de los coeficientes, $A \in \mathcal{M}(4)$ y la ampliada, $A^* \in \mathcal{M}(4 \times 5)$, el rango máximo de las dos es

CUATRO.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 51 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Discusión y solución: $\begin{cases} \text{rang}(A) = 4 \\ \text{rang}(A^*) = 4 \\ \text{Número de incógnitas: } 4 \end{cases} \implies \text{Sistema compatible determinado.}$

$$\text{SOLUCIÓN: } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

⑥ Discutir y resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{rrcr} kx & + & ky & - & z & = & 2 \\ 3x & - & ky & & & = & 0 \\ 5x & + & ky & & & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 1 \end{array} \right\}.$$

El sistema tiene cuatro ecuaciones y tres incógnitas. $\begin{cases} A \in \mathcal{M}(4 \times 3) \implies \text{rang}(A) \leq 3 \\ A^* \in \mathcal{M}(4) \implies \text{rang}(A^*) \leq 4 \end{cases}$. El rango de la matriz ampliada será máximo, CUATRO, si su determinante es no nulo, $\det(A^*) \neq 0$.

$$\det(A^*) = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8k(-1 - 4) = -40k = 0 \iff \boxed{k = 0}$$

DISCUSIÓN:

- Si $\boxed{k \neq 0}$ entonces $\begin{cases} \text{rang}(A) = 3 \\ \text{rang}(A^*) = 4 \end{cases} \implies \text{Sistema incompatible.}$
- Si $\boxed{k = 0}$ entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces $\begin{cases} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 3 \end{cases} \implies \text{Sistema incompatible.}$

Sistema incompatible

⑦ Dado el sistema
$$\begin{cases} 2x + ky + z = 1 \\ x + 3y - kz = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

- a) Discutir según los valores del parámetro k .
b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Matrices asociadas al sistema:

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 3 & -k \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -k & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right)$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces el rango de la matriz M es dos o tres.

La matriz ampliada es de orden 3×4 su rango como máximo tres.

Número de incógnitas tres.

El rango de la matriz de los coeficientes será máximo, TRES, si su determinante es NO NULO.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 3 & -k \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} f_1 + (-2)f_2 \\ f_3 + (-2)f_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & k-6 & 2k+1 \\ 1 & 3 & -k \\ 0 & -9 & 2k+5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} k-6 & 2k+1 \\ -9 & 2k+5 \end{vmatrix} = -2k^2 - 11k + 21$$

$$\det(M) = 0 \implies 2k^2 + 11k - 21 = 0 \implies x = \frac{-11 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-11 \pm 17}{4} = \begin{cases} k_1 = \frac{3}{2} \\ k_2 = -7 \end{cases}$$

DISCUSIÓN:

Primer caso: $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}, -7 \right\}$ entonces

$$\left. \begin{array}{l} \text{rang}(M) = 3 \\ \text{rang}(M^*) = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{TRF} \text{Sistema compatible} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rang}(M) = 3 \\ \text{rang}(M^*) = 3 \\ \text{incógnitas: } 3 \end{array} \right\} \implies \text{Sistema compatible determinado}$$

El sistema es un sistema de Cramer (solución única).

Segundo caso: $k = -7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -13 & -13 & 1 \\ 0 & -9 & -9 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -13 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rang}(M) = 2 \\ \text{rang}(M^*) = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{TRF} \text{Sistema incompatible}$$

El sistema si $k = -7$ no tiene solución.

Tercer caso: $k = \frac{3}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[f_2=2 \cdot f_2]{f_1=2 \cdot f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & 2 \\ 0 & -9 & 8 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rang}(M) = 2 \\ \text{rang}(M^*) = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{TRF} \text{Sistema compatible y } \left. \begin{array}{l} \text{rang}(M) = 2 \\ \text{rang}(M^*) = 2 \\ \text{incógnitas: } 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

la solución depende de $3(\text{incógnitas}) - 2 (\text{rango}) = 1$ parámetro.

El sistema equivalente es: $\left. \begin{array}{l} 2x + 6y - 3z = 0 \\ -9y + 8z = 2 \end{array} \right\}$. Eligiendo, por ejemplo, z como parámetro:

$$-9y + 8z = 2 \Rightarrow 9y = -2 + 8z \Rightarrow y = -\frac{2}{9} + \frac{8}{9}z \text{ sustituyendo en la primera ecuación:}$$

$$2x - \frac{4}{3} + \frac{16}{3}z - 3z = 0 \Rightarrow 2x = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}z \Rightarrow x = \frac{2}{3} - \frac{7}{6}z$$

Si $z = 18\alpha$ entonces

$$\text{si } k = \frac{3}{2} \text{ las infinitas soluciones son: } \begin{cases} x = \frac{2}{3} - 21\alpha \\ y = -\frac{2}{9} + 16\alpha \\ z = 18\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

4.1. Problemas de planteamiento

- ⑧ Repartir 100 medidas de trigo entre 100 personas de manera que los hombres reciben tres medidas, las mujeres dos medidas y los niños media medida. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay? **Discutir la solución.**

$$\text{Incógnitas: } \begin{cases} x : \text{hombres} \\ y : \text{mujeres} \\ z : \text{niños} \end{cases} \quad \boxed{x, y, z \in \mathbb{N}}$$

- Número de personas $100 \Rightarrow x + y + z = 100$.
- Repartir 100 medidas: $3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100$

$$\text{Sistema de ecuaciones: } \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 6x + 4y + z = 200 \end{cases}$$

Solución algebraica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 6 & 4 & 1 & 200 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -5 & -400 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 2 \\ \text{Número de incógnitas: } n = 3 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado, la solución depende de UN parámetro

Solución:

$$\begin{cases} 2y + 5z = 400 \implies y = 200 - \frac{5}{2}z \\ x = 100 - y - z \implies x = -100 + \frac{3}{2}z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -100 + 3\alpha \\ y = 200 - 5\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Las condiciones iniciales del problema, $x, y, z \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} -100 + 3\alpha \geq 0 \iff \alpha \geq \frac{100}{3} = 33,3333\dots \\ 200 - 5\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 40 \end{cases} \implies \boxed{34 \leq \alpha \leq 40, \alpha \in \mathbb{N}}$$

El problema tiene **SIETE** soluciones posibles.

- ⑨ Lewis Carrol, autor del libro *Alicia en el país de las maravillas*, propone un problema cuyo enunciado es:

Una limonada, tres sándwiches y siete bizcochos cuestan un chelín y dos peniques, mientras que una limonada, cuatro sándwiches y diez bizcochos valen un chelín y cinco peniques.

Sabiendo que un chelín equivale a doce peniques,

- a) Hallar razonadamente el precio de la limonada, sándwiches y el bizcocho.
 b) ¿Es posible hallar el precio de una limonada, un sándwiches y un bizcocho? **Razonar la contestación.**

- a) Hallar razonadamente el precio de la limonada, sándwiches y el bizcocho.

Incógnitas: $\begin{cases} x : \text{chelines cada limonada} \\ y : \text{chelines cada sándwich} \\ z : \text{chelines cada bizcocho} \end{cases} \quad \boxed{x, y, z \in \mathbb{N}}$

- *Primer pedido:* $x + 3y + 7z = 14$.
- *Segundo pedido:* $x + 4y + 10z = 17$

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 3y + 7z = 14 \\ x + 4y + 10z = 17 \end{cases}$ Solución algebraica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 14 \\ 1 & 4 & 10 & 17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \implies \begin{cases} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A^*) = 2 \\ \text{Número de incógnitas: } n = 3 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado, la solución depende de UN parámetro

Solución:

$$\begin{cases} y + 3z = 3 \implies y = 3 - 3z \\ x = 14 - 3y - 7z \implies x = 5 + 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 + 2\alpha \\ y = 3 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Las condiciones iniciales del problema, $x, y, z \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} 5 + 2\alpha \geq 0 \iff \alpha \geq -\frac{5}{2} \\ 3 - 3\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 1 \end{cases} \implies \boxed{0 \leq \alpha \leq 1, \alpha \in \mathbb{N}}$$

El problema tiene **DOS** soluciones posibles.

- b) ¿Es posible hallar el precio de una limonada, un sándwiches y un bizcocho? **Razonar la contestación.** La suma de las tres incógnitas:

$$x + y + z = 5 + 2\alpha + 3 - 3\alpha + \alpha = 8, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \text{el precio es de: 8 chelines}$$

- ⑩ Una aseguradora tiene tres tarifas: una para adulto, otra para niño y otra para anciano. Se sabe que una familia de 3 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 215 €, una segunda familia de 4 adultos, 1 niño y 2 ancianos paga 260 €, una tercera familia de 2 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 190 €.

- a) ¿Cuánto paga cada niño, adulto y anciano?
b) ¿Cuánto pagará una familia de 5 adultos, 3 niños y 2 ancianos?

- a) ¿Cuánto paga cada niño, adulto y anciano?

Incógnitas del problema:

Aportaciones en euros de cada uno de los aseguradores: $\begin{cases} \text{Adulto: } x \text{ euros} \\ \text{Niño: } y \text{ euros} \\ \text{Anciano: } z \text{ euros} \end{cases}$ siendo $x, y, z > 0$.

Sistema de ecuaciones asociado:

- Una familia de 3 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 215 €: $3x + 2y + z = 215$
- Una segunda familia de 4 adultos, 1 niño y 2 ancianos paga 260 €: $4x + y + 2z = 260$
- Una tercera familia de 2 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 190 €: $2x + 2y + z = 190$

$$\text{El sistema es } \begin{cases} 3x + 2y + z = 215 \\ 4x + y + 2z = 260 \\ 2x + 2y + z = 190 \end{cases}$$

Discusión del sistema:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & | & \\ 3 & 2 & 1 & | & 215 \\ 4 & 1 & 2 & | & 260 \\ 2 & 2 & 1 & | & 190 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x & | & \\ 1 & 3 & 2 & | & 215 \\ 2 & 4 & 1 & | & 260 \\ 1 & 2 & 2 & | & 190 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3=f_3+(-1)\cdot f_1]{f_2=f_2+(-2)\cdot f_1} \begin{pmatrix} z & y & x & | & \\ 1 & 3 & 2 & | & 215 \\ 0 & -2 & -3 & | & -170 \\ 0 & -1 & 0 & | & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x & | & \\ 1 & 3 & 2 & | & 215 \\ 0 & 1 & 0 & | & 25 \\ 0 & -2 & -3 & | & -170 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{f_3=f_3+(2)\cdot f_2} \begin{pmatrix} z & y & x & | & \\ 1 & 3 & 2 & | & 215 \\ 0 & 1 & 0 & | & 25 \\ 0 & 0 & -3 & | & -120 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x & | & \\ 1 & 3 & 2 & | & 215 \\ 0 & 1 & 0 & | & 25 \\ 0 & 0 & 1 & | & -40 \end{pmatrix}$$

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO y la solución es $\begin{cases} x = 25 \\ y = 40 \\ z = 60 \end{cases}$.

Solución:

Las cuotas son, adulto 25 €, niño 40 € y anciano, 60 €

- b) ¿Cuánto pagará una familia de 5 adultos, 3 niños y 2 ancianos?

La familia pagará: $5 \cdot 25 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 60 = 365$ euros.

- ⑪ Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: A, B y C. Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C y del tipo C tiene el 35 % de la suma de A más B. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

Incógnitas del problema:

Productos en cada comercio: $\begin{cases} \text{Producto A: } x \\ \text{Producto B: } y \\ \text{Producto C: } z \end{cases}$ siendo $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Sistema de ecuaciones asociado:

- Un total de 270 unidades de productos de tres tipos: A, B y C $x + y + z = 270$
- Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C $x = y + z - 30 \iff x - y - z = -30$
- Del tipo C tiene el 35 % de la suma de A más B $z = 0,35(x + y) \iff 7x + 7y - 20z = 0$

El sistema es $\begin{cases} x + y + z = 270 \\ x - y - z = -30 \\ 7x + 7y - 20z = 0 \end{cases}$

Discusión del sistema:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 270 \\ 1 & -1 & -1 & -30 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -30 \\ 1 & 1 & 1 & 270 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1=f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 240 \\ 1 & 1 & 1 & 270 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1=f_1 \cdot \frac{1}{2}} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 1 & 1 & 1 & 270 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{f_2=f_2+(-1) \cdot f_1 \\ f_3=f_3+(-7) \cdot f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 7 & -20 & -840 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3=f_3+(-7) \cdot f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & -27 & -1890 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 70 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2=f_2+(-1) \cdot f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 70 \end{array}\right) \end{aligned}$$

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO y la solución es $\begin{cases} x = 120 \\ y = 80 \\ z = 70 \end{cases}$.

Solución:

El comercio tiene 120 productos del tipo A, 80 del B y 70 del C

- ⑫ Los 90 alumnos de bachillerato del I.E.S. están divididos en tres grupos A , B y C . Calcular el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si pasan 7 alumnos del B al A ambos grupos tendrán el mismo número de alumnos; o que si pasan 4 alumnos del C al A , en éste habría la mitad de alumnos que en el grupo C .

- Incógnitas: número de alumnos de cada uno de los grupos:

$$\begin{cases} x : \text{número de alumnos del grupo A} \\ y : \text{número de alumnos del grupo B} \\ z : \text{número de alumnos del grupo C} \end{cases} \quad \text{donde } \boxed{x, y, z \in \mathbb{N}}$$

- Ecuaciones del sistema:

Los 90 alumnos de bachillerato: $\boxed{x + y + z = 90}$.

Si pasan 7 alumnos del B al A ambos grupos tendrán el mismo número de alumnos: $\boxed{x + 7 = y - 7}$

Si pasan 4 alumnos del C al A , en éste habría la mitad de alumnos que en el grupo C : $\boxed{x + 4 = \frac{z - 4}{2}}$

El sistema es $\begin{cases} x + y + z = 90 \\ x - y = -14 \\ 2x - z = -12 \end{cases}$

- Solución algebraica del sistema (método de Gauss):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & -1 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & -1 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow[f_3=f_3+(-1)f_1]{f_2=f_2+(-1)f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -2 & -1 & -104 \\ 0 & -2 & -3 & -192 \end{array} \right) \xrightarrow[f_3=f_3+(-1)f_2]{f_2=(-1)f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 2 & 1 & 104 \\ 0 & 0 & -2 & -88 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible determinado y el sistema equivalente es: $\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 2y + z = 104 \\ z = 44 \end{cases}$ y la solución

del sistema es: $\begin{cases} z = 44 \\ y = 30 \\ x = 16 \end{cases}$

- Solución del problema:

$$\begin{cases} \text{número de alumnos del grupo A: 16} \\ \text{número de alumnos del grupo B: 30} \\ \text{número de alumnos del grupo C: 44} \end{cases}$$

- ⑬ En un hospital, un dietista prepara una dieta especial con tres alimentos básicos. La dieta incluye exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 de vitamina A. El número de unidades por onza de cada ingrediente especial para cada uno de los alimentos se muestra en la tabla adjunta.

Alimento	A	B	C
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

¿Cuántas onzas de cada alimento deben emplearse para tener los requerimientos de la dieta?

- Incógnitas: número de onzas de cada uno de los alimentos básicos:

$$\begin{cases} x : \text{número de onzas del alimento A} \\ y : \text{número de onzas del alimento B} \\ z : \text{número de onzas del alimento C} \end{cases} \quad \text{donde } \boxed{x, y, z \in \mathbb{R}^+}$$

- Sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta la tabla de alimentos:

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 340 \\ 180 \\ 220 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{onzas de Ca} \\ \text{onzas de Fe} \\ \text{onzas de vit. A} \end{array}$$

- Solución algebraica del sistema (método de Gauss):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 34 \\ 1 & 1 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & 2 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 18 \\ 3 & 1 & 2 & 34 \\ 1 & 3 & 2 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2 = f_2 + (-3)f_1 \\ f_3 = f_3 + (-1)f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & -2 & -4 & -20 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -16 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible determinado y el sistema equivalente es: $\begin{cases} x + y + 2z = 18 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ y la solución

$$\text{del sistema es: } \begin{cases} z = 4 \\ y = 2 \\ x = 8 \end{cases}$$

- Solución del problema:

$$\begin{cases} \text{número de onzas del alimento A: 8} \\ \text{número de onzas del alimento B: 2} \\ \text{número onzas del alimento C: 4} \end{cases}$$

- ⑭ Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

$$\begin{cases} \text{Precio del libro: } x \text{ euros} \\ \text{Precio de la calculadora: } y \text{ euros} \\ \text{Precio del estuche: } z \text{ euros} \end{cases} \quad \text{siendo } x, y, z > 0$$

- Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$
- Solución del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 = f_2 + 2 \cdot f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 3 & 0 & 0 & 114 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$, sistema compatible indeterminado (número de incógnitas 3), la so-

lución depende de un parámetro: $\begin{cases} x = \frac{114}{3} = 38 \\ y = 19 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Por las restricciones del problema}$

$$\boxed{0 < \alpha < 19}.$$

El precio del libro es 38 € y NO se puede determinar el precio de la calculadora.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20 % y un 25 % de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

■ El estudiante *ha pagado*:
$$\begin{cases} \text{Por el libro } 0,5 \cdot 38 = 19 \\ \text{Por la calculadora } 0,8 \cdot (19 - \alpha) \\ \text{Por el estuche } 0,75 \cdot \alpha \end{cases} \quad \text{En total:}$$

$$19 + 0,8 \cdot (19 - \alpha) + 0,75 \cdot \alpha = 34 \implies 0,05\alpha = 0,8 \cdot 19 - 15 \implies \alpha = \frac{0,2}{0,05} = 4$$

Sustituyendo en la solución paramétrica del sistema:

El precio del libro es 38 €, el de la calculadora, 15 € y del estuche 4 €.