

## 5.1. Geometría afín

① Dados los puntos  $P(-3, 5, 6)$  y  $Q(2, -1, 4)$ :

- a) Calcular las componentes del vector  $\overrightarrow{PQ}$ .
- b) Escribir el espacio vectorial engendrado por el vector  $\overrightarrow{PQ}$ . ¿Qué dimensión tiene?
- c) Calcular el punto medio del segmento  $\overline{PQ}$ .
- d) Hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento  $\overline{PQ}$  en tres partes iguales.

a) Calcular las componentes del vector  $\overrightarrow{PQ}$ .

$$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 4) - (-3, 5, 6) = (5, -6, -2)$$

b) Escribir el espacio vectorial engendrado por el vector  $\overrightarrow{PQ}$ . ¿Qué dimensión tiene?

El subespacio vectorial está formado por todos los vectores que son combinación lineal del vector  $\overrightarrow{PQ}$ .

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{v} \in V_3 \mid \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

La dimensión del subespacio lineal es  $\dim \mathcal{F} = 1$

c) Calcular el punto medio del segmento  $\overline{PQ}$

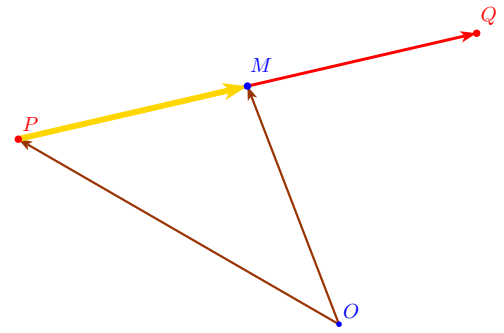
- Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (-3, 5, 6) + \frac{1}{2}(5, -6, -2) = \\ &= (-3, 5, 6) + \left(\frac{5}{2}, -3, -1\right) = \left(-\frac{1}{2}, 2, 5\right)\end{aligned}$$

- Fórmula:

$$M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{5+(-1)}{2}, \frac{6+4}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}, 2, 5\right)$$

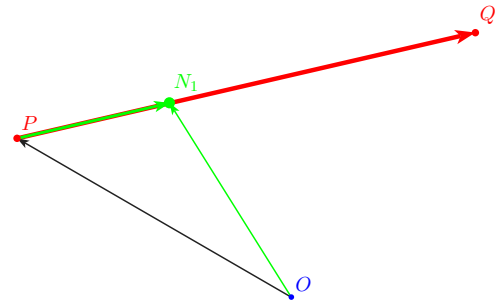
Las coordenadas del punto medio son  $M\left(-\frac{1}{2}, 2, 5\right)$



d) Hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento  $\overline{PQ}$  en tres partes iguales.

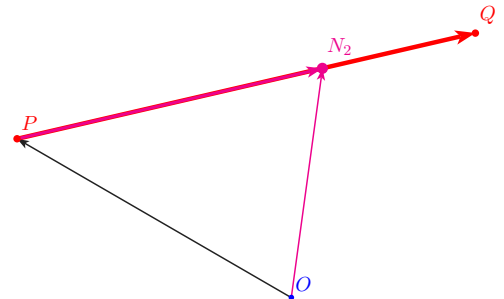
Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON_1} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 5, 6) + \frac{1}{3}(5, -6, -2) = \\ &= (-3, 5, 6) + \left(\frac{5}{3}, -2, -\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 3, \frac{16}{3}\right)\end{aligned}$$



Vectorialmente:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON_2} &= \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 5, 6) + \frac{2}{3}(5, -6, -2) = \\ &= (-3, 5, 6) + \left(\frac{10}{3}, -4, -\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{14}{3}\right)\end{aligned}$$



Los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales son  $N_1\left(-\frac{4}{3}, 3, \frac{16}{3}\right)$  y  $N_2\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{14}{3}\right)$

② Dados los vectores  $\vec{u}_1 = (0, 1, 3)$ ,  $\vec{u}_2 = (2 - a, 1, a)$  y  $\vec{u}_3 = (3, 1, a)$ :

- Estudiar, según los valores del parámetro  $a$ , cuando forman una base de  $V_3$ .
- Hallar la ecuación vectorial del plano  $\pi$  determinado por los vectores  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  y el punto  $P(2, -3, 4)$  para  $a = 4$ .
- Hallar la ecuación general del plano  $\pi$ .

a) Estudiar, según los valores del parámetro  $a$ , cuando forman una base de  $V_3$ .

La dimensión del espacio vectorial es  $\dim V_3 = 3$ .

Tres vectores linealmente independientes forman UNA base de  $V_3$ .

Forman base si  $\text{rang}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 3$ . No forman base, vectores linealmente dependientes, si

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2-a & 1 & a-3 \\ 3 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2-a & a-3 \\ 3 & a-3 \end{vmatrix} = -(a-3) \begin{vmatrix} 2-a & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (a-3)(a+1) \end{aligned}$$

$$\det(M) = 0 \iff \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ , vectores linealmente independientes. Base del espacio vectorial  $V_3$

Si  $a = -1$  o  $a = 3$ , vectores linealmente dependientes. NO forman base del espacio vectorial  $V_3$

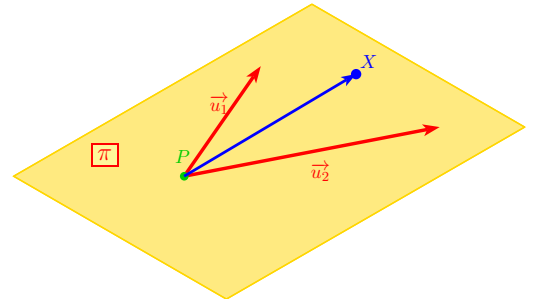
- b) Hallar la ecuación vectorial del plano  $\pi$  determinado por los vectores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  y el punto  $P(2, -3, 4)$  para  $a = 4$ .

Si  $a = 4$  entonces  $\vec{u}_1 = (0, 1, 3)$  y  $\vec{u}_2 = (-2, 1, 4)$ , los vectores son linealmente independientes, no son proporcionales, forman un plano vectorial.

El plano afín determinado por el punto  $P$  y los dos vectores:  $\pi \equiv (P; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$

Ecuación vectorial del plano  $\pi$ . Sea  $X$  un punto genérico del espacio:

$X \in \pi \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\overrightarrow{PX} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$   
entonces:



$$\pi \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ o } \pi \equiv \vec{x} = \vec{p} + \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- c) Hallar la ecuación general del plano  $\pi$ .

En componentes:  $(x, y, z) = (2, -3, 4) + \alpha(0, 1, 3) + \beta(-2, 1, 4)$

Ecuaciones paramétricas del plano:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-2) \\ y = -3 + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 \\ z = 4 + \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 4 \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Despejando:  $\begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-2) = x - 2 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = y + 3 \\ \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 4 = z - 4 \end{cases}$ . Es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas,  $(\alpha, \beta)$  que es compatible determinado.

Escribiendo en forma matricial el sistema:  $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \\ z-4 \end{pmatrix}$

Matriz de los coeficientes:  $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada:  $M^* = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -2 & x-2 \\ 1 & 1 & y+3 \\ 3 & 4 & z-4 \end{array} \right)$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius:  $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$  (el  $\text{rang}(M) = 2$ , los vectores son LINEALMENTE INDEPENDIENTES). Entonces  $\det(M^*) = 0$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & x-2 \\ 1 & 1 & y+3 \\ 3 & 4 & z-4 \end{vmatrix} = (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (y+3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (z-4) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2) - (y+3) \cdot 6 + (z-4) \cdot 2 = 0 \implies x - 6y + 2z - 28 = 0$$

La ecuación general del plano es  $\pi \equiv x - 6y + 2z - 28 = 0$

③ Sean el plano  $\pi \equiv ax + 2y - 4z = b$  y la recta  $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = z+3$

- Con  $a = 1$ , estudia la posición relativa de la recta y el plano.
- Siguiendo con  $a = 1$ , calcula  $b$  para que el punto  $(3, 1, -3)$  pertenezca a la recta y al plano.
- Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$ .

a) Con  $a = 1$ , estudia la posición relativa de la recta y el plano.

Estudiar la posición relativa de recta plano es hallar si tienen punto(s) en común o no.

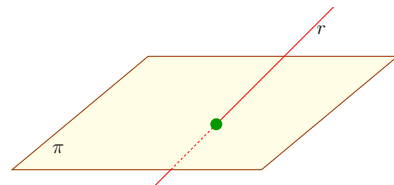
La recta en forma paramétrica:  $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 4\alpha \\ y = 1 - 4\alpha \\ x = -3 + \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Los puntos situados en la recta tienen

de coordenadas  $P(3 + 4\alpha, 1 - 4\alpha, -3 + \alpha)$ , sustituyendo en la ecuación del plano  $\pi$ :

$$3 + 4\alpha + 2(1 - 4\alpha) - 4(-3 + \alpha) = b \implies 8\alpha = 17 - b \text{ entonces}$$

$$\alpha = \frac{17 - b}{8} \implies \forall b \in \mathbb{R} \text{ existe } \alpha$$

La recta y el plano tienen un único punto en común



b) Siguiendo con  $a = 1$ , calcula  $b$  para que el punto  $(3, 1, -3)$  pertenezca a la recta y al plano.

El punto  $P(3, -1, 3) \in r$  (fijarse en la ecuación de la recta  $r$  para  $\alpha = 0$ ).

Dos formas de proceder:

- Con el apartado anterior  $P \in r \iff \alpha = 0$ . Entonces  $0 = \frac{17 - b}{8} \implies b = 17$

- El punto  $P \in r \cap \pi$  entonces sus coordenadas deben verificar la ecuación del plano  $\pi$ , sustituyendo:

$$3 + 2 + 12 = b \implies b = 17$$

El punto  $P$  pertenece a la recta y el plano si  $b = 17$

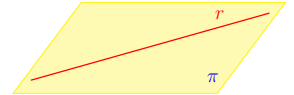
c) *Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$ .*

La recta está contenida en el plano,  $r \subset \pi$  si **todos** los puntos de la recta pertenecen al plano:

- sustituyendo en la ecuación del plano:

$$a(3 + 4\alpha) + 2(1 - 4\alpha) - 4(-3 + \alpha) = b \implies (4a - 12)\alpha = b - 14 - 3a$$

- la ecuación tiene infinitas soluciones si  $\begin{cases} 4a - 12 = 0 \\ y \\ b - 14 - 3a = 0 \end{cases}$ , entonces  $a = 3$  y  $b - 14 - 9 = 0 \implies b = 23$



La recta está contenida en el plano si  $a = 3$  y  $b = 23$

④ Sean los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(a, 2, b)$  y  $C(1, 0, 0)$

- Con  $a = 2$ , calcula  $b$  para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto  $P(2, 0, 1)$   
¿Cuál es la ecuación de dicho plano?
- Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que los puntos  $A, B$  y  $C$  estén alineados.

- Con  $a = 2$ , calcula  $b$  para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto  $P(2, 0, 1)$   
¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

Un plano viene determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes:

$$\pi \equiv (C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \implies \pi \equiv \begin{cases} C(1, 0, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 1, b - 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -1, -1) \end{cases}$$

El punto  $X(x, y, z) \in \pi$  si y sólo si los vectores  $\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  son linealmente dependientes, es decir,  $\text{rang}(\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2$ .

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies (b-2)(x-1) + y - z = 0$$

El punto  $P(2, 0, 1) \in \pi$ , las coordenadas del punto satisfacen la ecuación del plano:

$$(b-2)(2-1) + 0 - 1 = 0 \implies b = 3$$

$P \in \pi$  si  $b = 3$  y la ecuación del plano es  $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$

- Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que los puntos  $A, B$  y  $C$  estén alineados.

Los puntos  $A, B$  y  $C$  están alineados si los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  son linealmente dependientes,  $\text{rang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$ . Las componentes de los vectores son proporcionales:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a-1, 1, b-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -1, -1) \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \frac{a-1}{0} = \frac{1}{-1} = \frac{b-1}{-1} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Los puntos  $A, B$  y  $C$  están alineados si  $a = 1$  y  $b = 2$

⑤ Dados el punto  $A(1, 1, 1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$  Calcula:

- a) Un vector  $\vec{u}$  director de la recta  $r$ .  
b) El plano  $\pi$  que contiene a la recta  $r$  y al punto  $A$ .

a) Un vector  $\vec{u}$  director de la recta  $r$ .

La recta viene expresada como intersección de dos planos secantes, los puntos del espacio que pertenecen a la recta son la solución del sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + y \\ z = -1 + y \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \text{Ecuación paramétrica de la recta } r.$$

UN vector director de la recta es  $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$

b) El plano  $\pi$  que contiene a la recta  $r$  y al punto  $A$ .

- Haz de planos de arista la rectas  $r$ :  $\begin{cases} x - y + 1 + \lambda(y - z - 1) = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .
- El punto  $A(1, 1, 1) \in \pi$  entonces sus coordenadas deben cumplir la ecuación del plano, sustituyendo:

$$1 - 1 + 1 + \lambda(1 - 1 - 1) = 0 \implies 1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$$

Sustituyendo en el haz de planos:  $\pi \equiv x - y + 1 + 1 \cdot (y - z - 1) = 0 \implies x - z = 0$

La ecuación del plano  $\pi$  es  $x - z = 0$

⑥ Un plano  $\pi$  determina sobre la parte positiva de los ejes  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$  tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 m respectivamente.

- a) Hallar la ecuación del plano  $\pi$ .  
b) Hallar la ecuación de la recta  $r$  que contiene a los puntos  $A(2, 0, 3)$  y  $B(0, 6, a)$  y estudiar la posición relativa de  $\pi$  y  $r$  según los valores de  $a$ .  
c) Para el caso  $a = 2$ , hallar el punto donde se cortan  $\pi$  y  $r$ .

a) Hallar la ecuación del plano  $\pi$ .

- El plano viene determinado por los puntos  $P(2, 0, 0)$ ,  $Q(0, 3, 0)$  y  $R(0, 0, 4)$ , puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Ecuación segmentaria del plano:  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

La ecuación del plano  $\pi$  es  $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

b) Hallar la ecuación de la recta  $r$  que contiene a los puntos  $A(2, 0, 3)$  y  $B(0, 6, a)$  y estudiar la posición relativa de  $\pi$  y  $r$  según los valores de  $a$ .

- La recta viene determinada por UN punto y UN vector director, no nulo:  $r \equiv \begin{cases} A(2, 0, 3) \\ \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 6, a - 3) \end{cases}$
- Ecuación paramétrica de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 6\alpha \\ z = 3 + (a - 3)\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- La posición relativa de la recta y el plano viene determinada por si hay punto(s) en común o no.  
Las coordenadas de todos los puntos situados en la recta son

$$(2 - 2\alpha, 6\alpha, 3 + (a - 3)\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

sustituyendo en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} 6(2 - 2\alpha) + 4 \cdot (6\alpha) + 3[3 + (a - 3)\alpha] &= 12 \implies 12 - 12\alpha + 24\alpha + 9 + 3(a - 3)\alpha = 12 \\ (12 + 3a - 9)\alpha &= -9 \implies 3(a + 1)\alpha = -9 \implies (a + 1)\alpha = -3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si  $a = -1$  entonces  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 = -3$ , NO TIENE SOLUCIÓN. Interpretación geométrica:

El plano y la recta NO tienen ningún punto en común. El plano y la recta son paralelos.

Si  $a \neq -1$  entonces existe una única solución para el parámetro  $\alpha$ .

El plano y la recta tienen UN ÚNICO punto en común. El plano y la recta son secantes.

c) Para el caso  $a = 2$ , hallar el punto donde se cortan  $\pi$  y  $r$ .

Sustituyendo en (5.2):  $3\alpha = -3 \implies \alpha = -1$

Sustituyendo en (5.1): El punto de intersección es  $C(4, -6, 4)$

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  se cortan en el punto  $C(4, -6, 4)$

⑦ a) Demostrar que las rectas  $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3$  y  $s \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -7 + 2\lambda \end{cases}$  determinan un

plano  $\pi_1$ . Hallar su ecuación.

b) Estudiar la posición relativa de los planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2 \equiv 5x + 2y + 7z - 4 = 0$  y  $\pi_3 \equiv x + 2y - 3z - 10 = 0$ .

a) Demostrar que las rectas  $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3$  y  $s \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -7 + 2\lambda \end{cases}$  determinan un plano  $\pi_1$ . Hallar su ecuación.

Dos rectas determinan un plano en el espacio si verifican una de las siguientes opciones:

- Las rectas son secantes:  $r \cap s = \text{punto}$
- Las rectas son paralelas estrictas:  $r \parallel s$

Posición relativa de dos rectas en el espacio:  $r \equiv \begin{cases} P(-3, -3, -3) \\ \vec{u}_r = (2, 3, 1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} Q(-2, 0, -7) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 2) \end{cases}$

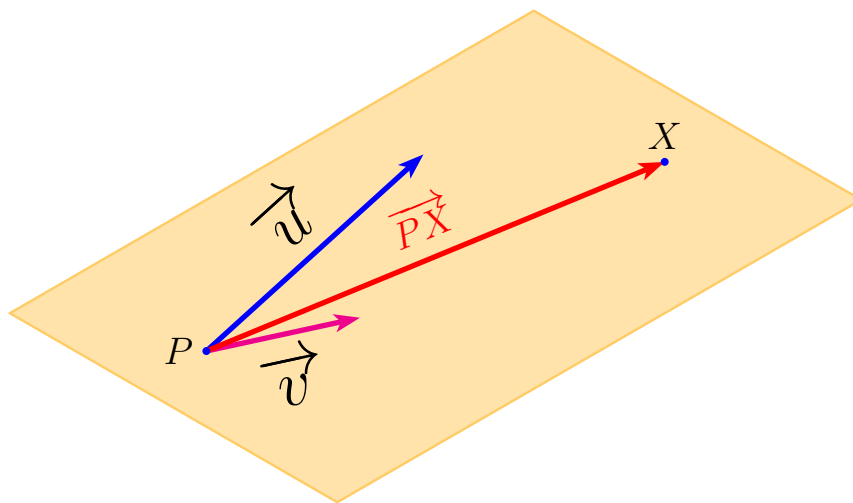
Los vectores directores no son proporcionales:

$\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$ , las rectas NO SON PARALELAS.

Estudio del  $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ})$  siendo  $\vec{PQ} = (1, -3, 4)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 2$$

Las rectas son secantes, determinan un plano



El plano  $\pi_1$  viene determinado por un punto,  $P$ , y los dos vectores directores de las rectas.  
 $X \in \pi \iff \text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PX}) = 2 \implies \det[\vec{PX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+3 & z+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5(x+3) - 3(y+3) - 1 \cdot (z+3) = 5x - 3y - z + 3$$

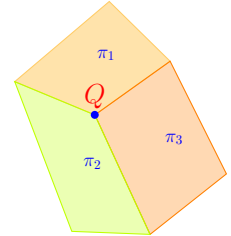
La ecuación del plano es  $\pi_1 \equiv 5x - 3y - z + 3 = 0$

b) Estudiar la posición relativa de los planos  $\pi_1, \pi_2 \equiv 5x + 2y + 7z - 4 = 0$  y  $\pi_3 \equiv x + 2y - 3z - 10 = 0$ .

Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 10 \\ 5 & -3 & -1 & | & -3 \\ 5 & 2 & 7 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3=f_3+(-1)f_2]{f_2=f_2+(-2)f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 10 \\ 0 & -13 & 14 & | & -53 \\ 0 & 5 & 8 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3=13 \cdot f_3]{f_2=5 \cdot f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 10 \\ 0 & -65 & 70 & | & -265 \\ 0 & 65 & 104 & | & 91 \end{pmatrix} \sim \\
 \xrightarrow[f_3=f_3+f_2]{f_2=f_2+(-1)f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 10 \\ 0 & -13 & 14 & | & -53 \\ 0 & 0 & 174 & | & -174 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 10 \\ 0 & -13 & 14 & | & -53 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{rang}(M) = 3 \\ \text{rang}(M^*) = 3 \\ \text{Número de incógnitas} = 3 \end{cases} \xrightarrow{TRF} \text{Sistema compatible determinado}$$



Los tres planos se cortan en UN PUNTO:  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = Q(1, 3, -1)$

⑧ Sea el plano  $\pi \equiv kx - y + 2z = 1$  y la recta  $r \equiv \frac{x}{-6} = y + 1 = \frac{z}{2}$ :

- Estudiar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $r$  según los valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$ .
- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y pase por el punto  $P(1, 1, 1)$ .

a) Estudiar la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $r$  según los valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$ .

Forma vectorial:

Ecuación vectorial del plano  $\pi$ :

$$kx - y + 2z = 1 \implies y = -1 + kz + 2z \implies \pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + k\alpha + 2\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

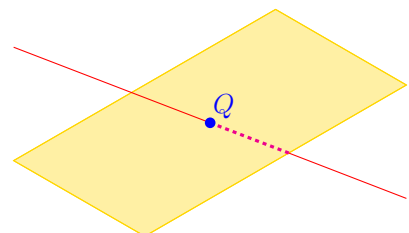
$$\begin{aligned} r : & \begin{cases} Q(0, -1, 0) \\ \vec{u} = (-6, 1, 2) \end{cases} \\ \pi : & \begin{cases} R(0, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, k, 0) \\ \vec{w} = (0, 2, 1) \end{cases} \quad \text{Rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2 \iff \det[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 6k = 0 \implies k = \frac{1}{2}$$

▪  $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

$\text{Rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3$ , la recta y el plano se cortan en el punto  $Q$  que pertenece a la recta y el plano.

$$r \cap \pi = Q(0, -1, 0)$$

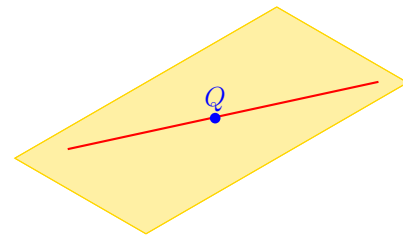


$$\blacksquare \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2 \text{ entonces } \begin{cases} \text{la recta y el plano son paralelos} \\ \text{o} \\ \text{la recta está contenida en el plano: } r \subset \pi \end{cases}$$

Tienen un punto en común  $Q \equiv R$  entonces:

Si  $k = \frac{1}{2}$  la recta  $r$ , está contenida en plano  $\pi$



b) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y pase por el punto  $P(1, 1, 1)$ .

Ecuación del plano  $\sigma$  que contiene a la recta  $r$  y el punto  $P \in \sigma$ :

**Primer método:**

El plano  $\sigma$  pertenece al haz de planos de arista

$$r \equiv \frac{x}{-6} = y + 1 = \frac{z}{2} \implies \begin{cases} x = -6y - 6 \\ 2x = -6z \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x + 6y + 6 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{El haz de planos de arista la recta } r \equiv \begin{cases} x + 6y + 6 + \lambda(x + 3z) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ x + 3z = 0 \end{cases}.$$

$$P \in \sigma \text{ entonces } 1 + 6 + 6 + \lambda(1 + 3) = 0 \implies \lambda = -\frac{13}{4}$$

Sustituyendo en el haz:  $4x + 24y + 24 - 13z - 39 = 0 \implies 3x - 8y + 13z - 8 = 0$ .

**Segundo método:**

$$\text{El plano } \sigma \equiv \begin{cases} Q(0, -1, 0) \in r \\ \vec{u} = (-6, 1, 2) \\ \vec{QP} = (1, 2, 1) \end{cases} \text{ viene determinado por un punto y dos vectores linealmente inde-}$$

pendientes. Sea  $X(x, y, z) \in \sigma$ , el  $\text{rang}(\vec{PX}, \vec{u}, \vec{QP}) = 2$ :

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} x & y + 1 & z \\ -6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -3x + 8(y + 1) - 13z = 0 \implies \sigma \equiv 3x - 8y + 13z - 8 = 0$$

La ecuación del plano es  $\sigma \equiv 3x - 8y + 13z - 8 = 0$

⑨ Hallar la recta paralela a los planos  $\pi_1 \equiv 2x + 5y - z = 2$  y  $\pi_2 \equiv 6x - y + z = 8$  que pasa por el punto  $P(1, 5, -3)$ .

**Primer método:**

Los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  no son paralelos (coeficientes no proporcionales). Su intersección es la recta  $s \equiv \begin{cases} 2x + 5y - z = 2 \\ 6x - y + z = 8 \end{cases}$ .

La recta  $r$  es paralela a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , es decir, es PARALELA a la recta  $s$  intersección de los dos planos:

La recta  $s$  en forma paramétrica (resolver el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 & 8 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{5}{2} - 2\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{4} - 8\alpha \end{cases}$$

Un vector director de la recta  $s$  es  $\vec{v}_s = (1, -2, -8)$  y  $r \parallel s$  entonces  $\vec{v}_s$  es un vector director de  $r$ .

La recta  $r$  :  $\begin{cases} P(1, 5, -3) \\ \text{Un vector director: } \vec{v}_s = (1, -2, -8) \end{cases}$ .

$$\text{La recta } r \text{ en forma continua: } r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+3}{-8}$$

**Segundo método:**

La recta  $r$  es la intersección de los planos,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  que pasan por el punto  $P$  tal que  $\begin{cases} \sigma_1 \parallel \pi_1 \\ \sigma_2 \parallel \pi_2 \end{cases}$ .

La ecuación de todos los planos que pasan por el punto  $P$ :  $A(x-1) + B(y-5) + C(z+3) = 0$

$\sigma_1 \parallel \pi_1$  condición de planos paralelos (coeficientes proporcionales):  $\sigma_1 \equiv 2(x-1) + 5(y-5) - 1(z+3) = 0$ .

$\sigma_2 \parallel \pi_2$  condición de planos paralelos (coeficientes proporcionales):  $\sigma_2 \equiv 6(x-1) - 1(y-5) + 1(z+3) = 0$ .

Desarrollando:

$$\text{La recta } r \text{ en forma de intersección de dos planos: } r \equiv \begin{cases} 2x + 5y - z = 30 \\ 6x - y + z = -2 \end{cases}$$