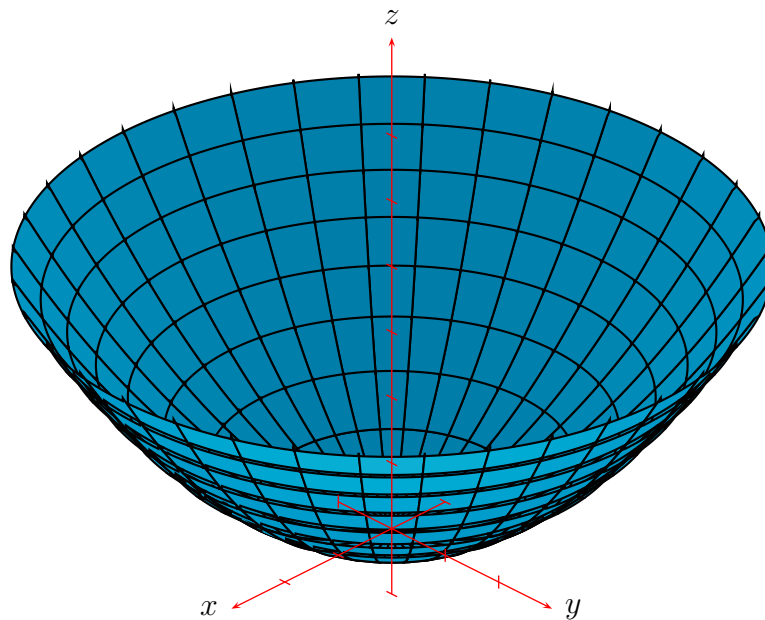


Institut Joan Ramon Benaprès



Departament de Matemàtiques

Problemes de selectivitat

Tecnològic-Científic

|    |                   |    |
|----|-------------------|----|
| 1  | Selectivitat-2002 | 2  |
| 2  | Selectivitat-2003 | 6  |
| 3  | Selectivitat-2004 | 10 |
| 4  | Selectivitat-2005 | 15 |
| 5  | Selectivitat-2006 | 18 |
| 6  | Selectivitat-2007 | 21 |
| 7  | Selectivitat-2008 | 24 |
| 8  | Selectivitat-2009 | 28 |
| 9  | Selectivitat-2010 | 32 |
| 10 | Selectivitat-2011 | 37 |
| 11 | Selectivitat-2012 | 40 |
| 12 | Selectivitat-2013 | 44 |
| 13 | Selectivitat-2014 | 49 |

### QÜESTIONS

1. Calculeu la primitiva de la funció  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$  que s'anul·la en el punt d'abscissa  $x = 2$ .
2. Determineu el valor que ha de tenir  $k$  perquè la funció  $f(x) = \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$  tingui límit quan  $x$  tendeix a 2 (és a dir, existeix  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ) i calculeu el valor que tindrà aquest límit.
3. Considereu els plans d'equacions:  $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 3$  i  $\pi_2 \equiv ax + (a - 2)y + 2z = 4$ 
  - (a) Hi ha algun valor del paràmetre  $a$  per al qual la intersecció del plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  no és una recta?
  - (b) Calculeu un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de  $\pi_1$  i  $\pi_2$  per al valor del paràmetre  $a = 0$ .
4. Considereu la recta  $r$  d'equacions:  $x - 1 = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z - 7}{-4}$ . Calculeu els punts d'aqueta recta situats a una distància 3 del punt  $A(1, 0, 1)$ .

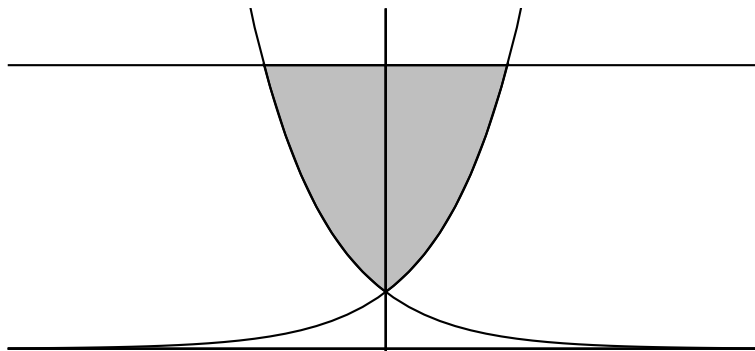
### PROBLEMES

5. S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de  $81\pi \text{ m}^3$  de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 €/el  $\text{m}^2$  i les dues bases amb un material que costa 45 €/el  $\text{m}^2$ .
  - (a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi  $r$  de las bases circulars i l'altura  $h$  del cilindre, i doneu el cost  $C(r)$  del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de  $r$ .
  - (b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
  - (c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

6. D'un paral·lelogram sabem que el costat més llarg mesura 20cm, que la seva àrea és de  $120\text{cm}^2$  i que l'angle més petit val  $30^\circ$ . Determineu:
- El valor de l'altre angle del paral·lelogram.
  - La longitud del costat petit.
  - El que mesura la diagonal més llarga.

### QÜESTIONS

7. Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes  $y = e^{2x}$  i  $y = e^{-2x}$  i la recta  $y = 5$  representada en l'esquema següent:



8. Sabent que la funció  $y = (x + a)(x^2 - 4)$ , on  $a$  és un nombre real, té un màxim i un mínim relatiu, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt  $x = -\frac{1}{3}$ , trobeu l'abscissa del mínim relatiu.
9. Sigui  $f(x) = \frac{mx - 1}{x - 1}$ , on  $m$  és un paràmetre.
- Determineu per a cada valor del paràmetre  $m$  el valor del límit  $\lim_{x \rightarrow 1}$  (si existeix).
  - Per a quins valors de  $m$  la derivada  $f'(x)$  de la funció  $f(x)$  és positiva per a tot  $x$ ?
10. Calculeu l'angle que forma el pla  $x - 2y + z = 1$  amb la recta determinada per les equacions
- $$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

### PROBLEMES

11. Considereu les rectes  $r$  i  $s$  amb les equacions següents:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y + \frac{1}{3} = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

- Calculeu, de cada una de les rectes, un punt i un vector director.
- Determineu si existeix cada un dels objectes següents i en cas afirmatiu calculeu la seva equació:
  - El pla paral·lel a la recta  $s$  que conté la recta  $r$ .

- (ii) El pla perpendicular a la recta  $s$  que conté la recta  $r$ .
- (iii) La recta perpendicular a les rectes  $r$  i  $s$  que passa per  $(0, 0, 0)$ .

12. Sobre una circumferència de radi 1 m i centre en el punt  $O$  considerem els cinc vèrtexs  $A, B, C, D, E$  d'un pentàgon regular (és a dir, amb els cinc costats de la mateixa longitud) com el del dibuix següent: (on hem dibuixat també els costats  $AB, BC, CD$  i  $DE$ ; les diagonals  $AC,$

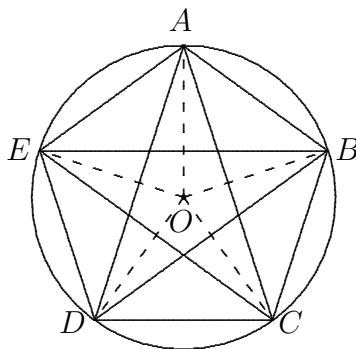


Figura 1.1: Problema 12

$BD, CE, DA$  i  $EB$ ; i els radis que acaben en cada un dels vèrtexs  $OA, OB, OC, OD$  i  $OE$ ). Calculeu:

- (a) L'angle que formen el radi que acaba en el vèrtex  $A$  amb el costat  $AB$  i l'angle que formen en el vèrtex  $A$  els dos costats que el tenen com a extrem (és a dir, l'angle  $A$  entre els costats  $EA$  i  $AB$ ).
- (b) La longitud de cada un dels costats del pentàgon.
- (c) La longitud de qualsevol de les diagonals (per exemple la  $EB$ ).
- (d) L'àrea del triangle  $EAB$ .

## QÜESTIONS

13. Calculeu el valor positiu de  $a$  que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació  $y = ax + 2a$  i la paràbola  $y = ax^2$  valgui 18.
14. Se sap que la derivada d'una funció  $f(x)$  és:

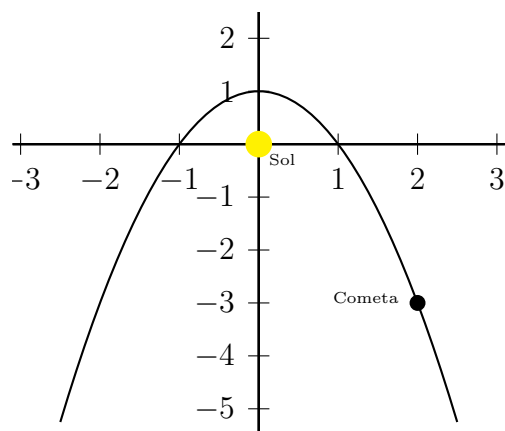
$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$$

Calculeu les abscisses dels punts on la funció  $f(x)$  té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu.

15. Comproveu que la recta que passa pels punts  $A = (4, 0, 0)$  i  $B = (0, 2, 2)$  és paral·lela al pla d'equació  $x - 3y + 5z = 2$ , i calculeu la distància entre la recta i el pla.
16. Les agulles d'un rellotge de paret fan 10 i 12 centímetres, respectivament.
- (a) Quina és la distància entre els seus extrems quan el rellotge assenyalava les quatre?
  - (b) Quina és la superfície del triangle que determinen a aquesta hora?

# PROBLEMES

17. Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola  $y = 1 - x^2$ , tal com es veu a la figura següent:



- Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?
  - Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?
  - Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?
  - Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?
18. Considerem el cub de vèrtexs A, B, C, D, E, F, G, H que té l'aresta de longitud 4 dm.

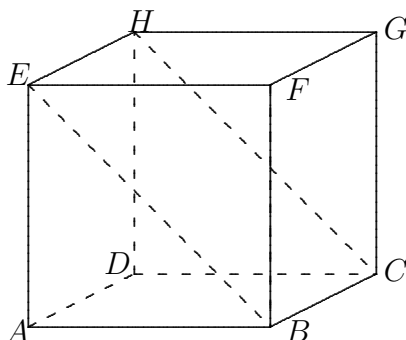


Figura 1.2: Problema 18

- Determineu l'equació del pla inclinat  $EHBC$  si prenem com a origen de coordenades el vèrtex  $D$  i com a eixos de coordenades  $DA, DC$  i  $DH$  en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen  $D$  va cap a  $A, C$  i  $H$ , respectivament.
- Calculeu les equacions de les diagonals  $CE$  i  $AG$  i utilitzeu-les per calcular les coordenades del seu punt d'intersecció.

**QÜESTIONS**

1. Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt  $P = (1, -1)$  i que són tangents a la corba d'equació  $y = (x - 1)^2$

2. Calculeu:

$$\int_1^e \frac{2 \ln^3 x}{x} dx$$

3. Considereu el punt  $P = (5, -2, 9)$  i la recta  $r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$

- (a) Calculeu l'equació de la recta  $s$  que talla perpendicularment  $r$  i que passa per  $P$ .  
(b) Calculeu el punt de tall  $T$  entre les rectes  $r$  i  $s$ .

4. Per a quin o quins valors del paràmetre real  $\lambda$  el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2y + (\lambda + 2)z & = & 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z & = & 9 \\ 2x - z & = & 4 \end{array} \right\}$$

és compatible i indeterminat?

**PROBLEMES**

5. D'un triangle sabem que la suma de les longituds de dos costats  $a$  i  $b$  és d'11 m, que l'angle  $C$  oposat al tercer costat val  $30^\circ$  i que l'àrea és de  $7\text{m}^2$ . Calculeu

- (a) La longitud de cada un dels costats del triangle.  
(b) Els angles del triangle.

6. Volem unir el punt M situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P situat a l'altre costat del carrer i un altre des de P fins a N seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:

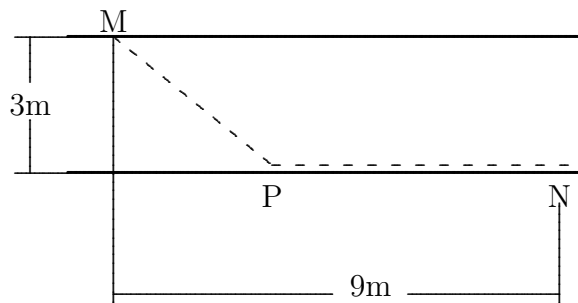
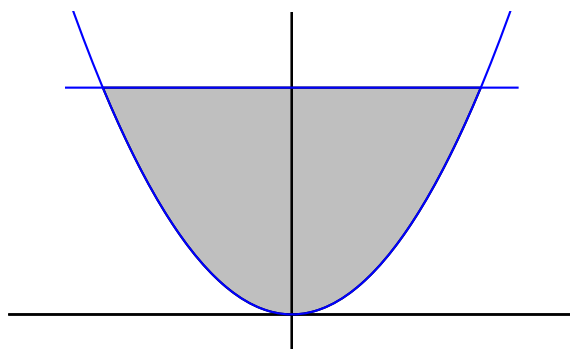


Figura 2.1: Problema 6

El cost de la instal·lació del cable MP és de 12€ per metre i del cable PN de 6€ per metre. Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

### QÜESTIONS

- Determineu quin és el punt de la gràfica de  $y = \sqrt{x}$  (és a dir, de la forma  $(x, \sqrt{x})$ ), que és més a prop del punt  $P = (4, 0)$ .
- Determineu l'equació del pla que conté a la recta:  $x - 1 = \frac{y}{2} = z + 1$  i passa per l'origen de coordenades.
- Considerem la regió S del pla limitada per la paràbola  $y = 3x^2$  i la recta  $y = 3$  representada en l'esquema següent:



Siguin A i B els punts d'intersecció de la recta i la paràbola, i T el triangle que té per vèrtexs A, B i l'origen de coordenades (0,0). Calculeu l'àrea de la regió que resulta quan es treu el triangle T a la regió S.

10. Considereu el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a + 1 \\ 2x - y + az = a + 2 \\ x - y + z = 4 \end{array} \right\}$$

on  $a$  és un paràmetre.

Si  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z = 2$  és una solució, quin és el valor del paràmetre  $a$ ?

### PROBLEMES

11. (a) Determineu el valor del paràmetre  $a$  que fa que la funció

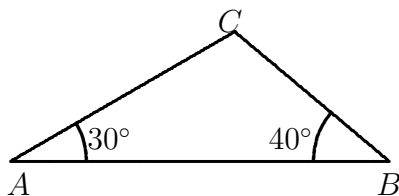
$$f(x) = \frac{x+a}{x^3}$$

presenti un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 3$ .

- (b) Per a aquest valor del paràmetre  $a$ , calculeu els intervals de creixement i decreixement, i les asímptotes de la funció.
- (c) A partir de les dades que heu obtingut, feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.
12. Al terrat d'un edifici hi ha instal·lada una antena de telefonia mòbil. Des d'un punt  $P$  del carrer, l'angle entre l'horitzontal i la línia que va de  $P$  cap a l'extrem superior de l'antena és de  $34^\circ$ . Ens apropem fins a un punt  $Q$  que és 15 metres més a prop de l'edifici i ara l'angle entre l'horitzontal i la línia que apunta cap a l'extrem superior de l'antena és de  $42^\circ$ , mentre que l'angle entre l'horitzontal i la línia que apunta cap a l'extrem inferior de la mateixa antena és de  $35^\circ$ .
- (a) Feu un esquema de la situació marcant molt clarament quins són els angles que es donen a l'enunciat.
- (b) Calculeu les distàncies de  $Q$  als dos extrems de l'antena.
- (c) Calculeu l'altura de l'antena i l'altura de l'edifici.

### QÜESTIONS

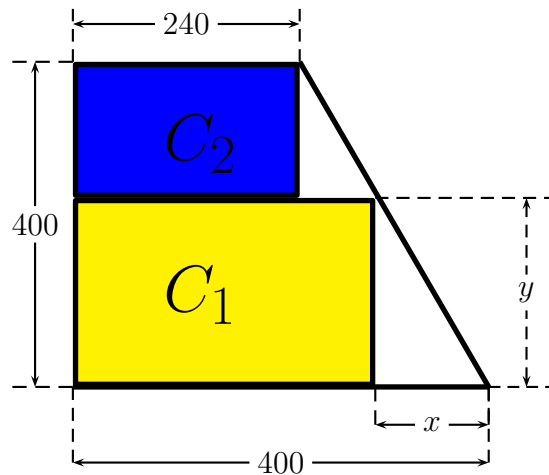
13. Donada  $f(x) = (2x+1)e^{(x^2+x)}$ , determineu la funció  $g(x)$  tal que  $g'(x) = f(x)$  (és a dir, una primitiva de  $f(x)$ ) i que el seu gràfic passa pel punt  $(0, 2)$ .
14. Calculeu el punt de la corba  $y = 2 + x - x^2$  en què la tangent és paral·lela a la recta  $y = x$ .
15. Calculeu l'àrea del triangle  $ABC$  representat en l'esquema següent:



16. Considereu els punts de l'espai  $A = (0, -2a - 1, 4a - 2)$ ,  $B = (1, -3, 4)$ ,  $C = (3, -5, 3)$ .
- (a) Comproveu que el triangle de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$  és rectangle en  $B$  per a qualsevol valor de  $a$ .
- (b) Calculeu els valors de  $A$  que fan que aquest triangle sigui isòsceles.

### PROBLEMES

17. Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars  $C_1$  i  $C_2$ . Anomenem  $x$  i  $y$  els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



- (a) Comproveu que  $y = \frac{5}{2}x$ .
- (b) Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de  $x$ .
- (c) El camp  $C_1$  es vol sembrar amb blat de moro i el camp  $C_2$  amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12€per  $m^2$  i amb el blat un benefici de 0,10€per  $m^2$ . Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim.
18. Un segment d'extrems  $A = (5, 3, 1)$  i  $B = (4, 2, -1)$  es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a aquest segment. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.

**QÜESTIONS**

1. Considereu la funció  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ 
  - (a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 3$ .
  - (b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.
2. Donada la funció:  $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ 
  - (a) trobeu la seva integral indefinida;
  - (b) quina és la primitiva que passa pel punt  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  ?
3. Considereu la funció  $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$  on  $a$  és un paràmetre.
  - (a) Calculeu el valor del paràmetre  $a$  sabent que  $f(x)$  té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 3$ .
  - (b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.
4. Considerem els punts de l'espai  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 2)$  i  $C(-1, 2, 1)$ . Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:
  - (a) aquests punts, estan alineats?
  - (b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?

## PROBLEMES

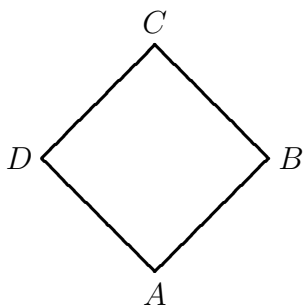
5. Donat el sistema: 
$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1 \end{cases} \quad \text{on } m \text{ és un paràmetre:}$$
- discuti el sistema segons els valors de  $m$ ;
  - resoleu els casos compatibles;
  - en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.
6. Tenim quatre punts a l'espai:  $A(0, 0, 0)$ ;  $B(0, 0, 2)$ ;  $C(0, 2, 0)$  i  $D(2, 0, 0)$ . Es demana:
- representeu gràficament els quatre punts;
  - calculeu el volum del tetraedre (piràmide de base triangular)  $ABCD$ ;
  - trobeu l'equació del pla que passa per  $B$ ,  $C$  i  $D$ ;
  - calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

## QÜESTIONS

7. La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
  - En cas que sigui compatible resoleu-lo.
8. Considereu els punts de l'espai  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 2)$  i  $C(0, -1, -1)$ .
- Trobeu l'equació del pla  $ABC$ .
  - Si  $D$  és el punt de coordenades  $(k, 0, 0)$ , quant ha de valer  $k$  per tal que els quatre punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  siguin coplanaris?
9. Els punts  $A(k-3, 2, 4)$ ,  $B(0, k+2, 2)$  i  $C(-2, 6, k+1)$  són tres dels vèrtexs d'un rombe  $ABCD$  (vegeu la figura).



- Calculeu el valor de  $k$ .
- Demostreu que el rombe és un quadrat.

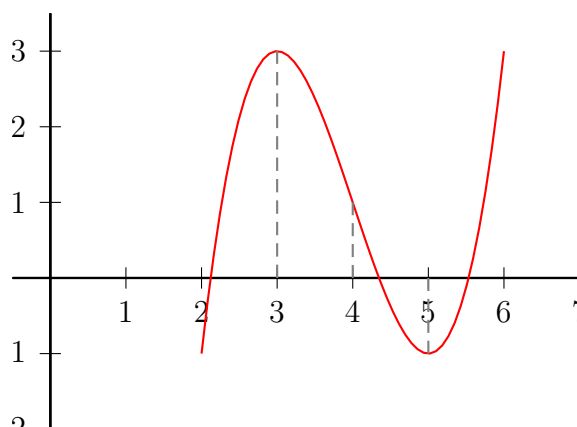
10. Considereu les matrius:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Trobeu una matriu  $X$  que compleixi  $A \cdot X + A = B$ .

## PROBLEMES

11. Considereu la funció  $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ ,  $m \geq 0$ .
- Calculeu el valor de  $m$  per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes  $x = 0$  i  $x = 2$  sigui de 10 unitats quadrades.
  - Per a  $m = 1$ , indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de  $45^\circ$  amb el semieix positiu de OX.
12. Donats la funció  $f(x) = \sqrt{x}$  el punt  $A(2, 0)$  situat sobre l'eix de les abscisses:
- Trobeu la funció que expressa la distància del punt  $A$  a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.
  - Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de  $f(x)$  més proper a  $A$ .

## QÜESTIONS

13. Calculeu el valor de la integral següent:  $\int_0^3 \frac{x + 1 + \sqrt{x+1}}{x+1} dx$
14. La gràfica següent correspon a una funció  $f : [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de  $f' : (2, 6) \rightarrow \mathbb{R}$  i justifiqueu-ne el perquè.



15. Donades les matrius :  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- trobeu una matriu  $X$  tal que  $A \cdot X = B$ ;
  - calculeu  $B^{100}$ . Raoneu la resposta.
16. Donats els vectors  $\vec{u} = (1, 2)$  i  $\vec{v} = (-3, 1)$ :
- comproveu que i formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla;
  - trobeu els components del vector  $\vec{w} = (-1, 5)$  en la base  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

## PROBLEMES

17. Considereu la funció polinòmica de tercer grau,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a \neq 0$ ).
- Trobeu els valors de  $a, b, c$  i  $d$  per als quals  $f(x)$  talla l'eix OX en els punts  $x = 0$  i  $x = 1$  i presenta un mínim relatiu en el punt  $x = 0$ .

- (b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, i acabeu de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.

18. Considereu les rectes:

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \quad \text{i} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

- (a) Estudieu la seva posició relativa.  
 (b) Trobeu l'equació del pla que conté  $s$  i és paral·lel a  $r$ .  
 (c) Calculeu la distància entre  $r$  i  $s$ .

### QÜESTIONS

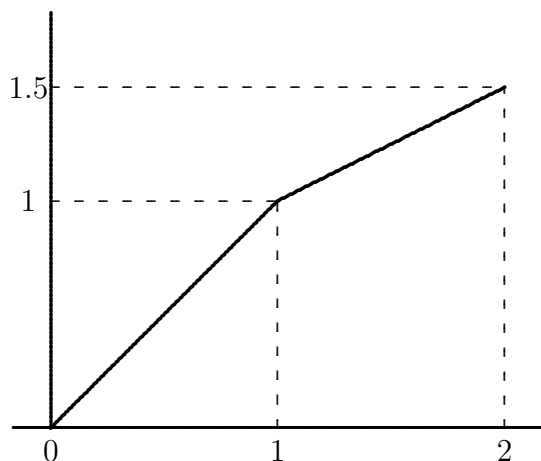
19. Considereu els punts de l'espai  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(0, 1, 1)$  i  $C(k, 1, 5)$ .

- (a) Trobeu l'equació de la recta que passa per A i B.  
 (b) Per a quins valors de  $k$  els punts A, B i C formen un triangle?

20. Calculeu l'àrea del recinte tancat que delimiten la gràfica de la funció  $y = \sqrt{2x}$  i la recta  $y = x$ .

21. El consum d'un cotxe depèn de la seva velocitat  $v$  (expressada en km/h) segons la funció  $f(v) = \frac{3e^{0.012v}}{v}$  (en litres/km). Quina és la velocitat més econòmica?

22. Considereu la funció  $f(x)$  de la figura definida a l'interval  $[0, 2]$ .



- (a) Calculeu la funció derivada  $f'(x)$  a l'interval  $(0, 2)$ .  
 (b) Hi ha algun punt de  $(0, 2)$  en el qual  $f'(x)$  no existeixi?  
 (c) Calculeu  $\int_0^2 f(x) dx$ .

Raoneu totes les respostes.

### Problemes

23. Considereu el vector  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  i la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- (a) Trobeu tots els vectors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  que fan que  $A \cdot \vec{v} = \vec{w}$ .

- (b) Quina condició han de complir  $a$ ,  $b$  i  $c$  per tal  $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  que no tingui cap vector  $\vec{v}$  solució?

24. Considereu la recta  $r$  d'equació:  $\begin{cases} x &= -3 + 2t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= 3 + t \end{cases}$  i el punt  $M(2, 3, 7)$ .

- (a) Trobeu, en funció de  $t$ , la distància de  $M$  a un punt qualsevol de la recta  $r$ .
- (b) Trobeu les coordenades dels punts  $A$  i  $B$  de  $r$  situats a distància  $3\sqrt{2}$  del punt  $M$ .
- (c) El triangle  $AMB$ , és rectangle en  $M$ ?
- (d) Els punts  $A$  i  $B$  formen part d'un paral·lelogram de vèrtexs  $ABCD$  que té el centre de simetria en el punt  $M$ . Calculeu les coordenades de  $C$  i  $D$ .

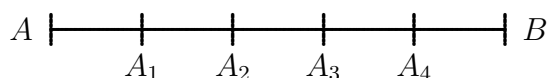
## QÜESTIONS

1. Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real  $a$ : 
$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$
  - (a) Discussiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .
  - (b) Resoleu els casos compatibles.
2. La matriu següent expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles, A, B, C i D, procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si una comanda es representada per un vector fila  $C = (x, y, z, t)$ , què representa cadascun dels elements del resultat del producte  $C \cdot P$ ? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

3. Trobeu la distància entre la recta  $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$  i el pla  $\pi \equiv 3x + 4y + 7 = 0$
4. Un segment d'origen en el punt  $A = (-1, 4, -2)$  i extrem en el punt B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió  $A_1, A_2, A_3$  i  $A_4$  (vegeu la figura). Si sabem que  $A_2 = (1, 0, 2)$ , quines són les coordenades de B?



## PROBLEMES

5. La recta tangent a la paràbola  $y = 3 - x^2$  en un punt  $M$  situat dins del primer quadrant ( $x > 0, y > 0$ ), talla l'eix  $OX$  en el punt  $A$  i l'eix  $OY$  en el punt  $B$ .

(a) Feu un gràfic dels elements del problema.

(b) Trobeu les coordenades del punt  $M$  que fan que el triangle  $OAB$  tingui l'àrea mínima.

6. Considereu la funció  $f(x) = 4x - x^2$ .

(a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de  $f$  en els punts d'abscisses  $x = 0$  i  $x = 4$ .

(b) Feu un gràfic dels elements del problema.

(c) Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de  $f$  i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat (a).

## QÜESTIONS

7. En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions:

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{i} \quad 2x + 4y - 6z = -2$$

Què podeu dir de les solucions del sistema?

8. Considereu els vectors de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{v}_1 = (-1, 3, 4), \quad \vec{v}_2 = (2, -1, -3) \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3)$$

(a) Trobeu l'únic valor de  $k$  per al qual aquests vectors **no** són una base de  $\mathbb{R}^3$

(b) per un valor de  $k$  diferent del que heu trobat en l'apartat a), quins són els components del vector  $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$  en la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ?

9. Trobeu la distància entre la recta  $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$  i el pla  $\pi \equiv 2x - 3y + 3z + 5 = 0$

10. Donats els punts  $A(1, 0, 0)$  i  $B(0, 0, 1)$ :

(a) Trobeu un punt  $C$  sobre la recta d'equació paramètrica  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$  que faci que el triangle  $ABC$  sigui rectangle en  $C$ .

(b) Trobeu l'àrea del triangle  $ABC$ .

## PROBLEMES

11. Considereu la funció  $f(x) = 3 - x^2$  i un punt de la seva gràfica,  $M$ , situat en el primer quadrant ( $x \geq 0, y \geq 0$ ). Si pel punt  $M$  tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb  $OX$  i  $OY$  determina dos punts,  $A$  i  $B$ , respectivament.

(a) Feu un gràfic dels elements del problema.

(b) Trobeu les coordenades del punt  $M$  que fa que el rectangle  $OAMB$  tingui l'àrea màxima.

12. Considereu la funció:  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ ae^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  on  $a$  i  $b$  són nombres reals.

- (a) Quina condició han de complir  $a$  i  $b$  per tal que  $f$  sigui contínua a tot  $\mathbb{R}$ ?
- (b) Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  per als quals  $f$  sigui contínua però no derivable a tot  $\mathbb{R}$ .
- (c) Per a  $a = 1$  i  $b = 1$ , calculeu  $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$

**QÜESTIONS**

1. Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació:  
 $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + \alpha(1, 2, 1)$  que estan a distància 1 del pla  $2x + 2y + z = 5$
2. Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per a algun valor del paràmetre  $m$ .

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

És incompatible per a algun valor de  $m$ ?

3. Donades les matrius:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ :

(a) Calculeu  $A \cdot B$  i  $B \cdot A$ .

(b) Comproveu que  $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ .

4. Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ .

**PROBLEMES**

5. Una recta  $r$  passa pel punt  $A(3, 0, 2)$  i té la direcció del vector  $(-1, 1, 4)$ .
  - (a) Trobeu quin angle forma  $r$  i el pla horitzontal.
  - (b) Comproveu que no passa pel punt  $B(1, 3, 10)$ .
  - (c) Trobeu l'equació de la recta que passa per  $A$  i  $B$ .
6. Considereu la funció  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$ .
  - (a) Calculeu  $c$  sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa  $x = 0$  és horitzontal.
  - (b) Per al valor de  $c$  trobat a l'apartat anterior, calculeu  $a$  i  $b$  sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = -2$  i que talla l'eix  $OX$  quan  $x = 1$ .

- (c) Per als valor obtinguts als apartats anteriors, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

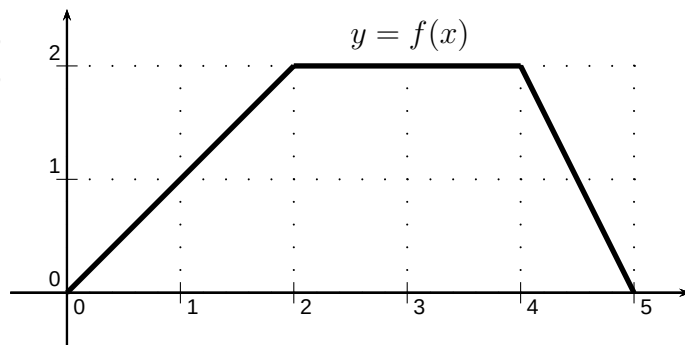
## QÜESTIONS

7. Considereu la funció definida per  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ . Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa  $x = 0$ . Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

8. Considereu la funció  $y = f(x)$  definida per a  $x \in [0, 5]$  que apareix dibuixada a la figura adjunta.

- (a) Quina es l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?

- (b) Calculeu  $\int_0^2 f(x) dx$



9. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$  que passa pel punt  $(1, 1, 2)$ . Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

10. Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ . Determineu els valors de  $m$  per als quals  $\text{rang}(A) < 3$ .

Pot ser  $\text{rang}(A) = 1$  per a algun valor de  $m$ ?

## PROBLEMES

11. Donada la funció  $f(x) = e^{-x^2+2x}$ .

- Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
- Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
- Trobeu les possibles asímptotes.
- Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

12. Considereu la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$  i el pla  $\pi \equiv 2x - y + az + 2 = 0$  on  $a$  és un paràmetre.

- Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
- Quin ha de ser el valor de  $a$  per tal que la recta i el pla siguin paral·lels?
- Esbrineu si existeixen valors de  $a$  per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calculeu-los.
- Esbrineu si existeixen valors de  $a$  per als quals la recta i el pla formin un angle de  $30^\circ$ . En cas afirmatiu, calculeu-los.

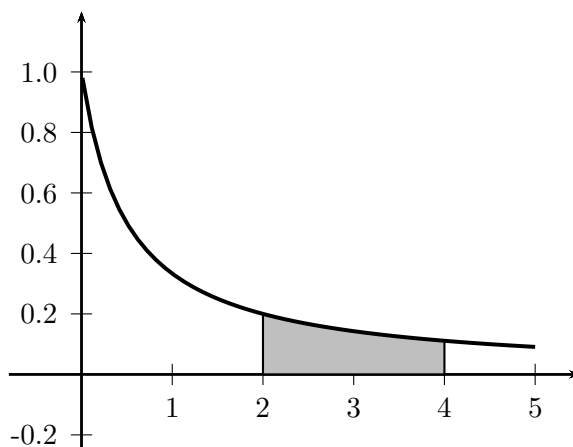
## QÜESTIONS

13. Sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funció definida per  $f(x) = e^x(ax + b)$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals.

- (a) Calculeu els valors de  $a$  i  $b$  per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt  $(3, e^3)$ .
- (b) Per als valors de  $a$  i  $b$  obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

14. El gràfic de la funció  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ , quan  $x > 0$ , és com segueix:

- (a) Trobeu una primitiva de la funció  $f$ .
- (b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



15. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$  que passa pel punt  $(0, 1, 0)$

16. Determineu els extrems d'un segment  $AB$  sabent que el punt  $A$  pertany al pla  $2x + y + z = 0$ , el punt  $B$  pertany a la recta  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$  i el punt mitjà del segment és  $(0, 0, 0)$ .

### PROBLEMES

17. Considereu la paràbola d'equació  $y = x^2 + 2x - 3$ .

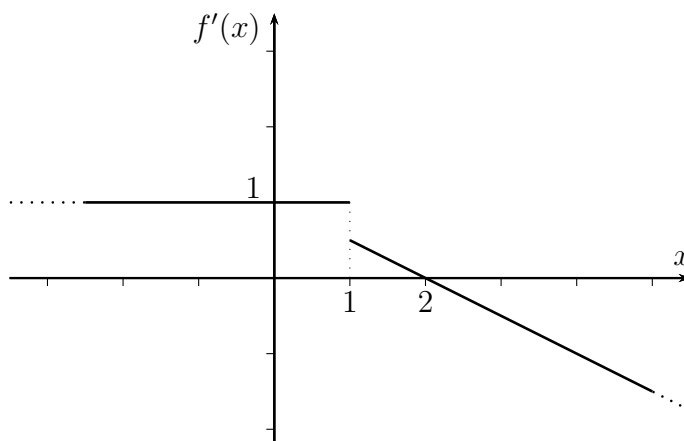
- (a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa  $x = -1$  i  $x = 1$ .
- (b) Calculant el mínim de la funció  $y = x^2 + 2x - 3$ , trobeu el vèrtex de la paràbola.
- (c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
- (d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

18. Considereu el sistema d'equacions 
$$\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$$

- (a) Discutiu-lo en funció del paràmetre  $p$ .
- (b) Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.
- (c) Resoleu el sistema per a  $p = 6$ .

## QÜESTIONS

1. Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$  que passa per l'origen de coordenades.
2. La funció derivada  $f'(x)$  de certa funció contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció a trossos formada per les semirectes del gràfic:



- (a) Digueu si  $f(x)$  és derivable en tots els punts de  $\mathbb{R}$  i per què.
  - (b) Estudieu el creixement i decreixement de  $f(x)$ .
  - (c) Trobeu si  $f(x)$  té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de  $x$  i de quin tipus.
  - (d) Sabem que  $f(0) = 1$ , calculeu el valor de  $f(1)$ .
3. Calculeu els valors del paràmetre  $a$ ,  $a \neq 0$ , que fan que les tangents a la corba d'equació  $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$  en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.
  4. Trobeu els punts de la recta  $r \equiv x - 1 = y + 2 = z$  que equidisten dels plans  $\pi_1 \equiv 4x - 3y - 1 = 0$  i  $\pi_2 \equiv 3x - 4y - 1 = 0$ .

## PROBLEMES

5. Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de  $768 \text{ m}^3$ . Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val  $100$  unitats per  $\text{m}^2$ , mentre que a través del sostre és de  $300$  unitats per  $\text{m}^2$ . La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.
6. A l'espai es consideren els tres plans d'equacions: 
$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2y + z = 1 \\ \pi_2 \equiv px + y + pz = 1, \text{ on } p \text{ és un parà-} \\ \pi_3 \equiv px + y + 2z = 1 \end{cases}$$
 metre real.
- (a) Esbrineu per a quins valors de  $p$  els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan  $p = 1$ .
- (b) Hi ha algun valor de  $p$  que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.
- (c) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan  $p = \frac{1}{2}$ .

## QÜESTIONS

7. En quin punt la recta tangent a la funció  $f(x) = x \cdot e^x$  és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.
8. Considereu els punts de l'espai  $P = (-1, a - 1, 3)$ ,  $Q = (0, a - 2, 1 - a)$  i  $R = (2, -1, 6 - 6a)$ .
- (a) Trobeu el valor de  $a$  per al qual els tres punts estan alineats.
- (b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?
9. Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació  $y = x^4 - x^2$ . A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.
10. Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla  $\pi \equiv x + 2y + 6z - 2 = 0$ , que talla els eixos  $OY$  i  $OZ$ .

## PROBLEMES

11. Considereu la recta d'equació  $r \equiv x = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{2}$ .
- (a) Expressen el quadrat de la distància d'un punt qualsevol  $(x, y, z)$  de la recta al punt  $P(1, 2, 5)$  com una funció de la coordenada  $x$ .
- (b) Trobeu quin valor de  $x$  fa mínima aquesta funció, deduiu quin punt  $Q$  de la recta és el més proper a  $P$  i calculeu la distància del punt a la recta.
- (c) Escriviu l'equació de la recta que passa per  $P$  i  $Q$  i comproveu que és perpendicular a  $r$ .
12. Discussiu el sistema següent 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$
 en funció del paràmetre  $p$ . Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

## QÜESTIONS

13. Trobeu les equacions dels plans paral·lels a  $\pi \equiv 2x - y + 2z = 3$  situats a 6 unitats de distància d'aquest.

14. Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre  $m$ :

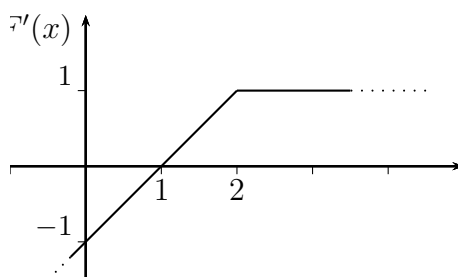
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

(a) Estudieu-ne el rang segons els valors de  $m$ .

(b) Digueu quina és la posició relativa dels plans  $\pi_1 \equiv x + y + 2z = 2$ ,  $\pi_2 \equiv 2x + my + 2mz = 2 + m$  i  $\pi_3 \equiv mx + 2y + (2 + m)z = 0$ , segons els valors de  $m$ .

15. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors de  $p$  i  $q$  que fan que es verifiqui  $A^2 = A$ . En aquest cas, raoneu sense calcular què val  $A^{10}$ .

16. La funció derivada  $F'(x)$  d'una funció contínua  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



Escriu l'expressió de la funció  $F(x)$  com una funció a trossos.

## PROBLEMES

17. Una recta  $r$  és paral·lela a la recta  $s \equiv x - 1 = y - 1 = z - 1$ , talla en un punt  $A$  la recta  $t \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$ , i en un punt  $B$  la recta  $l \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ .

(a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes  $r$  i  $t$ .

(b) Trobeu el punt  $B$  calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta  $l$ .

(c) Trobeu l'equació de la recta  $r$ .

(d) Trobeu el punt  $A$ .

18. Donades les funcions  $f(x) = x^2 - ax - 4$  i  $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$ :

(a) Calculeu  $a$  i  $b$  de manera que les gràfiques de  $f(x)$  i de  $g(x)$  siguin tangents en el punt d'abscissa  $x = 3$ , és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.

(b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.

(c) Pel valor de  $a$  obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses  $OX$  i la funció  $f(x)$ .

## QÜESTIONS

1. Se sap que certa funció derivable  $F(x)$  verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \text{ i } F(1) = 3$$

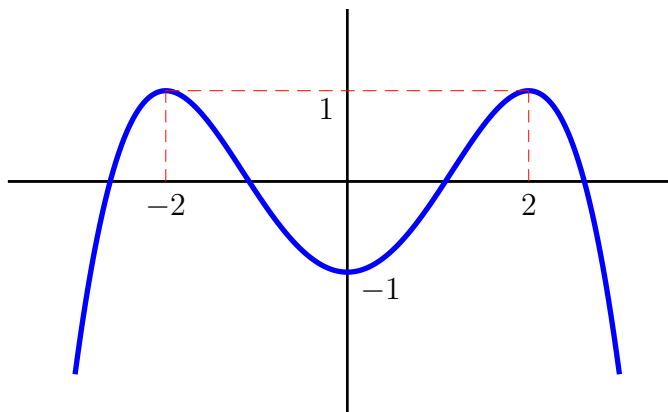
- (a) Trobeu  $F(x)$ .
- (b) Calculeu l'àrea compresa entre  $F(x)$  i l'eix  $OX$  des de  $x = 0$  fins a  $x = 1$ .
2. Considereu les matrius:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .
- (a) Trobeu la matriu  $M$ , quadrada d'ordre 2, tal que  $M \cdot A = B$ .
- (b) Comproveu que  $M^2 = I_2$  (matriu identitat d'ordre 2) i deduiu l'expressió de  $M^n$ .
3. Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre  $m$ .

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z &= 1 \\ x + (m-1)y + z &= m-1 \\ (m-1)x + y + z &= m+2 \end{cases}$$

4. Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla  $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$ , que passa pel punt  $(-1, 3, a)$  del pla.

## PROBLEMES

5. Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval  $(-3, 3)$  és al següent:



- Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
  - Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval  $(-3, 3)$ .
  - Feu un esbós de la gràfica de la derivada de aquesta funció.
  - Sabent que la funció és de la forma  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ , trobeu de quina funció es tracta.
6. Donades les rectes  $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$  i  $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$  i el punt  $P(1, 1, -1)$ , volem trobar l'equació de la recta que passa per  $P$  i que talla  $r$  i  $s$ . Per aconseguir-ho:
- Trobeu l'equació general o cartesiana del pla  $\pi$  que conté la recta  $r$  i el punt  $P$ .
  - Trobeu el punt  $M$  calculant el punt d'intersecció del pla  $\pi$  amb la recta  $s$ .
  - Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts  $P$  i  $M$ .
  - Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior es la que busquem.

## QÜESTIONS

7. Trobeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en  $x = 2$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

8. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals.

- Calculeu el valor de  $a$  i  $b$  per tal que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu  $A^3$  i  $A^4$ .
- Si  $n$  és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de  $A^n$  en funció de  $n$ .

9. Digueu per a quin valor de  $x$  la recta tangent a la corba  $y = \ln(x^2 + 1)$  és paral·lela a la recta  $y = x$ . Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

10. Donats el pla  $\pi \equiv 3x - 2y + 5z = 6$  i la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$ , busqueu el punt de tall, si existeix.

## PROBLEMES

11. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - (a - 1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a + 1)y + z = -2a \end{cases}$$

- (a) Discutiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .
  - (b) Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.
  - (c) En el cas de l'apartat anterior, trobeu una solució del sistema en què  $x, y$  i  $z$  tinguin valors enters.
12. De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

## QÜESTIONS

13. Considereu la funció  $f(x) = ax^2 + x + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  que fan que la recta  $y = 2x + 1$  sigui tangent a la gràfica de  $f$  quan  $x = 1$ .

14. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Calculeu  $A^2$  i  $A^3$ .
  - (b) Determineu, raonadament, el valor de  $A^{60124}$
15. Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.
- (a) Pot ser incompatible?
  - (b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes.

16. Donats el punt  $P(7, 5, 1)$ , el pla  $\pi \equiv x - 2y - 3z = 10$  i la recta:  $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$

- (a) Trobeu la distància del punt  $P$  al pla  $\pi$ .
- (b) Trobeu la distància del punt  $P$  a la recta  $r$ .
- (c) Trobeu la distància de la recta  $r$  al pla  $\pi$ .

## PROBLEMES

17. Donades les funcions  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  i  $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ :

- (a) Comproveu que  $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ .
- (b) Comproveu també que  $f'(x) = g(x)$  i  $g'(x) = f(x)$ .
- (c) Comproveu que  $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$ .

- (d) Calculeu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  dividint per  $e^x$  el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

18. Les rectes  $r_1 \equiv \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$  i  $r_2 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}$  són coplanàries.

- (a) Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.
- (b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres  $a$  i  $b$ .
- (c) Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  si el pla que les conté passa pel punt  $P(2, 4, 6)$ .

## QÜESTIONS

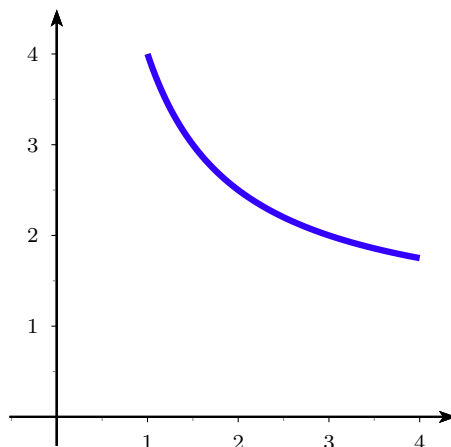
1. Donats el punt  $P(1, 2, 3)$  i la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$ :
  - (a) Trobeu l'equació cartesiana del pla  $\pi$  que passa per  $P$  i es perpendicular a la recta  $r$ .
  - (b) Trobeu el punt de tall entre la recta  $r$  i el pla  $\pi$ .
2. Siguin  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 
  - (a) Comproveu que la inversa de  $A$  és  $A^2$ .
  - (b) Comproveu també que  $A^{518} = B$ .
3. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$ , amb  $a > 0$ .
  - (a) Trobeu els punts de tall de la funció  $f(x)$  amb l'eix d'abscisses.
  - (b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció  $f(x)$  i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre  $a$ .
4. En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

- (a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.
- (b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

## PROBLEMES

5. La gràfica de la funció  $f(x) = \frac{3+x}{x}$ , des de  $x = 1$  fins a  $x = 4$ , és la següent:



- Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa  $x = 1$  i  $x = 3$ .
  - Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
  - Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
  - Calculeu la superfície del recinte damunt dit.
6. Siguin  $r$  i  $s$  dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real  $b$ , són les següents:

$$r \equiv \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$$

- Trobeu el punt de tall de la recta  $r$  amb el pla d'equació  $x = 0$  i el punt de tall de la recta  $s$  amb aquest mateix pla.
- Calculeu un vector director per a cada una de les dues rectes.
- Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre  $b$ .

## QÜESTIONS

7. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè la matriu tingui rang 1.
8. Considereu les corbes  $y = 4x - x^2$  i  $y = x^2 - 6$ .
- Trobeu-ne els punts d'intersecció.
  - Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.
  - Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

9. Donat el sistema 
$$\begin{cases} x + py = p \\ px + y = p \end{cases}$$

- (a) Discutiue-ne el caràcter en funció del paràmetre  $p$ .
- (b) Resoleu-lo quan  $p = 2$ .

10. Donats el pla  $\pi \equiv x + 2y - z = 0$  i el punt  $P(3, 2, 1)$ :

- (a) Calculeu l'equació continua de la recta  $r$  que passa per  $P$  i es perpendicular a  $\pi$ .
- (b) Calculeu el punt simètric del punt  $P$  respecte del pla  $\pi$ .

### PROBLEMES

11. Sigui la funció  $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$

- (a) Calculeu els valors de  $a$  i  $b$ , sabent que la recta  $2x + 3y = 14$  és tangent a la gràfica de la funció  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 3$ .

Per a la resta d'apartats, considereu que  $a = -3$  i que  $b = 4$ .

- (b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció  $f(x)$ . Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.
- (c) Calculeu els punts de tall de la funció  $f(x)$  amb l'eix d'abscisses.
- (d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció  $f(x)$ , l'eix d'abscisses i les rectes  $x = 1$  i  $x = 3$ .

12. Siguin  $P(3 - 2a, b, -4)$ ,  $Q(a - 1, 2 + b, 0)$  i  $R(3, -2, -2)$  tres punts de l'espai  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Calculeu el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$  per als quals aquests tres punts estiguin alineats.
- (b) Trobeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.
- (c) Quan  $b = 0$ , trobeu els valors del paràmetre  $a$  perquè la distància entre els punts  $P$  i  $Q$  sigui la mateixa que la distància entre els punts  $P$  i  $R$ .
- (d) Si  $b = 0$ , calculeu el valor del paràmetre  $a$  perquè els punts  $P$ ,  $Q$  i  $R$  determinin un triangle equilàter.

### QÜESTIONS

13. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ . Calculeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Considereu en l'espai  $\mathbb{R}^3$  les rectes  $r \equiv (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1)$  i  $s \equiv \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ , en què  $m$  és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

15. Sigui  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ . Donades les rectes  $r_1 \equiv y = x + 2$  i  $r_2 \equiv y = 7x - 2$ :

- (a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba  $y = f(x)$  en algun punt.

(b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

16. Donats els vectors  $\vec{v}_1 = (a+1, 2a, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-2, a, 2a)$  i  $\vec{v}_3 = (a, -2, 4a-2)$  de  $\mathbb{R}^3$ :

(a) Calculeu l'angle que formen  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  quan  $a = 0$ .

(b) Trobeu el valor del paràmetre  $a$  perquè els vectors  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  i  $\vec{v}_3$ , siguin perpendiculars dos a dos.

## PROBLEMES

17. Considereu la funció real de variable real  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$ .

(a) Trobeu-ne el domini.

(b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.

(c) Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

18. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} x + 5y + z + a &= 0 \\ (a-2)z + x + 2y - 1 &= 0 \\ (a-1)y + (1-a)x + z + a + a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(a) Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.

(b) Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.

(c) Trobeu els valors del paràmetre  $a$  per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudieu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.

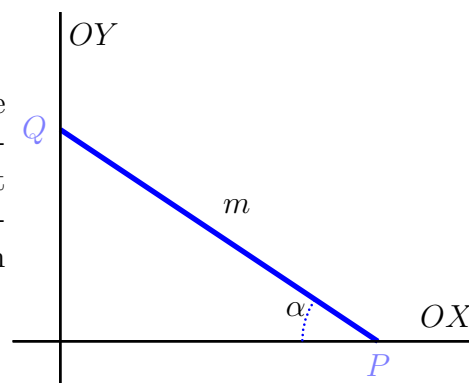
(d) Resoleu-ne solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Trobeu l'equació general del pla que conté a la recta  $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = y = 2-z$  i és paral·lel a la recta  $r_2 \equiv \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ .

2. Donat el sistema d'equacions lineals  $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x+y+z=4 \\ x-y+(p-3)z=5 \end{cases}$  :

- (a) Estudieu-ne el caràcter en funció del paràmetre  $p$ .  
 (b) Comproveu que si  $p \neq 5$  la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.

3. Un segment de longitud fixada  $m$  recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle  $\alpha$  que forma el segment amb l'eix  $OX$  perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual  $m$  és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



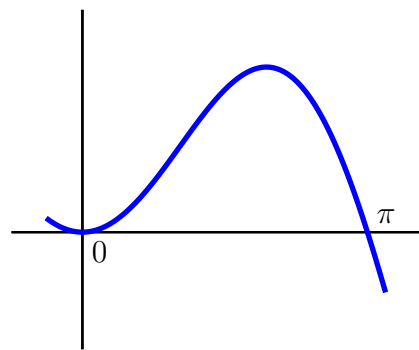
4. Donades les rectes  $r_1 \equiv \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$  i  $r_2 \equiv \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$  :

- (a) Comproveu que són paral·leles.  
 (b) Trobeu l'equació general del pla que les conté.

5. La gràfica de la funció  $f(x) = x \cdot \sin(x)$  és l'adjunta:

(a) Trobeu-ne una primitiva.

(b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció  $f(x)$  i l'eix d'abscisses des de  $x = 0$  fins  $x = \pi$ .



6. Sigui  $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors de les variables  $x$  i  $y$  perquè es compleixi que  $A^2 = A$ .

.....

7. Donats el pla  $\pi \equiv x + 2y + 3z - 4 = 0$  i els punts  $P(3, 1, -2)$  i  $Q(0, 1, 2)$ :

(a) Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla  $\pi$  que passa pel punt  $P$ .

(b) Calculeu l'equació general del pla perpendicular a  $\pi$  que passa pels punts  $P$  i  $Q$ .

8. Considereu la igualtat matricial  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ .

(a) Comproveu si les matrius  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  compleixen o no la igualtat anterior.

(b) En general, donades dues matrius qualsevol  $A$  i  $B$  quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

9. Sigui  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polinomi qualsevol de segon grau.

(a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$  sabent que es compleix que  $P(1) = 0$  i  $P(2) = 0$ .

(b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir  $P'(\frac{3}{2})$ .

10. Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema lineals,  $A \cdot X = b$ , i hem obtingut:

$$(A|b) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array} \right)$$

(a) Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre  $a$ .

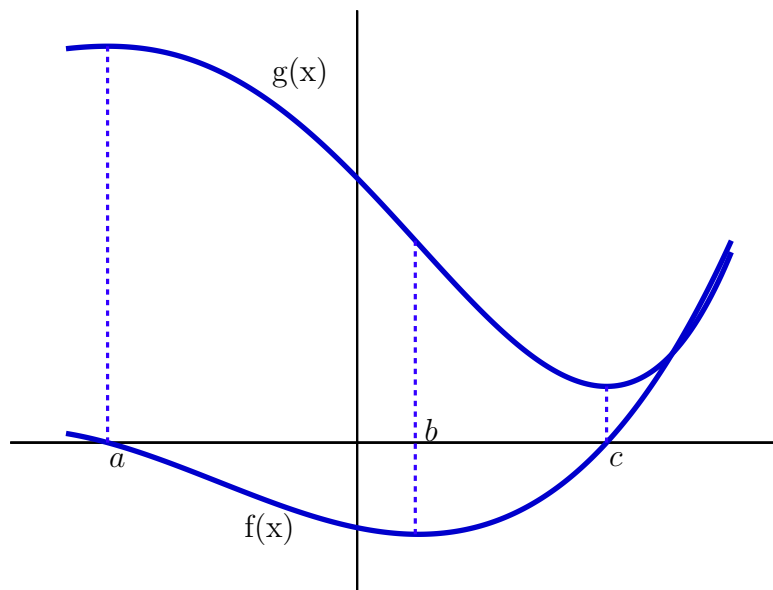
(b) Resoleu-lo quan  $a = 2$ .

11. Siguin  $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$  i  $\vec{u}_3 = (a + 1, a - 1, 4a + 2)$  tres vectors de l'espai vectorial  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Trobeu el valor del paràmetre  $a$  per al qual el vector  $\vec{u}_3$  és combinació lineal dels vectors  $\vec{u}_1$  i  $\vec{u}_2$ .

(b) Comproveu que per a  $a = 0$  el conjunt  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  és linealment independent.

12. En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció  $f(x)$  és la derivada de la funció  $g(x)$  o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts  $x = a$ ,  $x = b$  i  $x = c$ .



13. Trobeu les asímptotes de la funció  $f(x) = \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5}$ .
14. Donats el pla  $\pi \equiv 5x + y + 3z = 4$  i la recta  $r \equiv \begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$ , estudeu-ne la posició relativa en funció del paràmetre  $a$ .
15. Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum  $V$  fixat. Anomeneu  $x$  el costat de la base del prisma i  $y$  la seva altura.
- Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables  $x$  i  $y$ .
  - Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.
16. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
- Comproveu que compleix la igualtat  $A^2 - 5A = I_2$ , on  $I_2$  és la matriu identitat d'ordre 2.
  - Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de  $A$ .
  - Resoleu l'equació matricial  $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ , utilitzant la matriu inversa de  $A$ .
17. Sigui  $f(x) = \frac{8x^2}{2x+1}$ . Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix d'abscisses i les rectes  $x = 0$  i  $x = 2$ .
18. Considereu la recta  $t \equiv \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{-1} = z-1$ .

- (a) Trobeu els dos punts,  $A$  i  $B$ , de la recta  $r$  que estan situats a una distància  $d = \sqrt{6}$  del punt  $P(-1, 1, 2)$ .
- (b) Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs  $A, B$  i  $P$ .
- .....

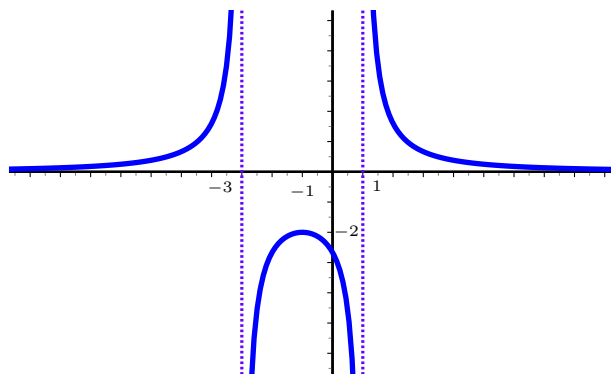
19. Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responen raonadament a les qüestions següents:

- (a) És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?
- (b) Pot ser incompatible?

20. Donats el punt  $P(1, 0, -2)$  i la recta  $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-3}$ :

- (a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt  $P$  i talla perpendicularment la recta  $r$ .
- (b) Calculeu la distància del punt  $P$  a la recta  $r$ .

21. Determineu el valor dels paràmetres  $a, b$  i  $c$  perquè la gràfica de la funció  $f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$  sigui la següent:



22. Siguin  $A, B$  i  $C$  matrius quadrades d'ordre  $n$ .

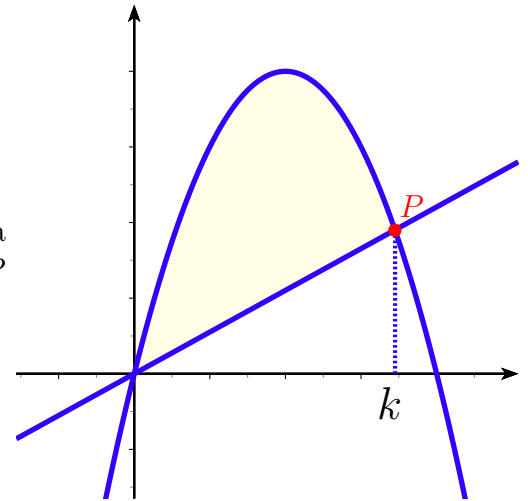
- (a) Expliqueu raonadament si és possible que  $\det A \neq 0$ ,  $\det B \neq 0$  i  $\det (A \cdot B) = 0$ . Si és possible, poseu-ne un exemple.
- (b) Si sabem que  $\det A \neq 0$  i que  $A \cdot B = A \cdot C$ , expliqueu raonadament si podem assegurar que  $B = C$ .

23. Siguin  $r$  i  $s$  dues rectes d'equacions

$$r \equiv (x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1), \quad s \equiv x + 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}$$

- (a) Trobeu el valor del paràmetre  $a$  perquè aquestes rectes es tallin.
- (b) En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma del pla que les conté).

24. En la figura es mostra la corba  $y = x(4 - x)$  i una recta  $r$  que passa per l'origen i talla la corba en un punt  $P$  d'abscissa  $k$ , amb  $0 < k < 4$ .



- Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de  $k$ .
- Trobeu per a quin valor de  $k$  l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix  $OX$ .

- 
1. Donada la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$  :
- (a) Trobeu-ne un vector director.
  - (b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a  $r$  que passa pel punt  $P = (1, 0, -1)$ .
2. Si tenim la matriu invertible  $A$  i l'equació matricial  $X \cdot A + B = C$ :
- (a) Aïlleu la matriu  $X$ .
  - (b) Trobeu la matriu  $X$  quan  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  i  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .
3. Definim les funcions  $f(x) = a(1 - x^2)$  i  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{a}$ , en què  $a > 0$ .
- (a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:  $\frac{4(1 + a^2)}{3a}$ .
  - (b) Calculeu el valor del paràmetre  $a$  perquè aquesta àrea sigui mínima.
4. Considereu el sistema d'equacions següent: 
$$\begin{cases} x + 2y - az = -3 \\ 2x + (a - 5)y + z = 4a + 2 \\ 4x + (a - 1)y - 3z = 4 \end{cases}$$
- (a) Calculeu els valors del paràmetre  $a$  perquè el sistema no sigui compatible determinat.
  - (b) Hi ha algun valor de  $a$  per al qual  $x = 1, y = 3, z = -1$  sigui l'única solució del sistema?
5. Siguin  $r_1 \equiv x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{1 - z}{2}$  i  $r_2 \equiv \frac{x + 3}{2} = y + 1 = \frac{z + 1}{2}$ .
- (a) Comproveu que  $r_1$  i  $r_2$  són perpendiculars.
  - (b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

6. Sigui  $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$  quan  $a \neq 0$ .

(a) Calculeu el valor de  $a$  perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 2$ .

(b) Quan  $a = 2$ , classifiqueu-ne els extrems relatius.

.....

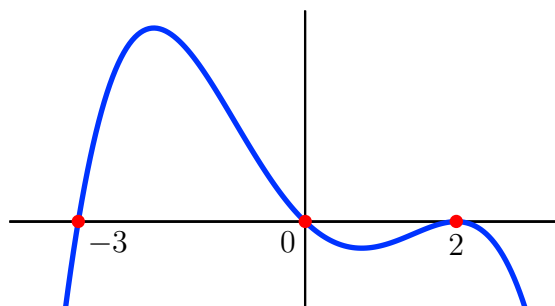
7. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació  $f(x) = x^2 - x + 2$  i  $g(x) = 5 - 3x$ .

8. Donat el pla  $\pi \equiv 2x + y - z = 5$ :

(a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla  $\pi$  que passa pel punt  $P(1, 0, -1)$ .

(b) Determineu també la distància entre el punt  $P$  i el pla  $\pi$ .

9. La gràfica corresponent a la derivada d'una funció  $f(x)$  és la següent:



(a) Expliqueu raonadament quins valors de  $x$  corresponen a màxims o a mínims relatius de  $f(x)$ .

(b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció  $f(x)$ .

10. Analitzeu, segons els valors del paràmetre  $k$ , el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - z = k - 4 \\ (k - 6)y + 3z = 0 \\ (k + 1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

11. Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) dels plans que contenen la recta  $r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$  i que formen un angle de  $45^\circ$  amb el pla  $z = 0$ .

12. Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

(a) Feu un esbós de la situació descrita.

(b) Si  $x$  és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i  $y$  és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que  $4x + 3y = 12$ .

(c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

.....

13. Donada la matriu  $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$ :

- (a) Calculeu els valors del paràmetre  $k$  per als quals la matriu  $M$  no és invertible.
- (b) Per a  $k = 0$ , calculeu  $M^{-1}$ .

14. Donada la recta  $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ , calculeu l'equació general (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt  $P(1, 0, -1)$ .

15. Donada la funció  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ :

- (a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres  $a, b$  i  $c$  perquè  $f(x)$  tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = -1$ .
- (b) Calculeu el valor del paràmetre  $a$  perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 0$ .
- (c) Determineu la relació entre els paràmetres  $a, b$  i  $c$  sabent que la gràfica de  $f(x)$  talla l'eix d'abscisses en el punt d'abscissa  $x = -2$ .
- (d) Calculeu el valor dels paràmetres  $a, b$  i  $c$  perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

16. Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Calculeu  $A^2$  i  $A^3$ .
- (b) Deduïu el valor de  $A^{101}$ .

17. Considereu la recta  $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z-a$  i el pla  $\pi \equiv 2x + y - 5z = 5$ .

- (a) Estudieu la posició relativa de la recta  $r$  i el pla  $\pi$  en funció del paràmetre  $a$ .
- (b) Quan  $a = 3$ , calculeu la distància de la recta  $r$  al pla  $\pi$ .

18. Sigui  $f(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} (a^2 + x^2) dx$  per  $a > 0$ .

- (a) Comproveu que  $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$ .
- (b) Calculeu el valor del paràmetre  $a$  perquè la funció  $f(a)$  tingui un mínim relatiu.

1. Digueu per a quin valor del paràmetre  $m$  els plans

$$\pi_1 \equiv x - y + mz = 1, \pi_2 \equiv x - y + z = m \text{ i } \pi_3 \equiv my + 2z = 3$$

tenen com a intersecció una recta.

2. Donades la recta  $y = 3x + b$  i la paràbola  $y = x^2$ ,

- (a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la parabola es paral·lela a la recta donada.
- (b) Calculeu el valor del paràmetre  $b$  perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

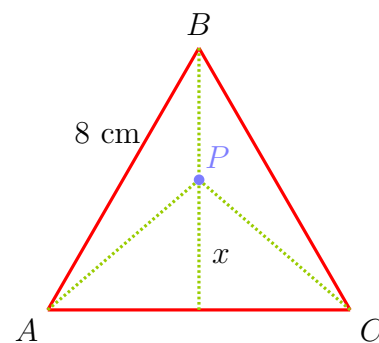
3. Donats el pla  $\pi \equiv x - y + 2z - 5 = 0$  i la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$

- (a) Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.
- (b) Trobeu l'equació contínua de la recta  $s$  continguda en el pla  $\pi$ , que és perpendicular a la recta  $r$  i talla la recta  $r$ .

4. Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- (a) Comproveu que es compleix la igualtat  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .
- (b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades  $A$  i  $B$  del mateix ordre? Responen raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius  $A$  i  $B$  concretes.

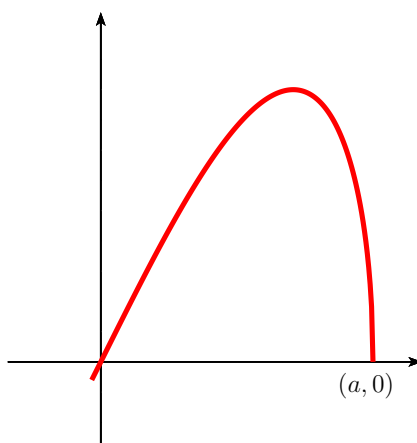
5. Un triangle equilàter de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$  té els costats de 8 cm. Situem un punt  $P$  sobre una de les altures del triangle, a una distància  $x$  de la base corresponent.



- Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$ .
  - Indiqueu la distància del punt  $P$  a cadascun dels vèrtexs (en funció de  $x$ ).
  - Determineu el valor de  $x$  perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt  $P$  a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.
6. Donats els punts  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (0, 2, 0)$ ,  $R = (0, 0, 3)$  i  $S = (1, 2, 3)$ ,
- Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla que conté els punts  $P$ ,  $Q$  i  $R$ .
  - Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).

.....

7. Donats els plans:  $\pi_1 \equiv 3x + y - 2z + 15 = 0$ , i  $\pi_2 \equiv x + y + 2z - 103 = 0$
- Comproveu que son perpendiculars.
  - Calculeu l'equació cartesiana del pla perpendicular a  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , que passa pel punt  $P(1, 3, 2)$ .
8. La gràfica de la funció  $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$  és la següent:

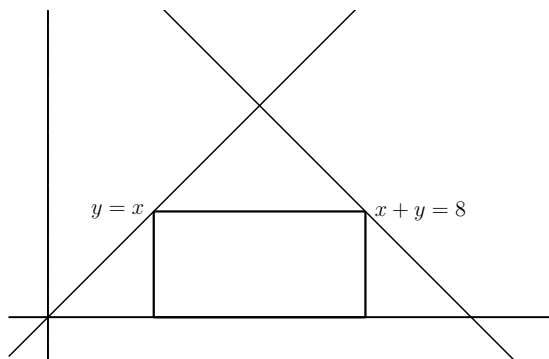


- Trobeu el punt de tall,  $(a, 0)$ , de la funció amb la part positiva de l'eix d'abscisses.
  - Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de  $f(x)$  i l'eix  $OX$  en el primer quadrant.
9. Sigui  $A$  una matriu quadrada d'ordre  $n$  de manera que  $A^2 = 0$ , en que  $0$  es la matriu nul·la.
- Comproveu que  $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$ .
  - Comproveu que les matrius  $B = I_n - A$  i  $C = A + I_n$  són l'una inversa de l'altra.

10. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = x, \quad x + y = 8, \quad y = 0$$

i té un costat sobre la recta  $y = 0$ . Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.



11. Contesteu les preguntes següents:

(a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

(b) Considereu les matrius següents:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$ . Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre  $p$  perquè  $\det A = \det B$ .

12. Siguin  $\pi \equiv x - 3y + 2z = 1$  i  $r \equiv \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$ . Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre  $m$ .

.....

13. Determineu el rang de la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$  en funció del paràmetre  $k$ .

14. Sigui  $f(x) = \frac{ax^2}{x+b}$ , en què  $a \neq 0$ .

(a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre  $b$ .

(b) Indiqueu el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè la funció  $f(x)$  tingui la recta  $y = 2x - 4$  com a asímptota obliqua a  $+\infty$ .

15. Considereu el sistema d'equacions lineals següent: 
$$\left. \begin{aligned} x + y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

(a) Calculeu el valor o els valors del paràmetre  $a$  per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.

(b) Quantes solucions té aquest sistema quan  $a = -3$ ?

16. Una fàbrica produeix diàriament  $x$  tones d'un producte A i  $(40 - 5x)/(10 - x)$  tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100 € per tona i el del producte B és 250 € per tona.

- (a) Construïu la funció de la variable  $x$  que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.
- (b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

17. Considereu les rectes de l'espai següents:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1}, \quad s \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

- (a) Comproveu que són secants.
- (b) Calculeu l'equació contínua de la recta que les talla i que és perpendicular a totes dues.

18. Donades la recta  $y = ax + 1$  i la paràbola  $y = 3x - x^2$ ,

- (a) Calculeu els valors del paràmetre  $a$  perquè siguin tangents.
- (b) Calculeu els punts de tangència.

1. Sabem que el vector  $(2, 1, -1)$  és una solució del sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned} \right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres  $a, b$  i  $c$ .

2. La corba  $y = x^2$  i la recta  $y = k$ , amb  $k > 0$ , determinen una regió plana.

(a) Calculeu l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre  $k$ .

(b) Trobeu el valor de  $k$  perquè l'àrea limitada sigui  $\sqrt{6} \text{ u}^2$ .

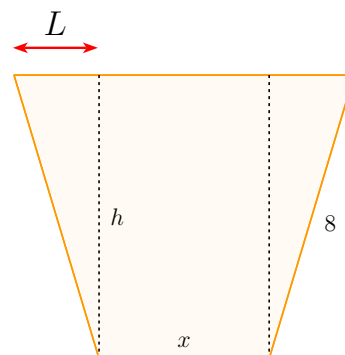
3. Sigui  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(a) Què significa que la matriu  $B$  sigui la inversa de  $A$ ?

(b) Trobeu el valor del paràmetre  $p$  perquè la matriu inversa de  $A$  i la matriu transposada de  $A$  coincideixin.

Nota: No aproximeu les arrels per valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



- (a) Trobeu el valor del segment assenyalat  $L$  de la gràfica en funció de la variable  $x$  (amplada inferior del canal).

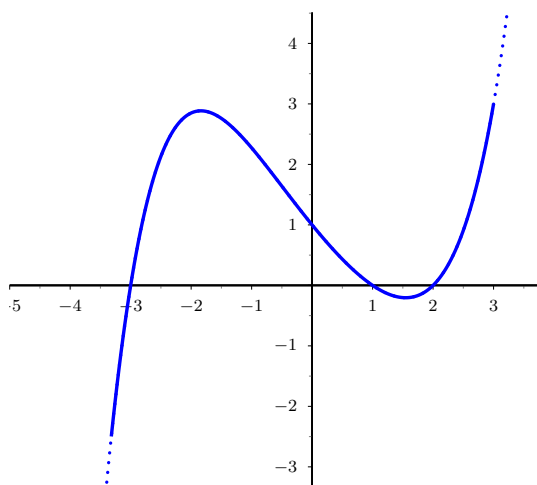
- (b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les seves bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

- (c) Calculeu el valor de  $x$  perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

5. Donats els punts  $P(1, 0, -1)$  i  $Q(-1, 2, 3)$ , trobeu un punt  $R$  de la recta  $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$  que compleixi que el triangle de vèrtexs  $P, Q$  i  $R$  és isòsceles, en què  $\overline{PR}$  i  $\overline{QR}$  són els costats iguals del triangle.

6. La funció  $f(x)$  és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent  $f'(x)$  creixent als intervals  $(-\infty, -3]$  i  $[2, +\infty)$ .



- (a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 0$ .
- (b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció  $f(x)$  i classifiqueu aquest extrems.

7. Siguin  $\pi_1$  el pla  $2x + 3y - z = 4$  i  $\pi_2$  el pla  $x - 2y - 4z = 10$ .

- (a) Comproveu que els plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  son perpendiculars.
- (b) Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  i que passa pel punt  $P(-1, 3, 2)$ .

8. La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

- (a) Per a quins valors del paràmetre  $a$  el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?
- (b) Resoleu el sistema si  $a = 2$ .

9. Donats els punts  $P(1, -1, 2)$ ,  $Q(2, 0, 1)$  i  $R(3, 2, -1)$ ,

- (a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla que determinen.
- (b) Trobeu un punt  $S$  pertanyent a la recta  $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$ , de manera que el tetraedre de vèrtexs  $P, Q, R$  i  $S$  tingui un volum igual a  $1/2$ .

10. Per a  $x \geq 1$ , considereu la funció  $f(x) = +\sqrt{x-1}$ .

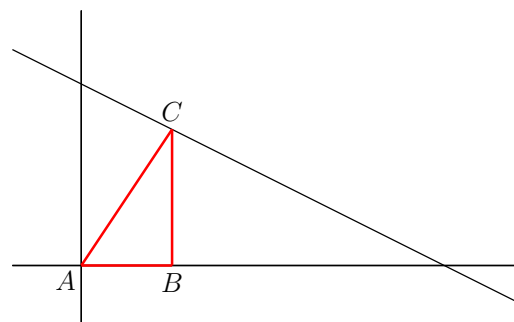
- (a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa igual a 10.
- (b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de  $f(x)$ , la recta d'equació  $x = 5$  i l'eix  $OX$ .

11. Considereu els punts  $A(-1, 2, 4)$  i  $B(3, 0, -2)$ .

- (a) Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de  $A$  i  $B$ .
- (b) Donat un punt  $C(x, y, z)$ , dividim el segment  $\overline{AC}$  en tres parts iguals i obtenim els punts  $A, A_1, B$  i  $C$ . Trobeu el punt  $C$ .

12. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex  $A$  en l'origen de coordenades, el vèrtex  $B(x, 0)$  en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex  $C$  pertany a la recta  $x + 2y = 8$ . L'angle recte és el que correspon al vèrtex  $B$ .

- (a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent:  $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$ .
- (b) Trobeu els vèrtexs  $B$  i  $C$  perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.



13. Sigui  $\pi \equiv 3x - 2y + z = 10$ .

- (a) Trobeu l'equació continua de la recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  que passa pel punt  $P(-1, 3, 2)$ .
- (b) Trobeu també l'equació cartesiana del pla  $\pi_1$  paral·lel a  $\pi$  que passa pel mateix punt  $P$ .

14. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ . Sigui  $I$  la matriu identitat d'ordre 2.

- (a) Trobeu el valor del paràmetre  $a$  perquè es compleixi que  $A^2 - 2A = I$ .
- (b) Calculeu la matriu inversa de la matriu  $A$  quan  $a = -2$ .

15. Donada la funció  $f(x) = \sqrt{x-1}$  i la recta horitzontal  $y = k$ , amb  $k > 0$ ,

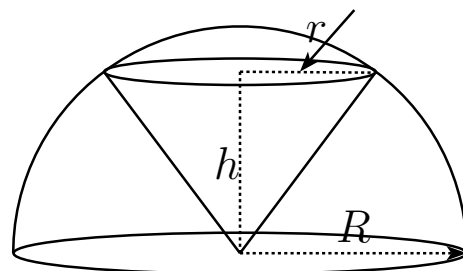
- (a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.
- (b) Trobeu el valor de  $k$  sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a  $14/3$ .

16. Un triangle d'àrea  $3/2$  té dos dels vèrtexs als punts  $P(0, 0, 0)$  i  $Q(2, 0, 1)$ . El tercer vèrtex,  $R$ , és un punt de la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$  i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex  $R$ .

17. En una semiesfera de radi  $R$  inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.

- (a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 - h^2)$$



- (b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

18. Sigui  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Sabem que la gràfica d'aquesta funció es tangent a la recta  $r \equiv y = x + 3$  en el punt d'abscissa  $x = -1$ , i que en el punt d'abscissa  $x = 1$  la recta tangent es paral·lela a la recta  $r$ . Calculeu el valor dels paràmetres  $a, b$  i  $c$ .

19. Sigui  $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$  un conjunt de vectors de  $\mathbb{R}^3$ .
- Trobeu el valor o els valors de  $a$  perquè  $V$  sigui linealment dependent.
  - Quan  $a = 4$ , expresseu el vector  $\vec{v} = (3, 9, 14)$  com a combinació lineal dels vectors de  $V$ .
20. De la funció polinòmica  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$  sabem que
- té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = -3$ :
  - la integral definida en l'interval  $[0, 1]$  val  $-\frac{5}{4}$ .
- Calculeu el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$ .
21. Donats el pla  $\pi \equiv x + 2y - z = 3$  i la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+m}{4}$ ,
- Comproveu que el vector característic (o normal) de  $\pi$  i el vector director de  $r$  són perpendiculars.
  - Estudieu la posició relativa de  $\pi$  i  $r$  en funció del paràmetre  $m$ .
22. Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{pmatrix}$$

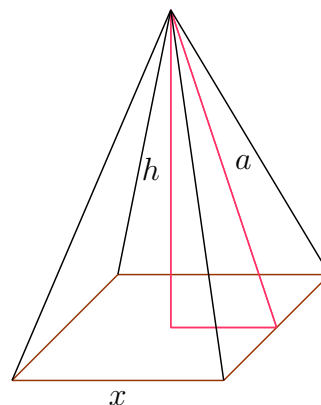
on  $a, b$  i  $c$  són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

23. Donats el pla  $\pi \equiv 2x - y + 3z - 8 = 0$  i el punt  $P = (6, -3, 7)$ ,
- Trobeu l'equació continua de la recta que passa per  $P$  i es perpendicular a  $\pi$ .
  - Trobeu el punt del pla  $\pi$  que està més proper al punt  $P$ .

24. Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de  $300 \text{ m}^2$  de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem  $x$  la longitud d'un costat de la base de la tenda.

- Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V = \frac{x\sqrt{(9 \cdot 10^4) - x^4}}{6}$$



- Determineu el valor de  $x$  perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

- 
1. Considereu la matriu  $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ , per a  $a \in \mathbb{R}$ .
- (a) Calculeu el rang de la matriu  $M$  en funció dels valors del paràmetre  $a$ .
- (b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals  $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , segons els valors del paràmetre  $a$ .
2. Considereu el punt  $A = (1, 2, 3)$ .
- (a) Calculeu el punt simètric del punt  $A$  respecte de la recta d'equació
- $$r : (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda)$$
- (b) Calculeu el punt simètric del punt  $A$  respecte del pla que té per equació  $\pi : x + y + z = 3$
3. Un nedador és al mar en un punt  $N$ , situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt  $S$ , situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt  $A$ , situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt  $S$ , de manera que el triangle  $NSA$  és rectangle en el vèrtex  $S$ . El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.
- (a) Si  $P$  és un punt entre el punt  $S$  i el punt  $A$  que està a una distància  $x$  de  $S$ , demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt  $N$  al punt  $P$  i caminar des del punt  $P$  fins al punt  $A$  és determinat per l'expressió  $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5}$ .
- (b) Calculeu el valor de  $x$  que determina el temps mínim que cal per a anar del punt  $N$  al punt  $A$ , passant per  $P$ . Quin és el valor d'aquest temps mínim?
4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$  i  $y = 9$ .

5. Siguin  $r$  i  $s$  les rectes de  $\mathbb{R}^3$  d'equacions

$$r : \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4} \text{ i } s : (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$$

amb  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta  $r$  i l'altre extrem situat sobre la recta  $s$  formen un pla.
- Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla de l'apartat anterior.

6. Responen a les qüestions següents:

- Demostreu que si  $A$  és una matriu quadrada que satisfà la igualtat  $A^2 = I$ , on  $I$  és la matriu identitat, aleshores  $A$  és invertible i  $A^{-1}$  satisfà  $(A^{-1})^2 = I$ .
- Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$  amb  $b \neq 0$  satisfan la igualtat  $A^2 = I$ .

7. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ .

- Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció  $f$ .
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f$  en aquells punts en que la recta tangent sigui paral·lela a la recta  $y = -5x + 4$

8. Responen a les qüestions següents:

- Discuti el sistema d'equacions lineals 
$$\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z = 0 \\ (4k+1)x - y - 7z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
 en funció dels valors de  $k$ .
- Resoleu el sistema per a  $k = 1$

9. Siguin els punts  $P(1, 1, 0)$ ,  $Q(1, 0, 1)$  i  $R(0, 1, 1)$  i el pla  $\pi : x + y + z = 4$ .

- Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla que passa pels punts  $P, Q$  i  $R$ .
- Si  $S$  es un punt de  $\pi$ , comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs  $P, Q, R$  i  $S$  no depèn del punt  $S$ .

10. Donats els plans  $\pi_1 : x - 4y + z = 2m - 1$  i  $\pi_2 : 2x - (2m+2)y + 2z = 3m + 1$ ,

- Determineu els valors de  $m$  perquè els plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de  $m$ .
- Sigui el pla  $\pi : 3x - 2y + 3z = 8$ . Estudieu la posició relativa del pla  $\pi$  amb la recta  $r$  definida per la intersecció dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  quan  $m = 1$ .

11. Responen a les qüestions següents:

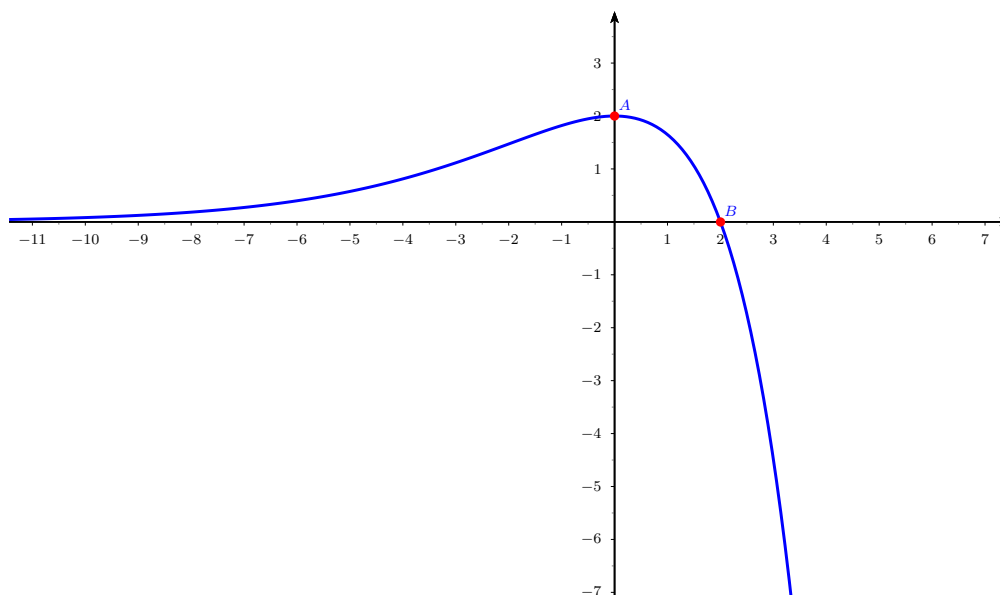
- (a) Si  $A$  i  $B$  són dues matrius quadrades d'ordre  $n$ , demostreu que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA$$

- (b) Si  $M_1$  i  $M_2$  són dues matrius de la forma  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , amb  $a, b \in \mathbb{R}$ , comproveu que el producte  $M_1 \cdot M_2$  té també la mateixa forma i que té també la mateixa forma i que  $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$ .

12. Responen a les qüestions següents:

- (a) La funció  $f(x) = (b - x)e^{ax}$ , amb  $a$  i  $b$  constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts  $A(0, 2)$  i  $B(2, 0)$ , i que en el punt  $A$  la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de  $a$  i  $b$ .

- (b) Calculeu  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

13. Siguin  $r$  i  $s$  les rectes de  $\mathbb{R}^3$  que tenen les equacions següents:

$$r : x + 5 = y - 5 = \frac{z - 3}{2} \text{ i } s : \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}$$

- (a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes  $r$  i  $s$ .  
 (b) Trobeu l'equació general (es a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla  $\pi$  que conté la recta  $r$  i és paral·lel a la recta  $s$ . Calculeu la distància entre la recta  $s$  i el pla  $\pi$  obtingut.

14. Siguin les funcions  $f(x) = \frac{e^{ax+b}}{4}$  i  $g(x) = +\sqrt{3x+4}$ .

- (a) Determineu el domini i el recorregut de la funció  $g$ .  
 (b) Calculeu per a quins valors de  $a$  i de  $b$  les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa  $x = 0$ .

15. Considereu el sistema d'equacions lineals  $\begin{cases} mx - y = m \\ 3x + (m - 4)y = m + 2 \end{cases}$  per a  $m \in \mathbb{R}$ .
- Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre  $m$ .
  - Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.
16. Sabem que una funció  $f$  té per derivada la funció  $f'(x) = (3x - 2)^2(x - 2)$ .
- Calculeu els valors de  $x$  en què la funció  $f$  té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.
  - Determineu la funció  $f$  sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa  $x = 2$ .
17. Donats els vectors  $\vec{u} = (2, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (-1, 3, 4)$  i  $\vec{w} = (0, 3a - 1, 4a)$ ,
- Calculeu els valors del paràmetre  $a$  perquè els vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  siguin linealment dependents.
  - Calculeu els valors del paràmetre  $a$  perquè un tetraedre d'arestes  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  tingui un volum de  $2/3$  d'unitats cúbiques.
18. Considereu l'equació matricial  $X \cdot A = B$ , en què
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a - 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
- Per a quins valors del paràmetre  $a$  l'equació matricial té una solució única?
  - Trobeu la matriu  $X$  que satisfà l'equació matricial quan  $a = 3$ .