

Cálculo diferencial

Teoremas de continuidad y derivabilidad

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

11 de junio de 2014

Teorema (Teorema de Weierstrass)

*Toda función **continua** definida en un **interval cerrado** $[a, b]$ alcanza extremos absolutos (máximo y mínimo).*

Teorema (Teorema de Weierstrass)

*Toda función **continua** definida en un **interval cerrado** $[a, b]$ alcanza extremos absolutos (máximo y mínimo).*

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces es cierto.

Teorema (Teorema de Weierstrass)

*Toda función **continua** definida en un **interval cerrado** $[a, b]$ alcanza extremos absolutos (máximo y mínimo).*

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces es cierto.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** alcanzar extremos absolutos en el dominio de la función.

Teorema (Teorema de Weierstrass)

*Toda función **continua** definida en un **interval cerrado** $[a, b]$ alcanza extremos absolutos (máximo y mínimo).*

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces es cierto.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** alcanzar extremos absolutos en el dominio de la función.
- Ejemplos (GEOGEBRA): [aquí](#)

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una *función continua* en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una *función continua* en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.
- Interpretación gráfica: si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo (a, b) , al menos, en un punto.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.
- **Interpretación gráfica**: si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo (a, b) , al menos, en un punto.
- **Gráficamente (GEOGEBRA)**: [aquí](#)

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.
- **Interpretación gráfica**: si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo (a, b) , al menos, en un punto.
- Gráficamente (GEOGEBRA): aquí

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.
- **Interpretación gráfica**: si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo (a, b) , al menos, en un punto.
- Gráficamente (GEOGEBRA): aquí

Bolzano-inecuaciones

Sea f una función **CONTINUA**:

- Si f **NO TIENE CEROS** entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea f una **función continua** en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces
 $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, un cero en el intervalo (a, b) .
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** tener CEROS.
- **Interpretación gráfica**: si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo (a, b) , al menos, en un punto.
- Gráficamente (GEOGEBRA): aquí

Bolzano-inecuaciones

Sea f una función **CONTINUA**:

- Si f **NO TIENE CEROS** entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.
- Entre dos ceros consecutivos, el signo de la función se mantiene.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* , *derivable en (a, b)* y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* , *derivable en (a, b)* y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, en el intervalo (a, b) un valor en el cual la primera derivada se anula.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* , *derivable en (a, b)* y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, en el intervalo (a, b) un valor en el cual la primera derivada se anula.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que la derivada se anule en algún punto intermedio.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* , *derivable en (a, b)* y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, en el intervalo (a, b) un valor en el cual la primera derivada se anula.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que la derivada se anule en algún punto intermedio.
- Interpretación geométrica: si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, al menos, en un punto del intervalo (a, b) la tangente a la gráfica de la función es paralela al eje de abscisas: $m_T = f'(c) = 0$.

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* , *derivable en (a, b)* y $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- El teorema es de **existencia**, si se verifican las hipótesis entonces la función tiene, al menos, en el intervalo (a, b) un valor en el cual la primera derivada se anula.
- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que la derivada se anule en algún punto intermedio.
- **Interpretación geométrica**: si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, al menos, en un punto del intervalo (a, b) la tangente a la gráfica de la función es paralela al eje de abscisas: $m_T = f'(c) = 0$.
- **Gráficamente (GEOGEBRA)**: aquí

Corolario

Sea f una función derivable entonces *entre dos ceros consecutivos* de la función *existe, al menos, un cero de su función derivada*.

Corolario

Sea f una función derivable entonces *entre dos ceros consecutivos* de la función *existe, al menos, un cero de su función derivada*.

Demostración

Sean a y b los dos ceros consecutivos de la función f . Consideremos la función definida en el intervalo $[a, b]$. En dicho intervalo se verifican las hipótesis del teorema de Rolle: f es continua en el cerrado, derivable en el abierto y $f(a) = f(b) = 0$ por lo tanto $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, con lo cual el corolario queda demostrado.

Corolario

Sea f una función derivable entonces *entre dos ceros consecutivos* de la función *existe, al menos, un cero de su función derivada*.

Demostración

Sean a y b los dos ceros consecutivos de la función f . Consideremos la función definida en el intervalo $[a, b]$. En dicho intervalo se verifican las hipótesis del teorema de Rolle: f es continua en el cerrado, derivable en el abierto y $f(a) = f(b) = 0$ por lo tanto $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, con lo cual el corolario queda demostrado.

- Si f' no posee raíces entonces la función f , como máximo, tendrá un cero.

Corolario

Sea f una función derivable entonces *entre dos ceros consecutivos* de la función *existe, al menos, un cero de su función derivada*.

Demostración

Sean a y b los dos ceros consecutivos de la función f . Consideremos la función definida en el intervalo $[a, b]$. En dicho intervalo se verifican las hipótesis del teorema de Rolle: f es continua en el cerrado, derivable en el abierto y $f(a) = f(b) = 0$ por lo tanto $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, con lo cual el corolario queda demostrado.

- Si f' no posee raíces entonces la función f , como máximo, tendrá un cero.
- Si f' posee una raíz entonces la función f , como máximo, tendrá dos ceros.

Corolario

Sea f una función derivable entonces *entre dos ceros consecutivos* de la función *existe, al menos, un cero de su función derivada*.

Demostración

Sean a y b los dos ceros consecutivos de la función f . Consideremos la función definida en el intervalo $[a, b]$. En dicho intervalo se verifican las hipótesis del teorema de Rolle: f es continua en el cerrado, derivable en el abierto y $f(a) = f(b) = 0$ por lo tanto $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, con lo cual el corolario queda demostrado.

- Si f' no posee raíces entonces la función f , como máximo, tendrá un cero.
- Si f' posee una raíz entonces la función f , como máximo, tendrá dos ceros.
- De la misma forma se puede razonar si tiene dos, tres, $\dots$, ceros la función derivada.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* y *derivable en (a, b)* entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* y *derivable en (a, b)* entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que se cumpla la tesis del teorema.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sea f una función *continua en $[a, b]$* y *derivable en (a, b)* entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que se cumpla la tesis del teorema.
- Interpretación geométrica: si se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange, al menos, en un punto del intervalo (a, b) la tangente a la gráfica de la función es paralela a la secante que une los puntos de abscisa $x = a$ y $x = b$: $m_T = f'(c) = m_{\text{secante } AB}$.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sea f una función **continua en $[a, b]$** y **derivable en (a, b)** entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Si alguna hipótesis no se verifica, la función **PUEDE** que se cumpla la tesis del teorema.
- **Interpretación geométrica:** si se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange, al menos, en un punto del intervalo (a, b) la tangente a la gráfica de la función es paralela a la secante que une los puntos de abscisa $x = a$ y $x = b$: $m_T = f'(c) = m_{\text{secante } AB}$.
- **Gráficamente (GEOGEBRA): [aquí](#)**

Teorema (Teorema de l'Hôpital)

*Si f y g son dos funciones derivables en un entorno E de a ,
 $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0, g'(a) \neq 0$ en el entorno reducido E^* de a
entonces $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Teorema (Teorema de l'Hôpital)

*Si f y g son dos funciones derivables en un entorno E de a ,
 $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0, g'(a) \neq 0$ en el entorno reducido E^* de a
entonces $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

- El teorema de l'Hôpital se aplica para la indeterminación $\frac{0}{0}$ pero se puede aplicar para cualquier indeterminación siempre que se transforme en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Teorema de l'Hôpital)

*Si f y g son dos funciones derivables en un entorno E de a ,
 $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0, g'(a) \neq 0$ en el entorno reducido E^* de a
entonces $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

- El teorema de l'Hôpital se aplica para la indeterminación $\frac{0}{0}$ pero se puede aplicar para cualquier indeterminación siempre que se transforme en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
- El teorema se puede aplicar el número de veces que se quiera siempre que las funciones sean derivables.

Teorema (Teorema de l'Hôpital)

*Si f y g son dos funciones derivables en un entorno E de a ,
 $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0, g'(a) \neq 0$ en el entorno reducido E^* de a
entonces $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

- El teorema de l'Hôpital se aplica para la indeterminación $\frac{0}{0}$ pero se puede aplicar para cualquier indeterminación siempre que se transforme en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
- El teorema se puede aplicar el número de veces que se quiera siempre que las funciones sean derivables.
- El teorema es útil para calcular límites pero no siempre su aplicación es la más rápida para el cálculo de límites.

Ejemplo

1 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2}$

Ejemplo

1 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{9x^2 + 10x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}}{18x + 10} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo

1 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{9x^2 + 10x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}}{18x + 10} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

2 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

Ejemplo

1 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^3 + 5x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{9x^2 + 10x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}}{18x + 10} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

2 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$