



# COMPLEXOS



Matemàtiques. 1r Batxillerat

## ELS NOMBRES COMPLEXOS

### A. INTRODUCCIÓ

A 4t d'ESO ja heu treballat a fons la descomposició factorial de polinomis i la resolució d'equacions. Per resoldre l'equació  $y = ax^2 + bx + c$  podem prescindir del mètode de Ruffini utilitzant la fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Els algebristes dels segles XV i XVI en resoldre equacions de segon grau del tipus  $x^2 - 4x + 13 = 0$  i arribar a l'expressió  $x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$  deien "No és possible extreure l'arrel quadrada d'un nombre negatiu i per tant l'equació no té solució".

Però en algun moment els algebristes es van decidir a operar amb aquestes expressions, com si es tractés de nombres reals.

Podem **imaginar** per un moment, que  $\sqrt{-1}$  existeix, dissimular una mica, aplicar la fórmula i trobar després solucions a equacions que sí existeixen de debò.

$$\frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1}$$

I continuaven operant amb  $\sqrt{-1}$  com si es tractés d'un nombre real.

Leibnitz (1646-1716) era molt hàbil amb aquests tipus de malabarismes matemàtics. Si tenia una equació de la que no podia trobar la solució, l'únic que havia de fer era **imaginar**



per un moment que  $\sqrt{-1}$  existeix. Per aquesta època, ja podeu suposar que, a base d'*imaginar* tant, el nom que rebien les arrels negatives eren justament **nombres imaginaris**. Leibnitz, matemàtic, filòsof i teòleg deia: *els nombres imaginaris són una espècie d'éssers amfibis a mig camí entre la existència i la no existència que recorden, en aquest aspecte, a l'Esperit*

*Sant*. Tal era el seu entusiasme que va escriure una carta als jesuïtes missioners recomanant utilitzar aquest argument per convertir al cristianisme a l'emperador xinès que mostrava certes inclinacions científiques.

Al 1777 tot i que es continuava considerant que les arrels negatives no existeixen el seu ús en determinades tècniques matemàtiques era molt estès. Euler, per facilitar la tasca va introduir la notació  $i = \sqrt{-1}$

**A.1** Resol les següents equacions utilitzant la lletra  $i$  per expressar les arrels negatives

a)  $x^2 + 1 = 0$

b)  $x^2 + 4 = 0$

c)  $x^2 + 25 = 0$

d)  $x^2 + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & x^2 + 2x + 2 = 0 \\ \text{f)} \quad & x^2 + x + 1 = 0 \\ \text{g)} \quad & x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

### Notació

La incorporació dels nombres imaginaris ens porta a crear un nou conjunt de nombres anomenats **nombres complexos**,  $C$ .

$$C = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Direm que  $a$  és la **component real** i  $b$  la **component imaginària** del complex  $z = a + bi$

En particular, si  $b = 0$  el complex  $z$  serà un nombre **real** és a dir  $\mathbb{R} \subset C$   
i si  $b \neq 0$  l'anomenarem nombre **imaginari**, en el cas en que a més  $a = 0$  es tractarà d'un **imaginari pur**.

Per exemple, les solucions dels 4 primers exercicis són **imaginaris purs** doncs la seva solució depèn sols d'una arrel negativa. Els apartats **e** i **f**, però, tenen una solució de la forma  $a + bi$  amb una **part real**  $a$  i un altra **part imaginària**  $b$ , per tant es tracta de **nombres imaginaris**. Les solucions de l'última equació són nombres **reals** i en qualsevol cas totes les solucions de totes les equacions són **nombres complexos**.

La paraula complex no té aquí un significat de *difícil*, sinó de *barreja*.

**A.2** Classifica els següents nombres indicant quin d'ells és complex, quin real, quin imaginari i quin imaginari pur, digues quina és la part real i quina la part imaginària.

$$5 - \sqrt{3}i; \frac{1}{2} - \frac{4}{3}i; \frac{3}{7}; -5i; \sqrt{7} - \frac{\sqrt{5}}{2}i; \sqrt[3]{5}i; 0; -i; \frac{7}{4} - 3i; -11$$

**A.3** Durant el teu aprenentatge escolar has anat aprenent i descobrint tots els conjunts de nombres. De petit sols hi havia nombres per comptar, més tard vareu descobrir que també hi havia decimals, a la ESO ja vareu veure l'existència de negatius, etc

Avui és un dia important a la teva vida perquè ja has après tots els conjunts diferents de nombres que existeixen: **N**, **Z**, **Q**, **R** i **C**. Escribe el nom de cadascun d'aquests conjunts i fes una petita descripció de cadascun d'ells.

**A.4** La unitat imaginària és clau per entendre tot el que hi ha al darrere dels complexos. En particular, saber manipular les seves potències és determinant per poder gaudir del seu món. Per tant, calcula:

$$\begin{array}{cccccc} i^0 = & i^1 = & i^2 = & i^3 = & i^4 = & i^5 = \\ i^6 = & i^7 = & i^8 = & i^9 = & i^{10} = & i^{11} = \\ i^{20} = & i^{40} = & i^{41} = & i^{42} = & i^{43} = & i^{44} = \\ i^{57} = & i^{79} = & i^{241} = & i^{9326} = & i^{1078} = & i^{98} = \\ i^{4n} = & i^{4n+1} = & i^{4n+2} = & i^{4n+3} = & & \end{array}$$

### Més notacions

Considerem dos nombres complexos  $a + bi$  i  $a' + b'i$

- Dos nombres complexos són iguals quan tenen **iguals** les seves parts reals i tenen iguals les seves parts imaginàries. És a dir, si  $a = a'$ ,  $b = b'$
- Dos nombres complexos són **conjugats** si les seves parts reals són iguals, i les seves parts imaginàries iguals però de diferent signe. És a dir,  $a = a'$ ,  $b = -b'$ , per exemple  $2+3i$  i  $2-3i$ . Al conjugat d'un complex  $z$  se'l denota per  $\bar{z}$ . Si  $z = 2+3i$  aleshores  $\bar{z} = 2-3i$
- Dos nombres complexos són **oposats** si tant les seves parts reals com les imaginàries són iguals, però de signe diferent: És a dir,  $a = -a'$ ,  $b = -b'$ . Per exemple  $2+3i$  i  $-2-3i$

**A.5** Escriu el conjugat i l'oposat dels nombres complexos següents:

$$5 - \sqrt{3}i; \frac{1}{2} - \frac{4}{3}i; \frac{3}{7}; -5i; \sqrt{7} - \frac{\sqrt{5}}{2}i; \sqrt[3]{5}i; 0; -i; \frac{7}{4} - 3i; -11$$

### B. Operacions amb nombres complexos.

Amb els nombres complexos, com amb qualsevol altre conjunt numèric, es poden fer tota mena d'operacions.

Més endavant veurem que els nombres complexos es poden representar de diferents formes, la que coneixeu fins ara,  $a + bi$  s'anomena **forma binòmica** perquè té l'aspecte d'un polinomi de grau 1 de dos termes. Pel que fa a les operacions, un complex en forma binòmica, se suma, resta i multiplica pràcticament igual que un polinomi. La divisió serà un mica diferent, així com les potències i les arrels.

### Suma i resta de complexos

Per sumar complexos, és procedeix d'una manera similar als polinomis, cal sumar la part real amb la part real i la part imaginària amb la part imaginària, per restar sols cal sumar l'oposat.

**B.1** Calcula

**a)**  $(-2+4i) + (8 - 9i) =$

**b)**  $(-5+8i) - (6 - 7i) =$

**c)**  $9 + (3 - i) =$

**d)**  $6 - (i - 5) =$

**e)**  $\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}i\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right) =$

**f)**  $\left(\sqrt{7} - \frac{\sqrt{5}}{2}i\right) - (3 - \sqrt{10}i) =$

## Producte de nombres complexos

El producte de dos complexos es fa igual que en els polinomis, però ara cal tenir en compte que  $i^2 = -1$ . Per exemple:

$$(3 + 5i) \cdot (2 - 6i) = 6 - 18i + 10i - 30i^2 = 6 - 8i - 30(-1) = 6 - 8i + 30 = 36 - 8i$$

**B.2** Calcula

a)  $(-2+4i) \cdot (8 - 6i) =$

b)  $(-5+8i) \cdot (6 - 7i) =$

c)  $9 \cdot (3 - i) =$

d)  $6i \cdot (i - 5) =$

e)  $\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}i\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right) =$

f)  $(a + bi) \cdot (c + di) =$

**B.3** Calcula

a)  $(2 + 3i) \cdot (2 - 3i) =$

b)  $(a + bi) \cdot (a - bi) =$

c)  $(6 + \frac{1}{2}i) \cdot (6 - \frac{1}{2}i) =$

d)  $(4 - 3i)(4 + 3i) =$

e)  $(3 + 5i)^2 =$

f)  $(6 - 2i)^2 =$

g)  $(a + bi)^2 =$

h)  $(1+4i)^3 =$

## Divisió entre nombres complexos

A l'exercici anterior hauràs vist que el producte d'un complex amb el seu conjugat dona un nombre real, en llenguatge simbòlic:  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ . Aprofitarem aquest fet per fer la divisió de polinomis. Per dividir polinomis **multiplicarem numerador i denominador pel conjugat del denominador**, d'aquesta manera convertim el denominador en un nombre real. Observa l'exemple:

$$\frac{3+5i}{4+6i} = \frac{(3+5i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{12-18i+20i-30i^2}{16+36} = \frac{12-18i+20i+30}{52} = \frac{42+2i}{52} = \frac{42}{52} + \frac{2}{52}i = \frac{21}{26} + \frac{1}{26}i$$

**B.4** Calcula

a)  $\frac{6+2i}{-3+8i} =$

b)  $\frac{-3+i}{8+4i} =$

c)  $\frac{6}{1-i} =$

d)  $\frac{2+i}{4i} =$

e)  $\frac{-16+4i}{8} =$

f)  $\frac{-3i}{3+\frac{1}{2}i} =$

## Operacions de complexos amb calculadora

La calculadora Casio fx 82ES és un model extraordinari per la ESO però comença a quedar una mica petita pel batxillerat (tot i que encara és vàlida). Els models següents casio fx 350ES, Casio fx 570ES i superiors incorporen algunes funcions més apropiades pel batxillerat una d'elles és la possibilitat de treballar amb nombres complexos amb l'opció d'introduir nombres de la forma  $a + bi$  i poder fer operacions amb ells. Les calculadores gràfiques possiblement serien les ideals pel batxillerat però si disposeu d'ordinador per fer gràfics la necessitat d'una calculadora gràfica és ja discutible.

**B.5** Agafeu alguna calculadora d'un alumne de la classe que tingui incorporada la possibilitat de fer complexos i comproveu com fa algunes de les sumes, restes, multiplicacions i divisions dels exercicis anteriors.

## C. Representació gràfica del nombres complexos

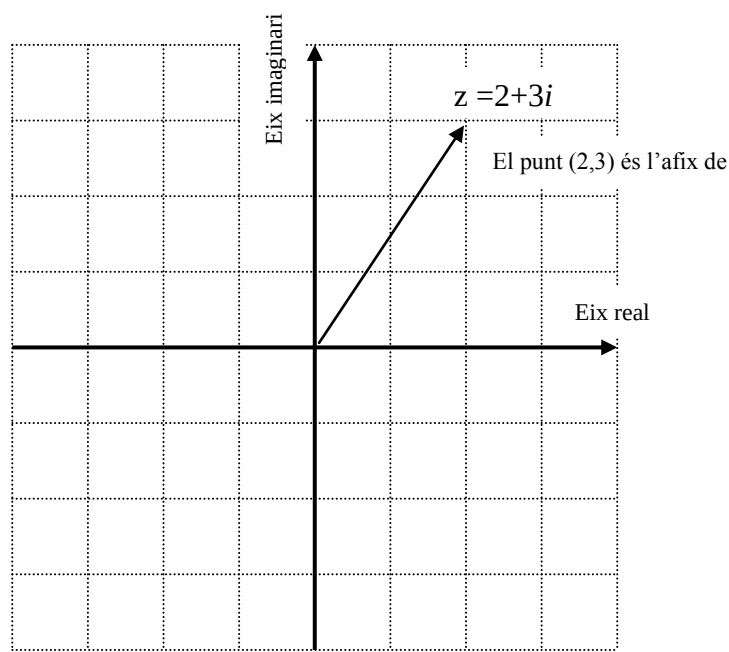
Ja hem dit que aquests nombres no deixaven de ser una mena de cosa estranya que no existien a la realitat però que eren útils per resoldre determinat tipus de problemes. **Euler**, l'any 1777 va tenir la idea de posar el nom  $i = \sqrt{-1}$ . Aquest fet no va fer canviar gaire l'opinió dels matemàtics sobre la natura intrínseca dels nombres imaginaris, però uns anys després al 1798 **Caspar Wessel** va donar el pas definitiu, senzillament se li va ocórrer representar gràficament aquests nombres i com que "veure és creure" a partir d'aquest moment ningú va dubtar, ja, de l'existència tangible dels nombres complexos.



Per representar-los gràficament senzillament es dibuixen uns eixos de coordenades i es considera al nombre complex  $z = a + bi$  com un vector en el que la component real  $a$  és la component de l'eix d'abscisses i la component imaginària  $b$  la de l'eix d'ordenades Anomenem **afix** del complex  $z$  al punt del pla  $(a,b)$

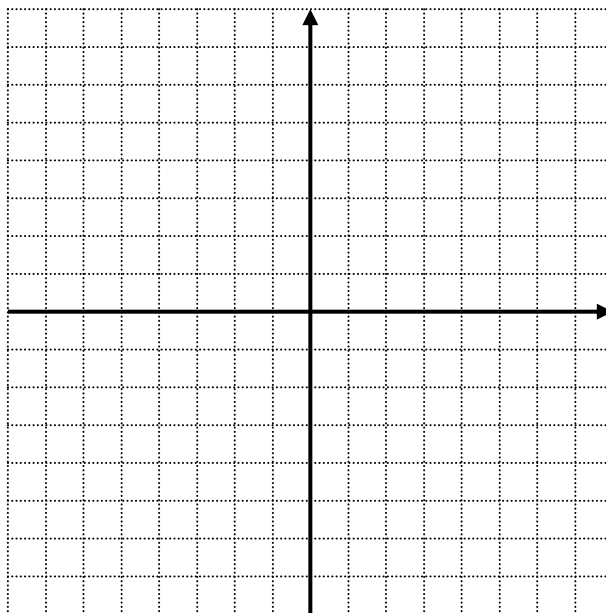
Exemple:

El nombre complex  $z = 2 + 3i$  quedaria representat com el vector de components (2,3), el punt (2,3) seria l'afix del complex (vector)  $z$



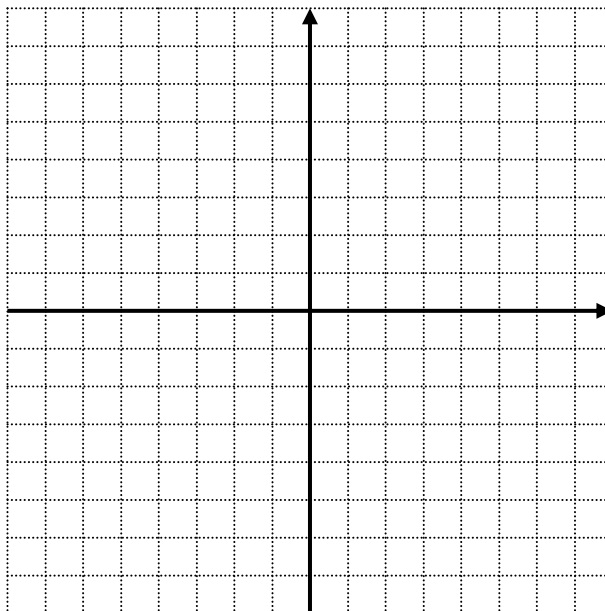
**C.1** Representa gràficament els següents nombres complexos:

- a)  $4 + 5i$
- b)  $2 - 6i$
- c)  $-4 + i$
- d)  $-1 - 7i$
- e)  $3i$
- f)  $5$
- g)  $-4i$
- h)  $-6$
- i)  $3i - 2$
- j)  $2i + 3i$
- k)  $4 - 2$



**C.2** Ja hem comentat que hi havia diferents maneres de representar els nombres complexos i per tant també hi ha diferents maneres de fer les operacions. La representació gràfica és una manera tan vàlida com una altra qualsevol. La suma i la resta de nombres complexos gràficament és idèntica a la suma i resta de vectors. Si encara no heu fet les operacions de vectors el professor us pot explicar en un moment com es fan les sumes i restes gràficament. Feu després les operacions següents i comprova el resultat fent la suma numèrica.

- a)  $(-2+4i) + (3 - 5i) =$
- b)  $(-5+3i) - (2 - 4i) =$
- c)  $(1) + (3 - i) =$
- d)  $(2) - (i - 5) =$
- e)  $(2i) + (4i) =$
- f)  $(3) - (5i) =$



## D. Les arrels de 1. Treball per lliurar al professor

Fins ara sabíem que  $\sqrt{1} = \pm 1$  i pensàvem que  $\sqrt[3]{1} = 1$  i no ens plantejàvem res més. Ara en canvi pensem: si  $\sqrt{1}$  té dues solucions,  $\sqrt[3]{1}$  no hauria de tenir-ne tres? Anem a veure-ho. En realitat  $\sqrt[3]{1}$  és la solució a l'equació  $x^3 - 1 = 0$  i l'arrel que tenim és fàcil treure-la per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Per tant  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ , així, a més de l'arrel  $x = 1$  puc intentar trobar-ne dues més resolent l'equació  $x^2 + x + 1 = 0$  que tindrà dues solucions complexes i completarem les 3 solucions de  $\sqrt[3]{1}$

TREBALL:

- Calcula totes les solucions de  $\sqrt{1}$ ,  $\sqrt[3]{1}$ ,  $\sqrt[4]{1}$ .
- Fes el mateix per  $\sqrt[6]{1}$ . Ajuda: Pots fer  $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$
- Representa gràficament totes les solucions de cada una de les arrels utilitzant uns eixos de coordenades per cada arrel. Si ajuntes totes les solucions amb una línia poligonal, quina figura queda?
- NO existeix cap desenvolupament algebraic que permeti trobar les 5 arrels de  $\sqrt[5]{1}$ , però si has fet bé l'apartat anterior i observes les figures geomètriques que surten al ajuntar les solucions de cada arrel, segur que podràs enginyar-te-les per trobar les solucions de  $\sqrt[5]{1}$ , utilitzant tècniques geomètriques i ajudant-te de la trigonometria.
- Comproveu amb alguna calculadora Casio 570 o superior que efectivament si eleveu a 5 les solucions complexes dóna 1.

## E. Complexos en forma polar.

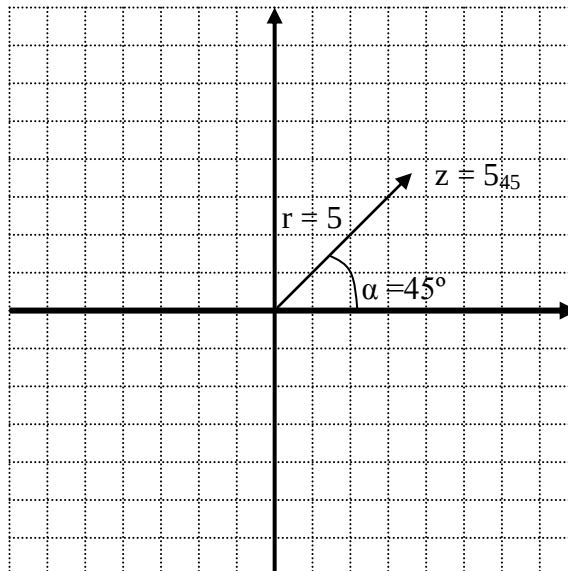
Acaben de veure que pot ser molt útil tenir una manera d'expressar els complexos fent referència únicament a la longitud del vector i l'angle que forma amb l'eix OX.

Direm que un complex és en forma **Polar** o en forma **mòdul argumental** si està expressat com  $r_\alpha$ .

$r$  = longitud del vector (mòdul)

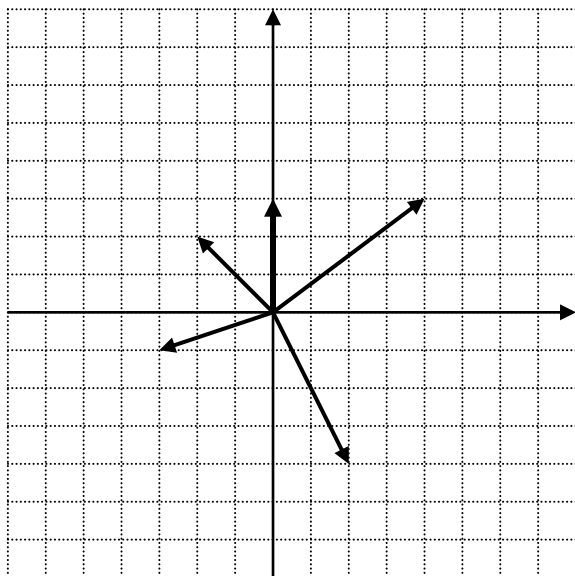
$\alpha$  = angle amb eix OX (argument).

Per exemple, el vector  $z$  del dibuix té per longitud 5 unitats i l'angle que forma amb l'eix OX és  $\alpha = 45^\circ$ , per tant direm que  $z = 5_{45}$

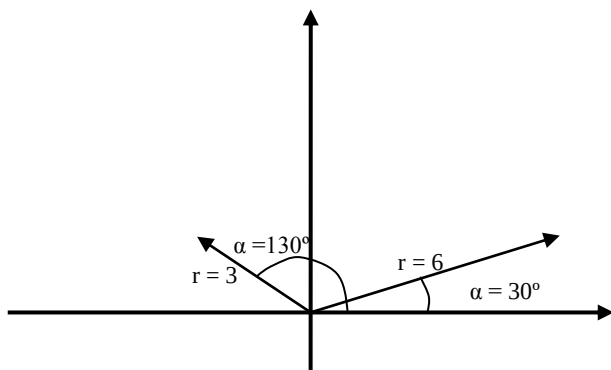


Per passar de la forma binòmica a la forma polar utilitzarem el Teorema de Pitàgores i la trigonometria.

**E.1** Escribe los siguientes números complejos en forma binómica i en forma polar:



**E.2** Escribe los siguientes números complejos en forma binómica i en forma polar:



### Complexos en forma trigonomètrica

Hauràs observat que per passar de binòmica a polar utilitzant la trigonometria tenim que

$$r_{\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Al nombre complex expressat d'aquesta forma, sense acabar de calcular el sinus i cosinus amb calculadora, s'anomena forma trigonomètrica del nombre complex

**E.3** Escribe los dos complexos de l'exercici anterior en forma trigonomètrica.

**E.4** Escribe en forma trigonomètrica i en forma polar els nombres complexos següents:

**a)**  $1 + i =$

**b)**  $1 + 3i =$

- c)  $3 - 4i =$   
d)  $-4 - 4i =$   
e)  $2i =$   
f)  $5 =$   
g)  $-3i =$   
h)  $-4 =$

## F. Operacions en forma polar

### Suma i resta.

La suma i la resta en forma polar és tant complicada que si volem sumar cal passar a forma binòmica, sumar i després, si cal, tornar a passar a forma polar

### producte

Per multiplicar dos complexos en forma polar tant sols cal multiplicar els mòduls i sumar els arguments. Anem a justificar aquesta afirmació:

$$\begin{aligned} r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot r'(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= r \cdot r'(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) = \\ &= r \cdot r'(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) = \\ &= (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Exemple:  $3_{15} \cdot 4_{25} = (3 \cdot 4)_{15 + 25} = 12_{40}$

Observa que multiplicar en forma polar és molt més senzill que fer-ho en forma binòmica.

### divisió

Com a conseqüència immediata del producte podem deduir que

$$r_{\alpha} : r'_{\beta} = \left( \frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \beta}$$

ja que  $\left( \frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \beta} \cdot r'_{\beta} = \left( \frac{r \cdot r'}{r'} \right)_{\alpha - \beta + \beta} = r_{\alpha}$

#### F.1 Efectua les següents operacions

- a)  $5_{34} \cdot 3_{26} =$   
b)  $18_{120} : 6_{33} =$   
c)  $8_{254} \cdot 6_{158} =$   
d)  $9_{12} : 3_{26} =$   
e)  $10_{68} \cdot 7_{90} =$   
f)  $1_{90} \cdot 1_{90} =$   
g)  $2_{90} \cdot 3_{180} =$

## potència

**F.2** Recorda el desenvolupament del binomi de Newton amb el triangle de Tartaglia i calcula  $(1 + i)^7$

**F.3** Passa a forma polar i després multiplica 7 cops el nombre complex per tal de calcular  $(1 + i)^7$ . Torna a passar el resultat a forma binòmica. ¿quina de les dues tècniques t'ha resultat més senzilla?

Tal com acabem de veure, és fàcil deduir a partir de la multiplicació que per fer potències en forma polar sols cal fer :  $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n \cdot \alpha}$

**F.4** Calcula (pots donar el resultat en forma polar)

a)  $(1 + i)^{10} =$

b)  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8 =$

c)  $(1 - i)^8 =$

d)  $(3_{260})^6 =$

## Formula de Moivre

Amb ajut de la potencia d'arrels i utilitzant la forma trigonomètrica obtenim una nova fórmula trigonomètrica

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

### Demostració

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (1_\alpha)^n = 1_{\alpha n}^n = 1_{\alpha n} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

**F.5** Expressa  $\cos 3\alpha$  i  $\sin 3\alpha$  en funció de  $\cos \alpha$  i  $\sin \alpha$  utilitzant la fórmula de Moivre. Tingues en compte que  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

## Arrels

**F.6** Ja hem fet un exercici en el que hem calculat totes les arrels de 1 fins a índex 6. Observa la representació gràfica d'aquestes solucions i escriu, en **forma polar** totes les arrels de:

a)  $\sqrt{1}$

b)  $\sqrt[3]{1}$

c)  $\sqrt[4]{1}$

d)  $\sqrt[5]{1}$

e)  $\sqrt[6]{1}$

f)  $\sqrt[n]{1}$

**F.7** Sembla que, si treballem amb complexos una arrel té tantes solucions com l'índex de l'arrel.

a) ¿Quines creus que seran les 3 solucions de  $\sqrt[3]{2}$ ? ¿Per què?

b) Intenta raonar, també quines creus que seran les n arrels de  $\sqrt[n]{i}$

En general si volem calcular  $\sqrt[n]{r_\alpha}$  haurem de fer:

$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_\alpha$ , però com que  $\alpha_1 = 360 + \alpha$ ;  $\alpha_2 = 2 \cdot 360 + \alpha$ ;  $\alpha_3 = 3 \cdot 360 + \alpha$ ;

$\alpha_4 = 4 \cdot 360 + \alpha$ ; ...  $\alpha_{(n-1)} = (n-1) \cdot 360 + \alpha$  representen el mateix complex (però cada un donant una volta més als eixos de coordenades), podem obtenir una solució per l'  $\alpha$  inicial i una nova solució per cada una de les  $n-1$  voltes següents que es poden fer. Si féssim una volta més ja es repetirien les solucions.

**F.8** Calcula

a)  $\sqrt[3]{-i}$

b)  $\sqrt[4]{1+i}$

c)  $\sqrt{-25}$

d)  $\sqrt[3]{-27}$

e)  $\sqrt[3]{1-i}$

f)  $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

g)  $\sqrt[5]{\frac{-32}{i}}$

h)  $\sqrt[3]{\frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$

**F.9** Resol les equacions

a)  $x^6 + 64 = 0$

b)  $ix^3 - 27 = 0$

c)  $x^5 + 32 = 0$

d)  $iz^4 - 4 = 0$

e)  $z^3 + 8i = 0$

f)  $z^2 - 2z + 5 = 0$

## G. Aplicacions del nombre complex

Al començament del dossier segur tots pensàveu que estàvem fent ximpleries. Segurament que teníeu la sensació d'estar perdent el temps fent una cosa que sempre ens havien dit que no existia.

A mesura que hem anat fent el dossier i ens hem anat familiaritzant amb els complexos, haureu anat veient més el sentit a tot plegat, sobre tot des del moment en que hem representat gràficament els complexos; però, així i tot, no us ens queda un cuquet a l'estómac? No teniu la sensació que això no és més que un castell de fum, sense consistència ni coherència?

Leonardo Da Vinci va idear diverses màquines de volar al voltant de l'any 1500. A finals del segle XIX, però, els grans avanços en física i matemàtiques no havien donat cap fruit que fes pensar que seria possible volar amb una màquina propulsada, fins i tot hi havia teòrics que ja asseguraven que mai seria possible. Però, els germans Wright, dos mecànics de bicicletes, ignorant els avanços teòrics de mecànica de fluxos van aconseguir volar amb la seva "bicicleta voladora" el dia 17 de desembre del 1903.



Nikolai Egorovich **Zhukovskii** (1847-1921) era un dels científics russos que estudiava la possibilitat de volar. A l'any 1888 va publicar alguns resultats teòrics importants. La notícia del vol dels germans Wright va ser l'empenta definitiva. L'any 1904 es va crear a Moscou l'Institut d'Aerodinàmica rus amb Zhukovskii al capdavant. 30 anys després s'havia superat la barrera del so.

Amb Zhukovskii es van desenvolupar els conceptes teòrics que van permetre el miracle aeroespacial: la sustentació, circulació, capa límit, separació, règim laminar i turbulència.

Zhukovskii va desenvolupar una tècnica que li permetia observar els efectes del fregament de l'aire sobre un tub cilíndric i a partir de transformacions geomètriques fetes amb nombres complexos deduir, de manera teòrica, quins efectes produiria l'aire sobre una determinada forma d'ala d'avió. Podia modificar la forma de l'ala (tot teòric) i deduir quina hauria de ser la forma òptima per aconseguir uns efectes determinats. Sols calia després construir l'ala amb la forma que havia decidit Zhukovskii.

