

Integral indefinida (antiderivada)

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

29 de octubre de 2012

Primitiva

Definición (Primitiva de una función)

Sea f una función de dominio (a, b) , la función F de dominio (a, b) es

UNA primitiva de la función f **si** $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.

- Existen funciones que NO tienen primitiva, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ y } f(x) = e^{x^2}$$

- El artículo indeterminado indica que es posible que exista más de una primitiva de una función.

Hallar, si existe, una primitiva de la función $f(x) = 2x$

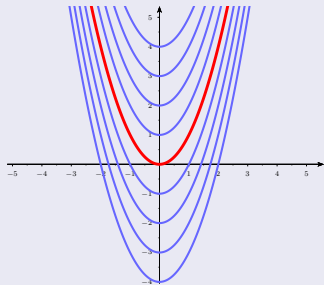
- Por definición de primitiva, hay que encontrar una función tal que su derivada sea igual a $2x$.
- Recordando la tabla de derivadas, **una** primitiva puede ser $F_1(x) = x^2$, pero también $F_2(x) = x^2 + 2$.
- En general $F(x) = x^2 + C, \forall C \in \mathbb{R}$.

Interpretación geométrica

La familia de parábolas

$$F(x) = x^2 + C, \forall C \in \mathbb{R}$$

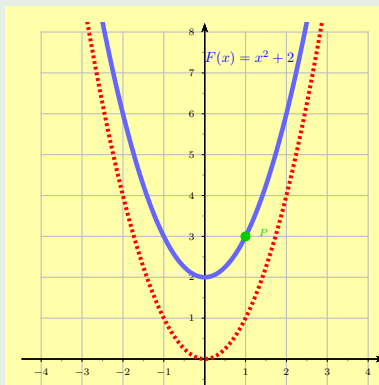
son primitivas de la función lineal $f(x) = 2x$.



De todas las primitivas de la función $f(x) = 2x$, hallar la que pase por el punto $P(1, 3)$

Todas las primitivas de $f(x)$ son $F(x) = x^2 + C$, si pasa por el punto P entonces:

$F(1) = 3 \implies 1^2 + C = 3 \implies 1 + C = 3 \implies C = 2$, la primitiva pedida es $F(x) = x^2 + 2$



Integral indefinida

Definición (Integral indefinida de una función)

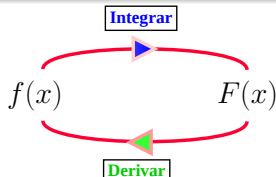
Sea f una función de dominio (a,b) al conjunto de **TODAS** las primitivas de la función recibe el nombre de **integral indefinida** de la función.

Notación

La notación empleada por Leibniz para la integral indefinida

(antiderivada) es:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$



La integral indefinida es lineal

Sean dos funciones f y g que tengan primitiva, F y G , respectivamente.

Teorema

La función suma, $f + g$, también tiene primitiva y su primitiva es igual a la suma de las primitivas, $F + G$.

$$\int (f + g)(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx = F(x) + G(x) + C$$

Demostración.

Para demostrar que $F(x) + G(x)$ es una primitiva de $(f + g)(x)$, hay que derivar:

$$(F(x) + G(x))' \stackrel{(1)}{=} F'(x) + G'(x) \stackrel{(2)}{=} f(x) + g(x)$$

(1) Derivada de una suma de funciones, suma de derivadas.

(2) Por definición de primitiva: $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in D_f \cap D_g$

Teorema

La función $k \cdot f, \forall k \in \mathbb{R}$ también tiene primitiva y su primitiva es

$$k \cdot F, \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx = k \cdot F(x) + C$$

Demostración.

Para demostrar que $k \cdot F(x)$ es una primitiva de $k \cdot f(x)$, hay que derivar:

$$(k \cdot F(x))' \stackrel{(1)}{=} k \cdot F'(x) \stackrel{(2)}{=} k \cdot f(x)$$

- (1) Derivada de una constante por un función es igual a la constante por la derivada de la función.
- (2) Por definición de primitiva: $F'(x) = f(x), \forall x \in D_f$



Tabla de integrales

Función	Integral inmediata	Integral cuasiinmediata
$x^n \quad n \in \mathbb{R} \quad n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int [u(x)]^n \cdot u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x) + C$
a^x	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
e^x	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) dx = e^{u(x)} + C$
$\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + C$
$\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x) dx = \tan u(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2} dx = \arctan u(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = \arcsin u(x) + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} dx = \arccos u(x) + C$

Ejemplos

$$\int \left(\frac{8}{3}x^3 - x^2 - 7 \right) dx$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{8}{3}x^3 - x^2 - 7 \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \frac{8}{3} \int x^3 dx - \int x^2 dx - \int 7 dx \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} x^{3+1} - \frac{1}{3} x^{2+1} - 7 \cdot x = \\ &= \frac{2}{3} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - 7x + C \end{aligned}$$

(1) Linealidad de la integral.

(2) Integral inmediata de funciones potenciales ($n \neq -1$)

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 - 6x + 3}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 - 6x + 3}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(1)}{=}$$

$$= 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 8 \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx - 6 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(2)}{=}$$

$$= 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \stackrel{(3)}{=}$$

$$= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{16}{5} x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$$

(1) Descomposición de fracciones: $\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ y linealidad de la integral.

(2) Propiedades de las potencias.

(3) Integral inmediata de funciones potenciales ($n \neq -1$).

$$\int \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{99} \cdot x \, dx$$

$$\int \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{99} \cdot x \, dx = \frac{3}{4} \int \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{99} \cdot \frac{4}{3}x \, dx = \frac{3}{400} \left(\frac{2}{3}x^2 - 5 \right)^{100} + C$$

$$\int \sqrt[5]{x^2 + 1} \cdot x \, dx$$

$$\int \sqrt[5]{x^2 + 1} \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int \left(x^2 + 1 \right)^{\frac{1}{5}} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} (x^2 + 1)^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{12} (x^2 + 1)^{\frac{6}{5}} + C$$

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 6x - 1} \, dx$$

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 6x - 1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x - 1} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 6x - 1| + C$$