

1. El espacio afín	2
1.1. El espacio vectorial de los vectores	2
1.1.1. Estructura de $\mathbb{R}$ -espacio vectorial	4
1.1.2. Espacio afín	6
1.2. El plano en el espacio afín	9
1.2.1. Ecuación vectorial del plano	9
1.3. La recta en el espacio afín	12
1.3.1. Ecuaciones de la recta	12
1.4. Incidencia, intersección y paralelismo	15
1.4.1. Posición relativa de dos rectas en el espacio	15
1.4.2. Incidencia de planos	16
1.4.3. Haz de planos	18
1.4.4. Posición relativa de tres planos en el espacio	19
1.4.5. Posiciones relativas de recta y plano	20

Consideremos $\mathcal{E}$ como el espacio intuitivo de puntos: $X, Y, Z \dots$. En este espacio tridimensional, las dos figuras que podemos sumergir son la recta (de dimensión uno) y el plano (de dimensión dos).

En cursos anteriores se ha estudiado la recta en el plano y sus propiedades afines, o sea cuestiones relativas a problemas de incidencia, paralelismo e intersección. Estas mismas cuestiones se van a trasladar ahora al espacio y el problema tendrá un tratamiento análogo.

1.1. El espacio vectorial de los vectores

Definición 1.1 (Vectores fijos) Dado dos puntos cualesquiera X e Y del espacio nos definirán un **vector fijo** que designaremos por $\overrightarrow{XY}$ (X recibe el nombre de origen e Y extremo del vector).

Al conjunto de todos los vectores que podamos hacer en $\mathcal{E}$ de esta forma se le denomina V_3 . El hecho de que X sea el origen e Y el extremo determina sobre la recta un **sentido** de X a Y que es el sentido del vector. La **dirección** es la recta determinada por los puntos X e Y y el **módulo** es la distancia entre X e Y .

Definición 1.2 Los vectores fijos $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ que tienen el mismo origen y extremo reciben el nombre de **vectores fijos nulos**.

Definición 1.3 Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo módulo si $d(A, B) = d(C, D)$. Escribiremos: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

Definición 1.4 Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma dirección si están en la misma recta o en rectas paralelas. Escribiremos: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

Definición 1.5 Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ que tienen la misma dirección tienen el mismo sentido $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$ si

1. Si están situados en rectas paralelas: la recta que une los orígenes, deja sus extremos en un mismo semiplano.
2. Si están situados en una misma recta, existe otro vector fijo situado en una recta paralela tal que respecto de los dos vectores, aplicando el apartado anterior, mantiene el mismo sentido.

Definición 1.6 Vectores libres Dos vectores fijos del espacio son equipolentes (y se denota por: $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$), si verifican una de las tres condiciones siguientes:

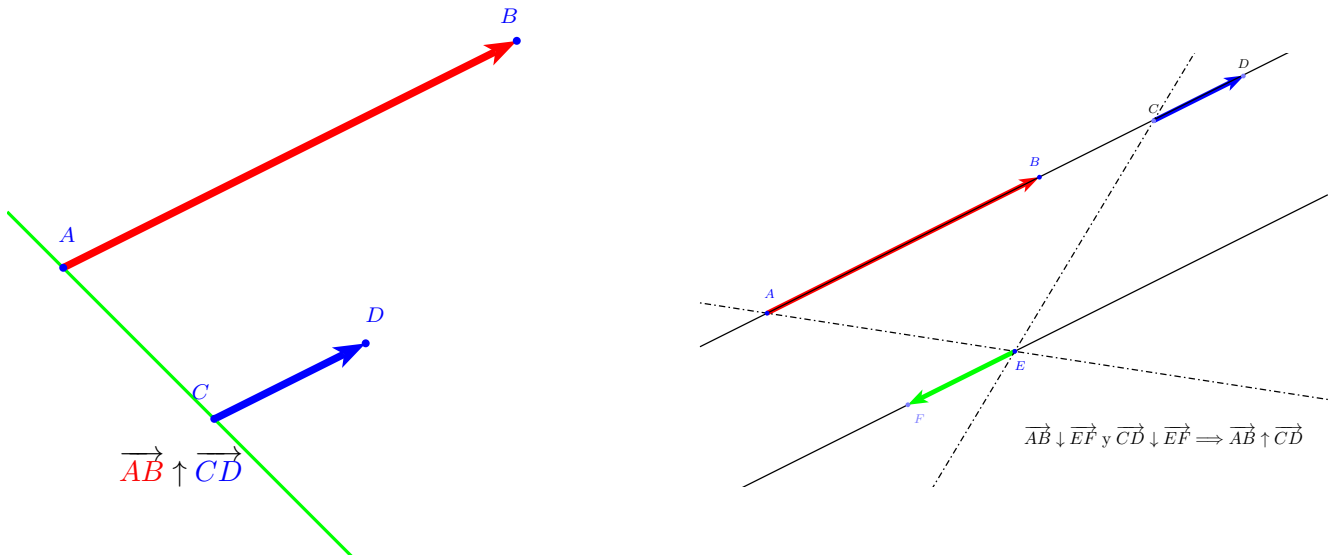


Figura 1.1: Vectores del mismo sentido

1. Si no son nulos y están situados en rectas diferentes, son equipolentes si al unir sus orígenes (A y X) y sus extremos (B e Y) se forma un paralelogramo.
2. Si están sobre la misma recta existe otro vector $\overrightarrow{MN}$ que cumple con ambos la misma condición.
3. Si ambos vectores son nulos.

Teorema 1.1 Dos vectores: $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$ si y sólo si tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

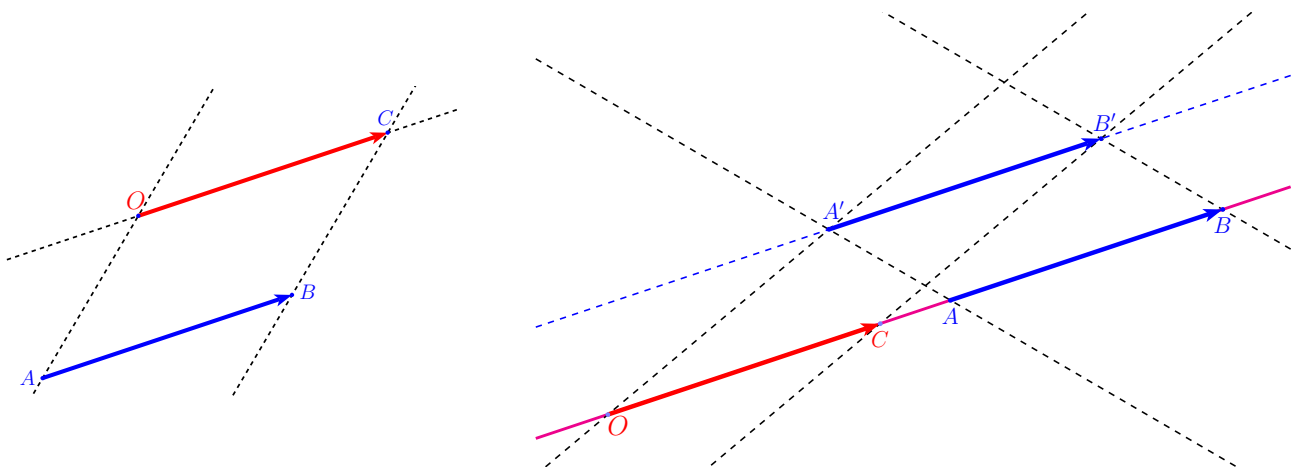
La relación de equipolencia es de equivalencia ya que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Podemos formar por tanto el conjunto cociente que nos clasifica el conjunto $\mathcal{E}$. Cada una de las clases de equivalencia es un **vector libre** y su conjunto se designa por $\mathcal{V}_3$: $\mathcal{V}_3 = \mathcal{E} / \sim$.

$$\vec{v} \in \mathcal{V}_3 \Rightarrow \vec{v} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

$$\text{El vector libre nulo es: } \vec{0} = \{\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots\}$$

Propiedad 1.1 Elegido un punto O del espacio que llamaremos origen y un vector libre cualesquiera $[\overrightarrow{AB}]$ del espacio, éste tiene un único representante con origen en O . (Fig.1.2)

Figura 1.2: Vector libre con origen O

1.1.1. Estructura de $\mathbb{R}$ -espacio vectorial

En el conjunto V_3 se establecen dos operaciones:

Definición 1.7 (Adición) Sean $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{v} = [\overrightarrow{CD}]$ dos vectores libres de V_3 . Se define la suma de vectores como otro vector libre $\vec{w}$, que viene determinado por una de las formas siguientes:

1. Método del paralelogramo

2. Método del polígono

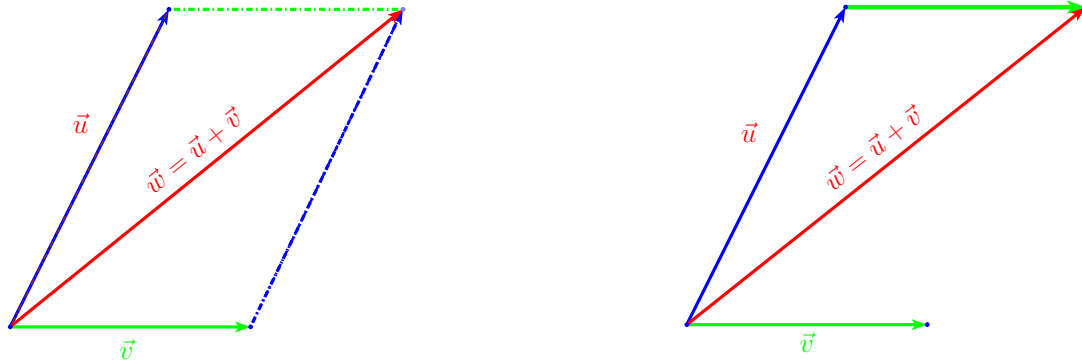


Figura 1.3: Suma de vectores libres

Propiedad 1.2 La suma de vectores es **uniforme**, es decir no depende de los vectores que se tomen como representantes.

Propiedad 1.3 El conjunto V_3 con la operación así definida cumple las siguientes propiedades (Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$):

1. Asociativa $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
2. Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. Elemento neutro: El vector cero $\vec{0}$.
4. Elemento simétrico: $[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = \vec{0}$

Todo ello quiere decir que $(V_3, +)$ es un grupo abeliano.

Definición 1.8 Ley externa

Sean $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Definimos la siguiente operación externa:

$$\bullet : \mathbb{R} \times V_3 \longrightarrow V_3$$

tal que a cada par $(\lambda, \vec{v}) \rightsquigarrow \lambda \bullet \vec{v}$ verificando:

1. El vector $\lambda \bullet \vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$
2. El sentido del vector será el mismo que $\vec{v}$ si $\lambda > 0$ y el contrario a $\vec{v}$ si $\lambda < 0$.
3. El módulo será el producto de $|\lambda|$ por el módulo de $\vec{v}$

Propiedad 1.4 El conjunto V_3 con la operación externa así definida, cumple las siguientes propiedades:

1. Distributiva de los escalares respecto a la suma de vectores:

$$\lambda \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \bullet \vec{u} + \lambda \bullet \vec{v}$$

2. Distributiva de los vectores respecto la suma de escalares:

$$(\lambda + \mu) \bullet \vec{u} = \lambda \bullet \vec{u} + \mu \bullet \vec{u}$$

3. Asociativa de los escalares:

$$(\lambda \cdot \mu) \bullet \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \bullet \vec{u})$$

4. Elemento unidad:

$$1 \bullet \vec{v} = \vec{v}$$

Todo ello quiere decir que $(\mathcal{V}_3, +, \bullet)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1 Base y dimensión del espacio vectorial

Tres vectores no nulos, no coplanarios, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de $\mathcal{V}_3$ forman una base del e.v.

Demostración

Para que sea base tiene que formar un sistema linealmente independiente y generador. Veámoslo:

■ Linealmente independientes

Por reducción al absurdo: supongamos que los vectores son l.d., por definición, al menos, uno de ellos será c.l. de los restantes: $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u}_3 = \alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2$ por lo tanto el vector $\vec{u}_3$ pertenece al plano determinado por $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Contradice la hipótesis de ser no coplanarios, por lo tanto son l.i.

■ Sistema generador

Construcción geométrica.

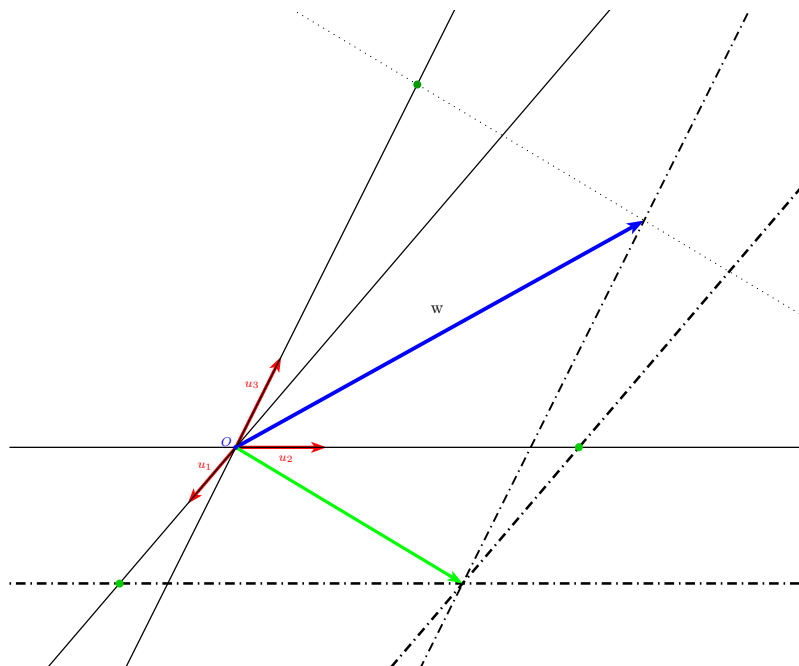


Figura 1.4: Sistema generador

Consecuencias:

1. La dimensión del e.v. $\mathcal{V}_3$, por lo tanto, es 3.
2. Los subespacios vectoriales de $(\mathcal{V}_3, +, \bullet)$ son:

- El subespacio vectorial de dimensión 0 (subespacio impropio: el vector nulo $\vec{0}$).
- El subespacio vectorial de dimensión 1. Una base está formada por un vector no nulo.
- El subespacio vectorial de dimensión 2. Una base está formada por dos vectores, no nulos, linealmente independientes.
- El subespacio vectorial de dimensión 3 (subespacio impropio: es decir el propio espacio $\mathcal{V}_3$)

Definición 1.9 Componentes de un vector

Dada una base $\mathcal{B} \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y un vector $\vec{v}$ cualquiera de $\mathcal{V}_3$, como forman un sistema generador $\exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$. A la terna (x_1, x_2, x_3) se les denomina **componentes del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$** .

Hemos establecido una aplicación (isomorfismo) entre $\mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (fijada una base $\mathcal{B}$) tal que a cada vector $\vec{v} \rightsquigarrow (x_1, x_2, x_3)$. En general se tomará como base de $\mathcal{V}_3$ a la base canónica $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

1.1.2. Espacio afín

Definición 1.10 Sea $\mathcal{E}$ el conjunto que llamamos espacio intuitivo y $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ el e.v. real de dimensión 3 de los vectores libres y f una aplicación de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ sobre $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ que verifica los axiomas siguientes:

- $\forall A, B, C \in \mathcal{E} \quad f(A, C) = f(A, B) + f(B, C) \approx \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$
- $\forall A \in \mathcal{E} \text{ y } \forall \vec{v} \in \mathcal{V}_3(\mathbb{R}) \quad \exists \text{ un } \text{único } B \in \mathcal{E} \text{ tal que } f(A, B) = \vec{v} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{v}$

Se denomina **espacio afín** asociado a $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ y se designa por $E^3(\mathbb{R})$ a la terna $(\mathcal{E}, \mathcal{V}_3(\mathbb{R}), f)$.

Consecuencias

- $\forall A \in E^3 \quad f(A, A) = \vec{AA} = \vec{0}$ (el elemento neutro de $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$)
- $\forall A, B \in E^3, f(A, B) = -f(B, A)$ es decir: $\vec{AB} = -\vec{BA}$

Definición 1.11 Dimensión: Sea $E^3(\mathbb{R})$ el espacio afín asociado a $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$, se llama **dimensión del espacio afín** a la dimensión del espacio vectorial asociado.

$$\dim E^3(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{V}_3(\mathbb{R}) = 3$$

Definición 1.12 Subespacios afines: Sea A un punto cualquiera de $\mathcal{E}$ y S un subespacio vectorial de $\mathcal{V}_3(\mathbb{R})$, entonces los subespacios afines, no impropios, son:

- Si S es de dimensión uno, el par (A, S) es un subespacio afín de dimensión uno y recibe el nombre de **recta afín**.
- Si S es de dimensión dos, el par (A, S) es un subespacio afín de dimensión dos y recibe el nombre de **plano afín**.

Definición 1.13 Vector de posición

Supongamos elegido un punto O del espacio afín que llamaremos origen.

Consideremos la aplicación $h_0 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}_3(\mathbb{R})$ tal que a cada punto del espacio afín $A \in \mathcal{E}$ le hacemos corresponder el vector $\vec{OA}$. A este vector se le denomina **vector de posición** del punto A .

Definición 1.14 (Sistema de referencia afín) Se denomina sistema de referencia afín del espacio E^3 al par $\mathcal{R}(O, \mathcal{B})$ donde O es un punto fijo y $\mathcal{B}$ es una base del espacio vectorial asociado. Al punto O se le denomina origen de coordenadas.

Definición 1.15 **Coordenadas afines de un punto:** Se llaman coordenadas afines (Fig.1.5) de un punto M de E^3 respecto a la referencia $\mathcal{R}$ a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OM}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ de $V_3(\mathbb{R})$.

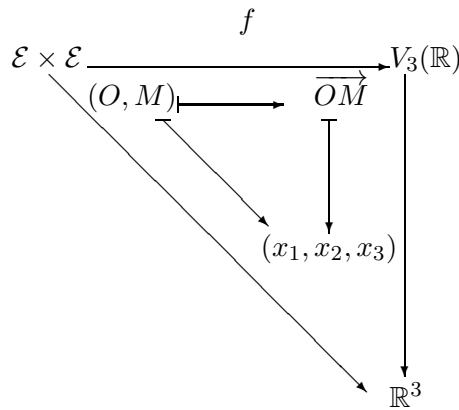


Figura 1.5: Coordenadas afines

Vamos a tomar como ejemplo $\mathbb{R}^3$. Se toma como referencia afín (Fig.1.6) $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_c)$ donde $O = (0, 0, 0)$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

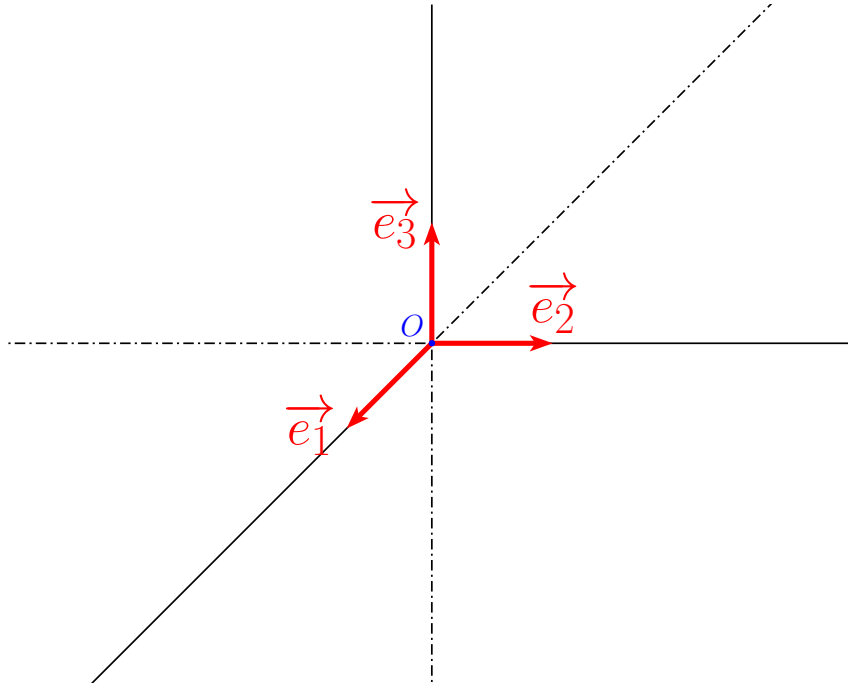


Figura 1.6: Sistema de referencia

Propiedad 1.5 **Coordenadas del vector de origen A y extremo B**

Sean $A = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = (y_1, y_2, y_3)$ puntos de $\mathbb{R}^3$. Queremos calcular las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

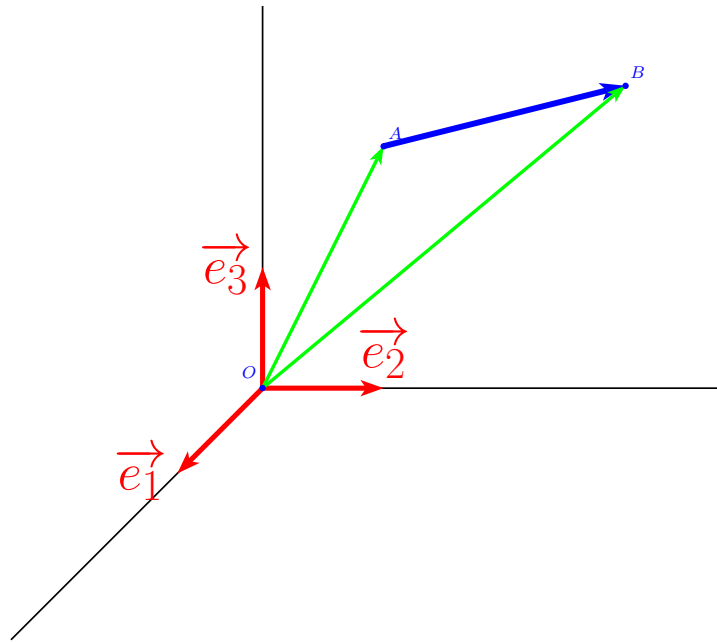
Entonces:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) - (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - x_2)\vec{e}_2 + (y_3 - x_3)\vec{e}_3$$

Por lo tanto las coordenadas del vector (Fig.1.7) $\overrightarrow{AB}$ respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$ son:

$$\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

Las componentes de un vector de origen A y extremo B son la diferencia entre las coordenadas del extremo y las del origen.

Figura 1.7: Coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$

Propiedad 1.6 Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son equipolentes si y sólo si sus coordenadas son iguales.

Propiedad 1.7 Coordenadas del punto medio de un segmento

Dado un segmento AB , veamos como calcular las coordenadas del punto medio M de dicho segmento (Fig.1.8). El vector posición del punto medio $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \Rightarrow$ y $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ entonces

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Pasando a coordenadas:

$$(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

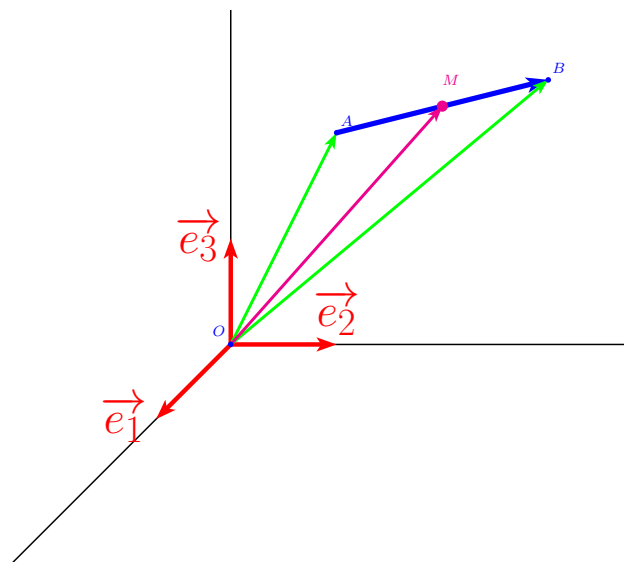


Figura 1.8: Coordenadas del punto medio

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la media aritmética de las coordenadas de los extremos del intervalo.

1.2. El plano en el espacio afín

1.2.1. Ecuación vectorial del plano

El plano afín π queda determinado por un punto del espacio, P , y dos vectores linealmente independientes.

El plano $\pi \equiv (P; \vec{u}, \vec{v})$ tal que $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$

Condición que debe cumplir un punto X para pertenecer al plano π (Fig. 1.9).

$X \in \pi$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{PX}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \iff \text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PX}) = 2$.

Entonces $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{PX} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$. Esta expresión es la condición necesaria y suficiente para que un punto X del espacio afín pertenezca al plano π .

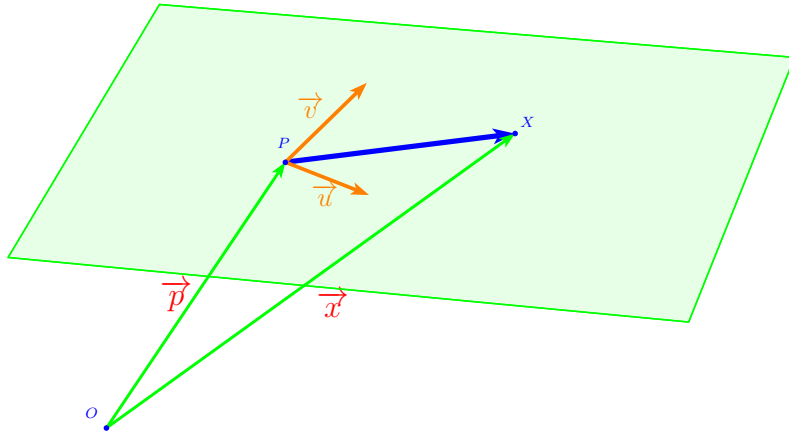


Figura 1.9: Punto X perteneciente al plano π

Proposición 1.2 (Ecuación vectorial del plano) Sean $\vec{p}$ y $\vec{x}$ los vectores de posición de los puntos P y X , como $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$, la ecuación vectorial del plano π es:

$$\vec{x} = \vec{p} + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

Si (x, y, z) son las componentes del vector $\vec{x}$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, es decir, las coordenadas del punto X en el sistema de referencia afín $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, (p_1, p_2, p_3) las coordenadas de P , (u_1, u_2, u_3) las componentes del vector $\vec{u}$, y (v_1, v_2, v_3) las componentes del vector $\vec{v}$, la ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \quad (1.1)$$

Proposición 1.3 (Ecuaciones paramétricas del plano) De la ecuación (1.1) descomponiendo se obtienen:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y &= p_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z &= p_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{aligned} \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Son las **ecuaciones paramétricas** del plano π .

Proposición 1.4 (Ecuación implícita del plano) El punto $X(x, y, z)$ pertenece al plano π si el sistema tiene solución:

$$\left. \begin{aligned} x - p_1 &= \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y - p_2 &= \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z - p_3 &= \alpha u_3 + \beta v_3 \end{aligned} \right\}$$

En las incógnitas α y β . Consideremos las matrices del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, las matrices (1.2) deben tener el mismo rango. La matriz M tiene rango 2 ya que sus columnas son l.i. (los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes). Entonces el sistema tendrá solución cuando el rango de la matriz M^* sea 2, es decir, su determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir $X \in \pi$ si y sólo si este determinante es cero, por lo tanto esa será la ecuación del plano. Desarrollando el determinante por los elementos de la tercera columna, obtendremos:

$$(x - p_1) \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - (y - p_2) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + (z - p_3) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Llamando:

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad B = - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

y $D = -(p_1 \cdot A + p_2 \cdot B + p_3 \cdot C)$, la expresión anterior queda de la manera siguiente:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Y recibe el nombre de **ecuación implícita de un plano o ec. general del plano o ec. cartesiana del plano**.

Observaciones:

- Los coeficientes A, B, C no pueden ser simultáneamente nulos ya que son los menores de orden 2 de una matriz de rango 2.
- Los coeficientes A, B, C sólo dependen de los vectores directores del plano.
- El coeficiente D depende de los vectores y del punto.

Proposición 1.5 Recíprocamente se puede demostrar que cualquier ecuación de la forma: $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ que no tenga los tres coeficientes nulos es la ecuación de un plano en el espacio.

Por otra parte, sabemos que tres puntos no alineados determinan un plano y podríamos preguntarnos cuál será la ecuación del plano determinado por esos tres puntos.

Proposición 1.6 (Ecuación de un plano determinado por tres puntos) . Tres puntos $M(m_1, m_2, m_3)$, $N(n_1, n_2, n_3)$, $P(p_1, p_2, p_3)$, **no alineados**, determinan un único plano. (Fig.1.10),

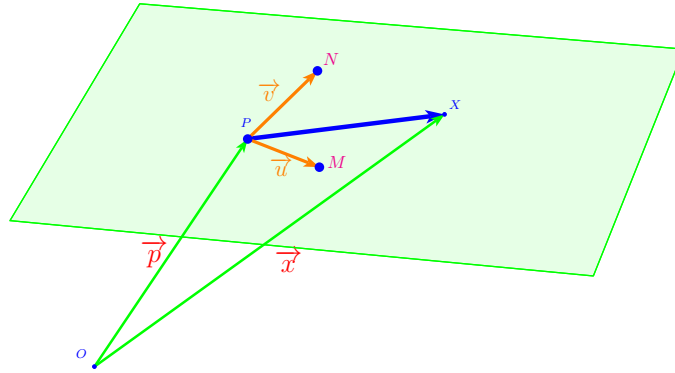


Figura 1.10: Ecuación del plano determinado por tres puntos

Al no estar alineados, los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MP}$ son de distinta dirección y por lo tanto el plano queda determinado por uno de los puntos, M , y los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, $\vec{v} = \overrightarrow{MP}$ (también se puede hacer eligiendo el punto N o el P).

El $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{MX}) = 2$, los tres vectores son linealmente dependientes.

El determinante de la matriz formada por los tres vectores es igual cero y nos determina la ecuación del plano.

$$\begin{vmatrix} n_1 - m_1 & p_1 - m_1 & x - m_1 \\ n_2 - m_2 & p_1 - m_2 & y - m_2 \\ n_3 - m_3 & p_3 - m_3 & z - m_3 \end{vmatrix} = 0$$

Este determinante se puede transformar en otro más fácil, sin más que añadir una fila y una columna (comprobarlo desarrollando por la primera fila):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & n_1 - m_1 & p_1 - m_1 & x - m_1 \\ m_2 & n_2 - m_2 & p_1 - m_2 & y - m_2 \\ m_3 & n_3 - m_3 & p_3 - m_3 & z - m_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si ahora, sustituimos cada columna por su suma con la primera, se obtendrá:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & n_1 & p_1 & x \\ m_2 & n_2 & p_1 & y \\ m_3 & n_3 & p_3 & z \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Proposición 1.7 (Ecuación segmentaria de un plano) Sea un plano π no paralelo a ninguno de los ejes (Fig.1.11) y que no pase por el origen de coordenadas. Aplicando (1.3):

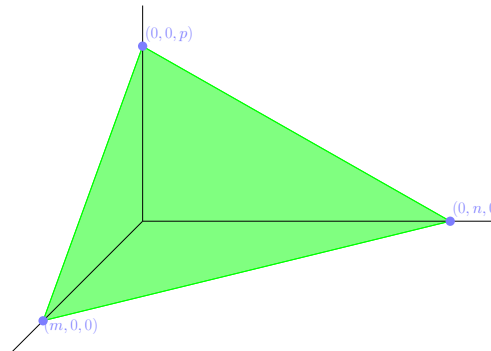


Figura 1.11: Ecuación segmentaria del plano

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 & x \\ 0 & n & 0 & y \\ 0 & 0 & p & z \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la última columna:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies np x + mry + mnz = mnp$$

dividiendo por mnp :

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

que se denomina **ecuación segmentaria del plano**.

1.3. La recta en el espacio afín

1.3.1. Ecuaciones de la recta

La recta está formada por puntos del espacio en una dirección dada.

Definición 1.16 (Determinación de una recta) Una recta en el espacio viene determinada por un punto y un vector libre, no nulo, $r \equiv (P; \vec{u})$

Proposición 1.8 (Ecuación vectorial de la recta) Condición necesaria y suficiente para que un punto del plano pertenezca a la recta $r \equiv (P; \vec{u})$.

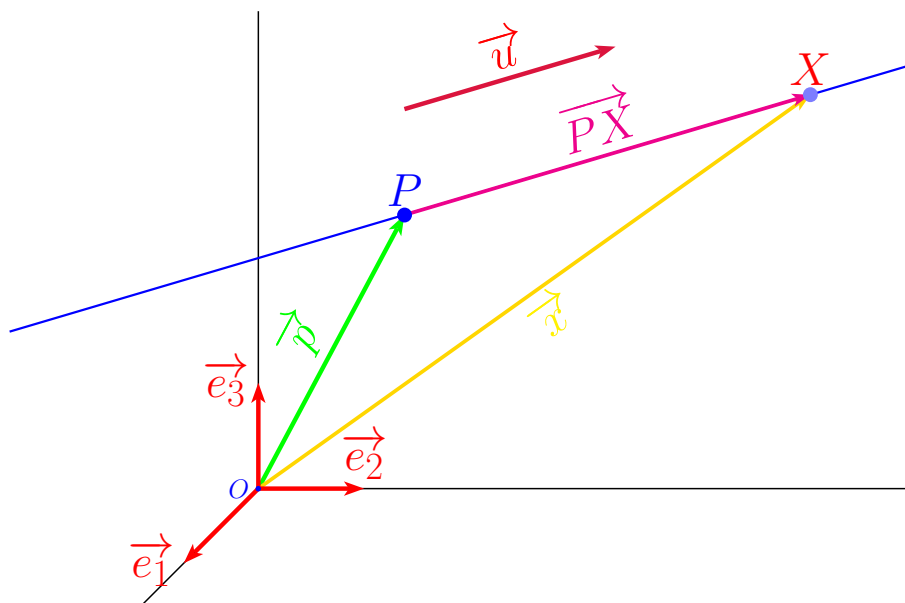


Figura 1.12: Ecuación vectorial de la recta

Sea X un punto genérico de la recta $r \equiv (P; \vec{u})$. Vectorialmente: $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$. El vector $\vec{PX}$ es linealmente dependiente con el vector director $\vec{u}$, $\vec{PX} \parallel \vec{u}$, si y sólo si, existe un escalar λ tal que $\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{u}$.

La ecuación vectorial de la recta es:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Ejemplo

La ecuación vectorial de la recta determinada por el punto $P(1, 3, -2)$ y el vector $\vec{u} = (-1, 3, 4)$ es:

$$\vec{x} = (1, 3, -2) + \lambda \cdot (-1, 3, 4), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposición 1.9 (Ecuaciones paramétricas de la recta) *Considerando las componentes del vector director y las coordenadas de los puntos, la ecuación (1.4) se escribe:*

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) \implies (x, y, z) = (p_1 + \lambda u_1, p_2 + \lambda u_2, p_3 + \lambda u_3) \implies \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Proposición 1.10 (Ecuación continua de la recta) *La ecuación continua de la recta se obtiene des-*

pejando en las ecuaciones paramétricas (1.5) el parámetro, λ , e igualando:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - p_1}{u_1} \\ \lambda = \frac{y - p_2}{u_2} \\ \lambda = \frac{z - p_3}{u_3} \end{cases}$$

$$\frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3} \quad (1.6)$$

Observaciones

Observaciones:

- ☞ Los tres denominadores, simultáneamente, no pueden ser cero. El vector director de una recta siempre es no nulo.
- ☞ Un denominador si que puede ser cero. NO ESTÁ DIVIDIENDO POR CERO. Es una proporción.

Proposición 1.11 (Recta determinada por dos puntos) Dos puntos, P y Q , del espacio determinan una única recta r . La recta viene determinada por un punto y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ entonces un vector director de la recta es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, las componentes del vector son $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. La ecuación de la recta en forma continua:

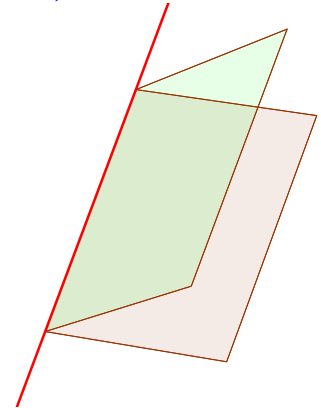
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Proposición 1.12 (Ecuación de la recta como intersección de dos planos)

La intersección de dos planos, NO PARALELOS, es una recta.

De la ecuación continua (1.6) se iguala dos a dos:

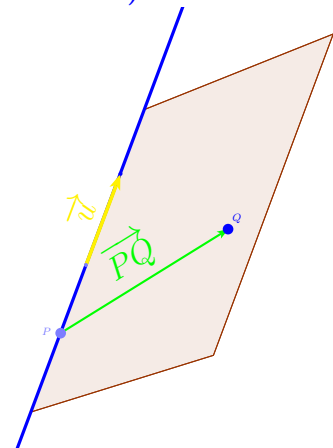
$$r \equiv \begin{cases} \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} \\ \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3} \end{cases}$$



Proposición 1.13 (Plano determinado por una recta y un punto exterior)

Una recta y un punto, Q , exterior a ella determinan un único plano. Si $r \equiv (P, \vec{u})$ entonces los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, ($Q \notin r$) y el plano queda determinado por uno de los dos puntos y los dos vectores.

$$\pi \equiv (P; \vec{u}, \overrightarrow{PQ})$$



Ejercicios

Hallar la ecuación del plano que pasa por $Q(1, 1, 1)$ y por la recta:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 5}{4} = \frac{z - 6}{6}$$

Un punto de la recta es $P(3, 5, 6)$, $\vec{u} = (2, 4, 6) \parallel (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{PQ} = (2, 4, 5)$.

Sea X un punto del plano π , entonces los vectores $(\vec{u}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PX})$ son linealmente dependientes que es equivalente a $\text{rang}(\vec{u}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PX}) = 2$. La ecuación implícita del plano puede calcularse mediante el determinante formado por los tres vectores igual a cero:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 5 & z - 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

1.4. Incidencia, intersección y paralelismo

Definición 1.17 (Incidencia de punto y recta)

Se dice que un punto P es incidente con una recta r o que la recta r pasa por el punto P , cuando P pertenece a la recta r .

Las coordenadas del punto P verifican la ecuación de la recta.

Definición 1.18 (Incidencia de punto y plano)

Se dice que un punto P es incidente con un plano π o que el plano π pasa por el punto P , cuando P pertenece al plano π .

Las coordenadas del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ verifican la ecuación del plano.

Si el plano viene dado en forma general o implícita $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ entonces $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

1.4.1. Posición relativa de dos rectas en el espacio

Definición 1.19 (Incidencia de recta y plano) Diremos que una recta r es incidente con un plano π , o que el plano π pasa por la recta r , cuando $r \subset \pi$

La recta esté contenida en el plano si se cumple una de las siguientes condiciones:

- Que la recta y el plano tengan un punto en común y el vector direccional de la recta sea combinación lineal de los vectores direccionales del plano.
- Que la recta y el plano tengan dos puntos en común.

Definición 1.20 (Posición relativa de dos rectas en el espacio) Sean r y r' dos rectas en el espacio. Estas rectas, geometría clásica, pueden adoptar las siguientes posiciones (Fig.1.13)

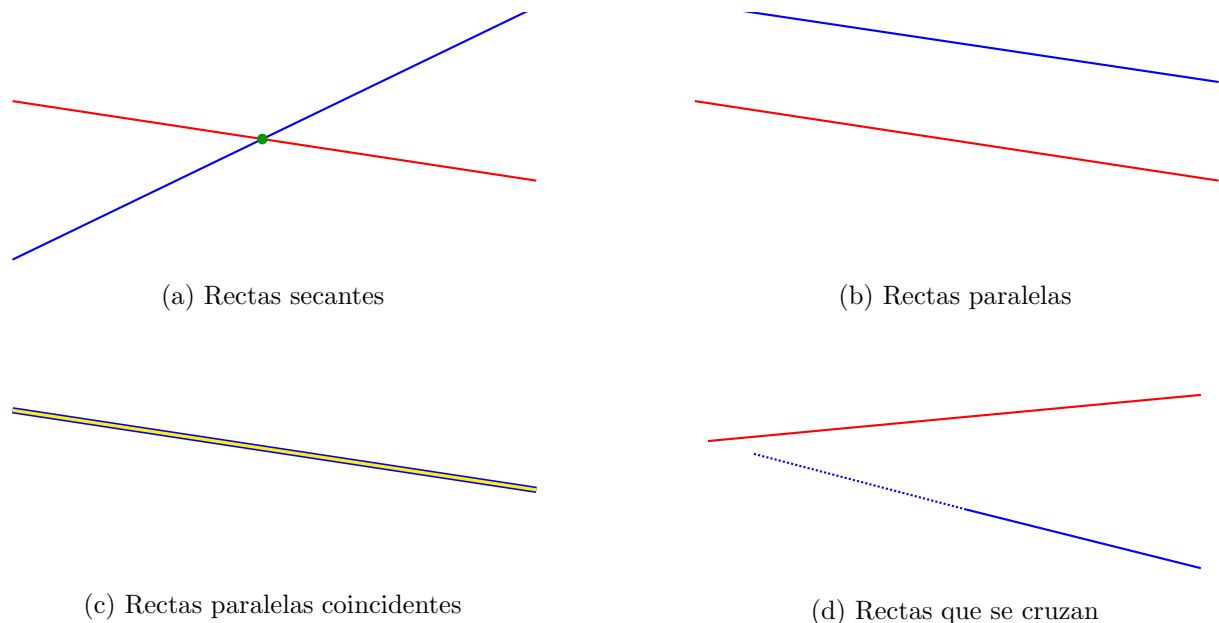


Figura 1.13: Posición relativa de dos rectas

- Tienen un punto en común. Rectas secantes.
- No tienen puntos en común y están en el mismo plano. Rectas paralelas.
- Tienen infinitos puntos de corte. Rectas coincidentes.
- No tienen puntos comunes y no existe ningún plano que contenga a ambas. Rectas que se cruzan.

Estudio vectorial:

Dadas dos rectas $r \equiv (P : \vec{u})$ y $s \equiv (Q : \vec{v})$ del espacio:

Estudiando el rango de los vectores $(\vec{u}, \vec{v})$ y $\overrightarrow{PQ}$ los casos que se pueden presentar son:

- ☞ $rg(\vec{u}, \vec{v}) = 2$ y $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 3$ entonces las rectas r y s se cruzan.
- ☞ $rg(\vec{u}, \vec{v}) = 2$ y $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2$ entonces las rectas r y s se cortan (secantes).
- ☞ $rg(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ y $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2$ entonces rectas paralelas estrictas.
- ☞ $rg(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ y $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1$ entonces rectas paralelas coincidentes.

Definición 1.21 (Radiación de rectas) Se denomina radiación de rectas de vértice el punto P (Fig.1.14) al conjunto de todas las rectas del espacio afín que pasan por P .

Forma vectorial: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{u}, \forall \vec{u} \neq \vec{0}$

Forma continua: Si $P(x_0, y_0, z_0)$, y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ la ecuación de la radiación es:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

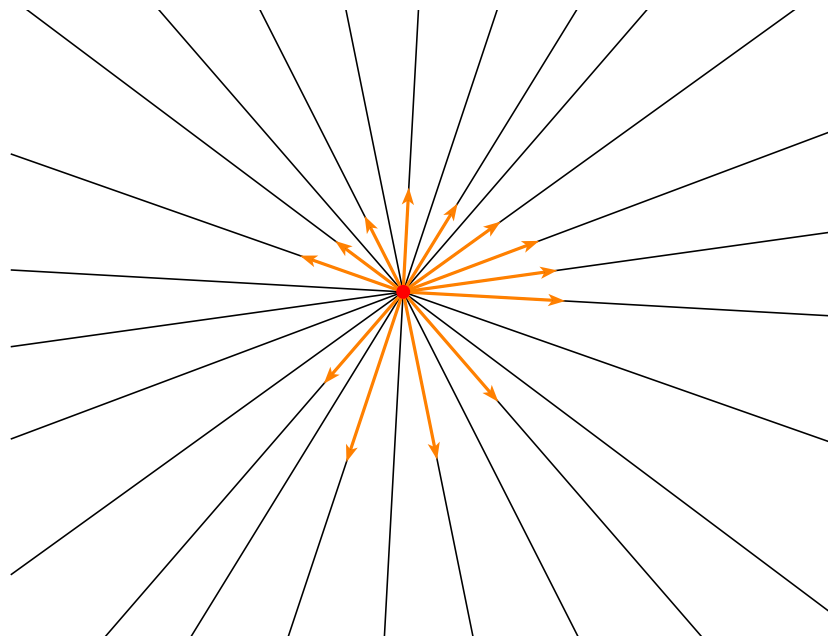


Figura 1.14: Radiación de rectas

1.4.2. Incidencia de planos

Definición 1.22 (Planos paralelos) Dos planos π y π' son paralelos si son iguales o bien no tienen ningún punto en común. Es decir:

$$\pi \parallel \pi' \text{ si y sólo si } \pi = \pi' \text{ o } \pi \cap \pi' = \emptyset$$

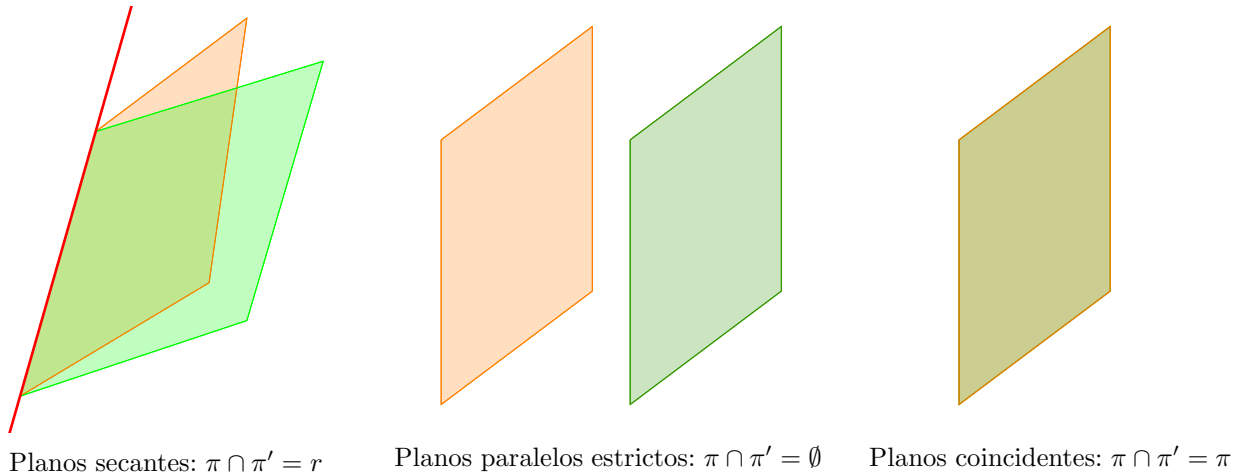
Proposición 1.14 (Posición relativa de dos planos)

Figura 1.15: Posición relativa de dos planos

Forma vectorial Los planos vienen determinados por sus ecuaciones vectoriales:

$$\pi \equiv (P, \vec{u}, \vec{v}) \text{ y } \pi' \equiv (P', \vec{u}', \vec{v}')$$

Entonces:

$$\Rightarrow \text{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}') = 3 \Rightarrow \pi \cap \pi' = r$$

$$\Rightarrow \text{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}') = 2. \text{ Estudiamos dos casos:}$$

$$\blacksquare \text{rg}(\overrightarrow{PP'}, \vec{u}, \vec{v}) = 3 \Rightarrow \pi \parallel \pi'$$

$$\blacksquare \text{rg}(\overrightarrow{PP'}, \vec{u}, \vec{v}) = 2 \Rightarrow \pi = \pi'$$

En forma implícita: Consideremos los planos de ecuaciones implícitas:
$$\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

La posición relativa de los dos planos es equivalente a estudiar si tienen puntos en común o no, es decir, resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones implícitas (cartesianas) de los dos planos siendo la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \end{array} \right)$$

Cómo los coeficientes A, B, C de la ecuación de un plano no pueden ser simultáneamente nulos, los posibles rangos de la matrices son 1 ó 2.

Caso 1: Si $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M^*) = 2$. Por el teorema de Rouché, el sistema es compatible e indeterminado, la solución depende de un parámetro. Geométricamente los puntos están situados en la recta solución del sistema.

Caso 2: Si $\text{rg}(M) = 1$ y $\text{rg}(M^*) = 2$. En este caso el sistema es incompatible (no tiene solución), no hay puntos en común, por lo tanto los planos son paralelos.

$$\text{Condición de paralelismo entre planos: } \pi \parallel \pi' \iff \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \neq \frac{D}{D_1}$$

Caso 3: Si $\text{rg}(A) = 1$ y $\text{rg}(A^*) = 1$. En este caso, el sistema resulta compatible e indeterminado, la solución depende de dos parámetros. Geométricamente los infinitos puntos en común, están situados en un plano.

Por ser $rg(M) = rg(M^*) = 1 \exists \lambda$ tal que el vector $(A_1, B_1, C_1, D_1) = \lambda \cdot (A, B, C, D)$ y por lo tanto la ecuación del segundo plano es: $\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$.

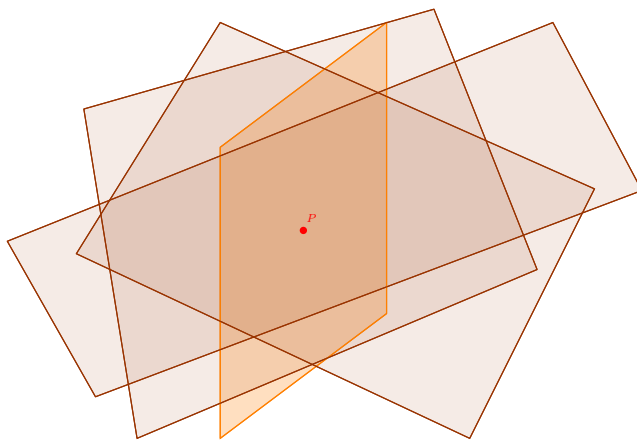
Los dos planos tienen la misma ecuación, por lo tanto son coincidentes.

Condición de planos coincidentes: $\pi = \pi' \iff \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$

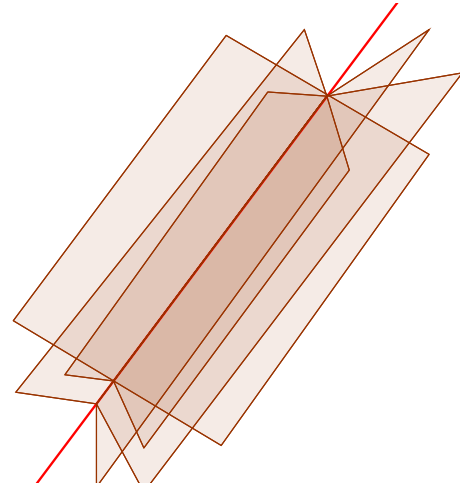
Resumiendo los casos anteriores, las posiciones relativas de dos planos en el espacio son (Fig.1.15) (observar que dos planos en el espacio no pueden cortarse en un punto):

- ☞ $rg(M) = rg(M^*) = 1 \Rightarrow \pi = \pi'$
- ☞ $rg(M) = 1$ y $rg(M^*) = 2 \Rightarrow \pi \cap \pi' = \emptyset$
- ☞ $rg(M) = rg(M^*) = 2 \Rightarrow \pi \cap \pi' = r$

Definición 1.23 (Radiación de planos) Se denomina radiación de planos de vértice el punto P al conjunto de planos del espacio afín que pasan por P (Fig.(1.16)).



Radiación de planos de vértice P



Haz de planos de arista la recta r

Figura 1.16: Radiación y haz de planos de planos

Dado el punto P de coordenadas (x_0, y_0, z_0) y la ecuación de un plano cualquiera $Ax + By + Cz + D = 0$. Si $P \in \pi$ quiere decir que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Restando nos quedará la ecuación de la radiación de planos de vértice el punto P :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Donde A, B, C no son simultáneamente nulos.

1.4.3. Haz de planos

Definición 1.24 Dada una recta r , se define el haz de planos de arista r al conjunto de planos que contienen a la recta r . (Fig. 1.16)

Dada la recta como intersección de dos planos: $r \equiv \begin{cases} \pi & \equiv & Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ \pi' & \equiv & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0 \end{cases}$

La ecuación del haz de planos con arista la recta r tendrá por ecuación: $\alpha\pi + \beta\pi' = 0$ es decir $\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$

Si $\alpha \neq 0$ entonces la ecuación del haz: $Ax + By + Cz + D + \frac{\beta}{\alpha}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ Llamando a $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$:

$$Ax + By + Cz + D + \lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

Todo plano que satisfaga esta ecuación será un plano perteneciente al haz de planos de arista r y por lo tanto que contiene a la recta r .

Observaciones:

- Para $\lambda = 0$ se obtiene el plano π .
- En la ecuación (1.7) están todos los planos que pasan por la recta r menos uno, el plano π' .

1.4.4. Posición relativa de tres planos en el espacio

De la misma manera, la posición relativa de tres planos (Fig.(1.17)) se determina mediante la discusión del correspondiente sistema de ecuaciones lineales, obteniéndose los siguientes casos (las demostraciones se dejan como ejercicio)

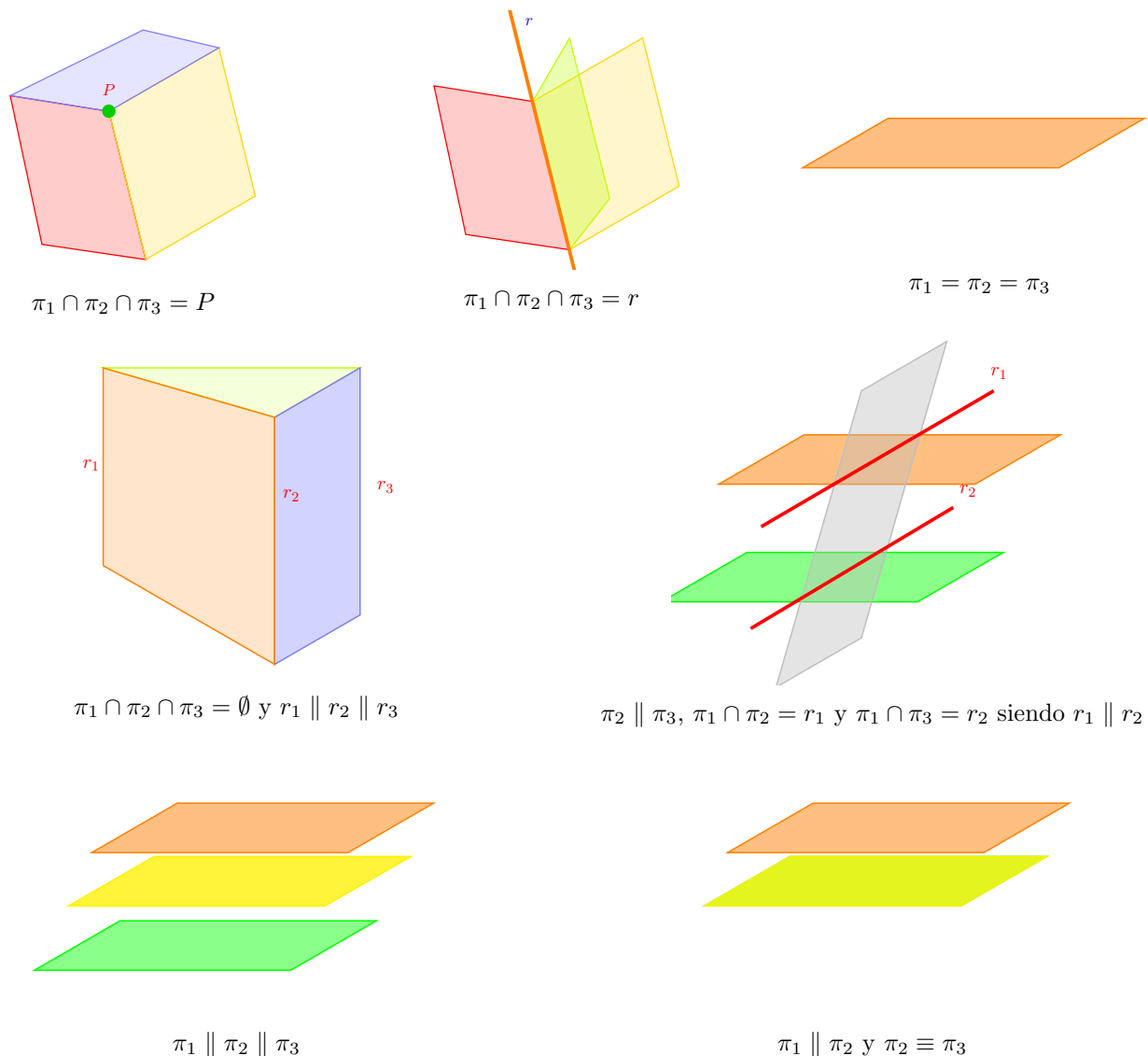


Figura 1.17: Posición relativa de tres planos

Sean los planos:
$$\begin{cases} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$
 y las matrices asociadas al sistema de ecuaciones:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array} \right)$$

1. $rg(M) = rg(M^*) = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible e indeterminado. Al igual que en el caso de dos planos aquí los planos son coincidentes.
2. $rg(M) = rg(M^*) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible e indeterminado. En este caso los planos tienen infinitas soluciones, es decir se cortarán en una recta, es decir que los tres planos pertenecen al haz.
3. $rg(M) = rg(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible y determinado. Los planos se cortan en un punto.
4. $rg(M) = 1$ y $rg(M^*) = 2 \Rightarrow$ Sistema incompatible (los planos no tienen puntos comunes), es decir son paralelos.
5. $rg(M) = 2$ y $rg(M^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible. Hay que estudiar los planos dos a dos a ver si hay algunos paralelos, pudiendo ocurrir:

- Dos son paralelos siendo el tercero secante a ambos:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \text{ y } \pi_1 \cap \pi_3 = r_1 \text{ y } \pi_2 \cap \pi_3 = r_2$$

(El tercer plano corta a los otros dos en dos rectas, lógicamente paralelas entre si).

- Los planos se cortan dos a dos en tres rectas.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = r_1, \quad \pi_1 \cap \pi_3 = r_2, \quad \pi_2 \cap \pi_3 = r_3$$

(los planos se cortan dos a dos en sendas rectas, dando lugar por tanto a tres rectas que serán paralelas entre si).

1.4.5. Posiciones relativas de recta y plano

Sean r una recta y π un plano del espacio.

Definición 1.25 (Recta y plano paralelos) Se dice que r es paralela a π si r está contenida en π o si r y π no tienen puntos comunes.

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow r \subset \pi \text{ o } r \cap \pi = \emptyset$$

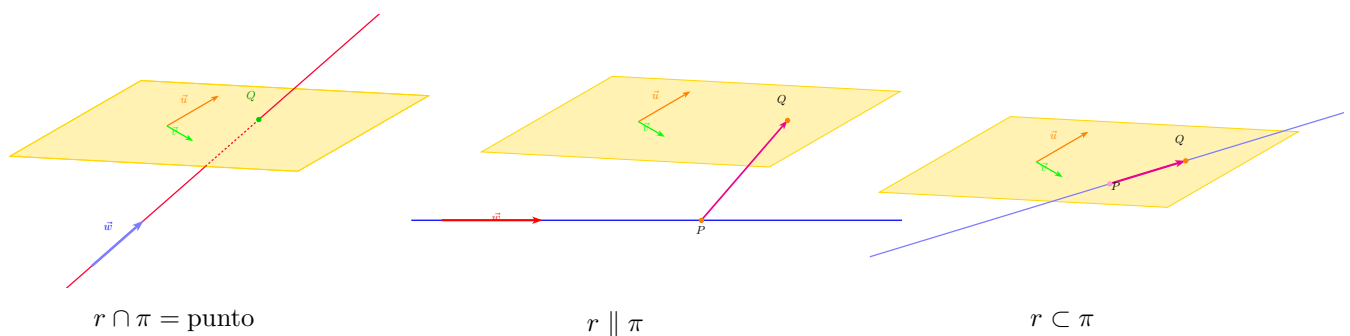


Figura 1.18: Posición relativa de recta y plano

Estudio en forma vectorial

Sea la recta $r \equiv (P; \vec{w})$ y el plano $\pi \equiv (Q; \vec{u}, \vec{v})$

Discusión:

1. Si $rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3$ entonces $r \cap \pi$ es un punto.
2. Si $rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$, y teniendo en cuenta que el $rg(\vec{v}, \vec{w}) = 2$ por que determinan el plano π , podemos distinguir dos casos:
 - a) Si $rg(\vec{PQ}, \vec{v}, \vec{w}) = 3$ entonces $r \parallel \pi$
 - b) Si $rg(\vec{PQ}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$ entonces $r \subset \pi$

Entonces **la condición necesaria y suficiente** para que una recta y un plano sean paralelos es $rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$.

Estudio en forma implícita Supongamos que la recta r viene determinada por

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Y la ecuación de π es $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$. Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Consideremos las matrices del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array} \right)$$

Dado que las dos primeras filas representan dos planos que se cortan en una recta(r), el rango es 2.

Se pueden presentar los siguientes casos:

Discusión del sistema:

1. Si $rg(M) = rg(M^*) = 3$
En este caso el sistema es compatible y determinado, es decir que habrá solución única, o sea $\exists P(a, b, c)$ que es la intersección de la recta y el plano.
2. Si $rg(M) = 2$ y $rg(M^*) = 3$
En este caso el sistema es incompatible, y la recta y el plano no tienen puntos en común, es decir $r \parallel \pi$.
3. Si $rg(M) = rg(M^*) = 2$
En este caso, al ser el rango 2, quiere decir que una ecuación (p.e. la del plano) es c.l. de las otras dos y por tanto $\exists \lambda, \mu$ tal que

$$A''x + B''y + C''z + D'' = \lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D')$$

Por lo tanto el plano π pertenece al haz de planos de arista r , o sea que π contiene a la recta r .