

Derivada de una función

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

2 de septiembre de 2014

Definición de tasa de variación media

Definición

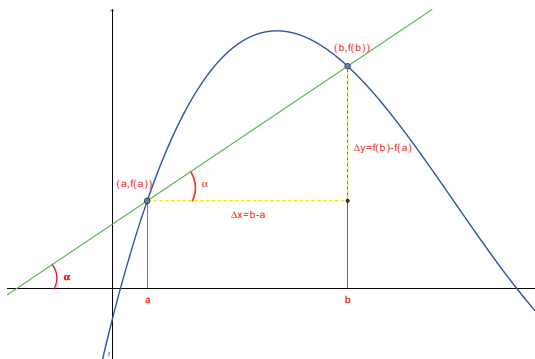
Sea la función real $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama tasa de variación media en el intervalo $[a, b] \subset D_f$, al cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente.

$$T.V.M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica de la TVM

La TVM es la pendiente de la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de la función.

Interpretación geométrica



$$T.V.M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \alpha = m_{\text{secante}}$$

Ejemplos

Sea la función $f(x) = x^2$ calcular la tasa de variación media en:

- ① El intervalo $[-2, 1]$:

$$TVM = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 - 4}{1 + 2} = \boxed{-\frac{3}{3} = -1 < 0}$$

► Gráfica

- ② El intervalo $[-1, 3]$:

$$TVM = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{9 - 1}{1 + 3} = \boxed{\frac{8}{4} = \frac{1}{2} > 0}$$

► Gráfica

- ③ El intervalo $[-2, 2]$: $TVM = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4 - 4}{2 + 2} = \boxed{\frac{0}{4} = 0}$

► Gráfica

Interpretación geométrica

- Si la $TVM > 0$ significa que la pendiente es positiva (recta creciente).
- Si la $TVM < 0$ significa que la pendiente es negativa (recta decreciente).
- Si la $TVM = 0$ significa que la pendiente es cero (recta constante).

Aplicación GEOGEBRA

Construcción (GEOGEBRA): [aquí](#)

Definición de derivada de una función en un punto

Definición

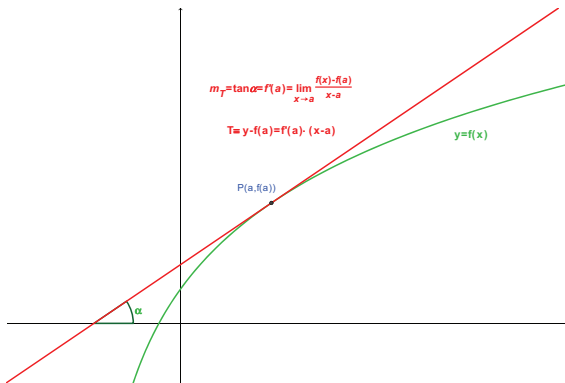
Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$ la DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN EL PUNTO $x = a$ es el **límite**, si existe, del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Interpretación geométrica de la derivada

Interpretación

La derivada de una función en un punto, si existe, **es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.**



Ejemplos

Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 3$ en los puntos de abscisa -1 y $\frac{1}{2}$

- 1 El punto $P(-1, f(-1)) = (-1, -2)$. El haz de rectas de vértice P tiene de ecuación: $y - (-2) = m(x - (-1))$ y la ecuación de la recta tangente es: $y + 2 = m_T(x + 1)$ siendo $m_T = f'(-1)$.

$$m_T = f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 3 - (-2)}{h} =$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 3 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2+h)}{h} = -2$$

$$T \equiv y + 2 = -2(x + 1) \implies 2x + y + 4 = 0$$

► Gráfica

2

- 2 El punto $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$. El haz de rectas de vértice P tiene de ecuación: $y - \left(-\frac{11}{4}\right) = m\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)$ y la ecuación de la recta

tangente es: $y + \frac{11}{4} = m_T \left(x - \frac{1}{2}\right)$ siendo $m_T = f' \left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} m_T = f' \left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + h\right)^2 - 3 - \left(-\frac{11}{4}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} + h + h^2 - 3 + \frac{11}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 + h)}{h} = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$T \equiv y + \frac{11}{4} = 1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \implies 4x - 4y - 13 = 0$$

Derivadas laterales

Derivada lateral por la izquierda

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$ la DERIVADA LATERAL POR LA IZQUIERDA EN EL PUNTO $x = a$ es el **límite**, si existe, del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a a POR SU IZQUIERDA.

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h}$$

Derivada lateral por la derecha

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D_f$ la DERIVADA LATERAL POR LA DERECHA EN EL PUNTO $x = a$ es el **límite**, si existe, del cociente entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de la variable independiente cuando ésta tiende a a POR SU DERECHA.

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Teorema 1

Si la función f es derivable en $x = a$ ENTONCES la función es continua en a .

$$f \text{ derivable} \implies f \text{ continua}$$

Consecuencias

- Si la función **NO es continua** en $a \in D_f$ entonces **NO es DERIVABLE** en a .
- La condición **NECESARIA, NO SUFICIENTE**, para que una función sea derivable en un punto es que sea CONTINUA.

Teorema 2

Condición necesaria y suficiente

La condición **NECESARIA Y SUFICIENTE**, para que una función sea derivable en un punto es que sea continua, existan las derivadas laterales y sean iguales.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Razonar si la función es derivable en el punto $x = 1$.

- ¿La función es continua?

$$1 \in D_f \text{ y } f(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2(1 - h)^2 - 3 = \boxed{\boxed{-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} -(1 + h)^2 = \boxed{\boxed{-1}}$$

La función es continua: $\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 = f(1)}$

- Derivada lateral por la izquierda.

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1-h)^2 - 3 - (-1)}{-h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 4h + h^2 - 2}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(-4 + h)}{-\cancel{h}} = \boxed{4} \end{aligned}$$

- Derivada lateral por la derecha.

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 - (-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 - 2h - h^2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \boxed{-2} \end{aligned}$$

Conclusión

La función NO es derivable en $x = 1$ al no ser las derivadas laterales iguales.

Ejercicios

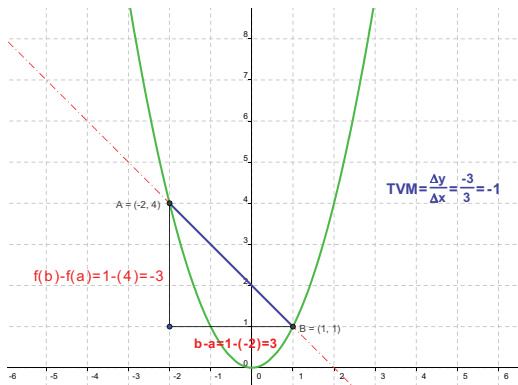
Ejercicio 1

Sea la función $f(x) = -x^2 + 2x + 5$, hallar:

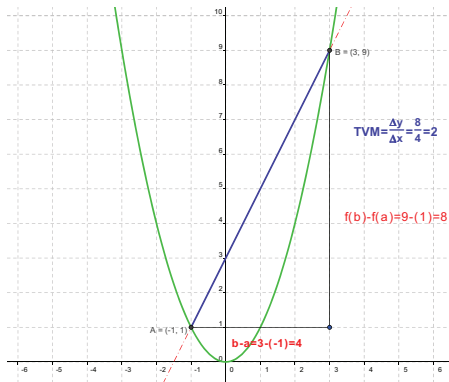
- (1) El punto donde la tangente a la función es paralela a la recta
 $r \equiv 8x + 2y - 5 = 0$ [► Solución](#)
- (2) El punto donde la tangente a la función es perpendicular a la recta
 $s \equiv x + 6y - 12 = 0$ [► Solución](#)

[► Solución gráfica](#)

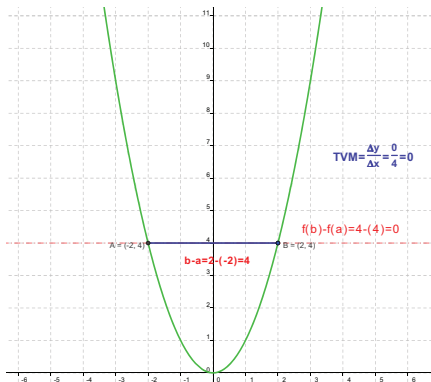
Gráficos



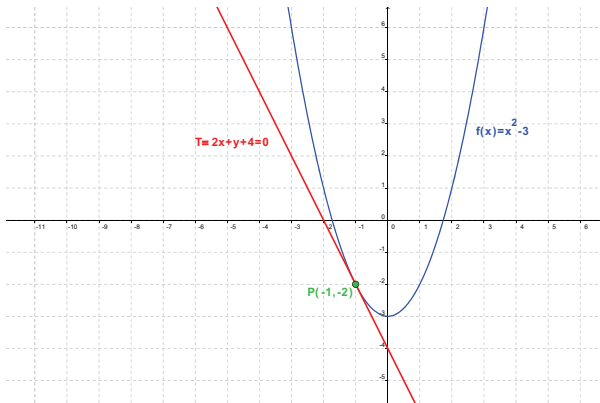
Gráficos



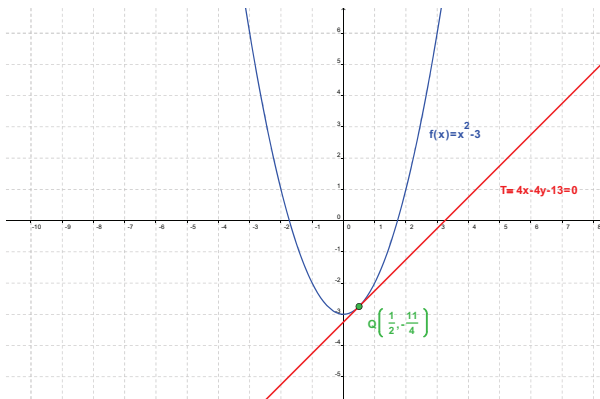
Gráficos



Gráficos



Gráficos



Ejercicio 1

- (1)
- Por la condición de rectas paralelas: $m_T = m_r$.
 - La recta r en forma explícita $r \equiv y = -4x + \frac{5}{2} \implies m_r = -4$.
 - Definición de derivada e interpretación geométrica de la derivada:
 $m_T = f'(a) = -4$ y el punto de tangencia, si existe, $P(a, f(a))$.
 - Cálculo de la derivada en el punto $P(a, f(a))$:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(a+h)^2 + 2(a+h) + 5 - (-a^2 + 2a + 5)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{a^2} - 2ah - \cancel{h^2} + \cancel{2a} + 2h + \cancel{5} - \cancel{a^2} - \cancel{2a} - \cancel{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(-2a + 2 + h)}{\cancel{h}} = \\
 &= \boxed{-2a + 2} \quad \text{Igualando a la pendiente: } -2a + 2 = -4 \implies \boxed{a = 3}
 \end{aligned}$$

- Punto de tangencia: $P(3, f(3)) \implies \boxed{P(3, 2)}$.

◀ Regresar al ejercicio

Ejercicio 1

- (2) • Por la condición de rectas perpendiculares:

$$m_T \cdot m_s = -1 \implies m_T = \frac{-1}{m_s}.$$

- La recta s en forma explícita $r \equiv y = -\frac{1}{6}x + 2 \implies m_r = 6$.
- Definición de derivada e interpretación geométrica de la derivada:

$$m_T = f'(b) = 6 \text{ y el punto de tangencia, si existe, } Q(b, f(b)).$$

- Cálculo de la derivada en el punto $Q(b, f(b))$ (realizada en el apartado anterior):

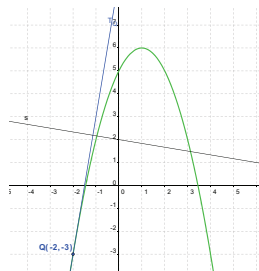
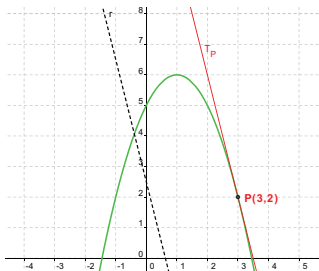
$$f'(b) = -2b + 2$$

- Igualando: $-2b + 2 = 6 \implies b = -2$

- Punto de tangencia: $Q(-2, f(-2)) \implies Q(-2, -3)$.

◀ Regresar al ejercicio

Gráficas ejercicio 1



◀ Regresar al ejercicio

► Ejercicios resueltos