

1.1. Continuidad y derivadas

① Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{bx}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

a) Hallar, razonadamente, el dominio máximo de la función.

- Si $x \leq -1$ entonces $f_1(x) = (x+a)^2$, el dominio máximo de la función f_1 es $\mathbb{R}$ por lo tanto el dominio es $D_{f_1} = \mathbb{R} \cap (-\infty, -1] = (-\infty, -1]$.
- Si $x > -1$ entonces $f_2(x) = \frac{bx}{\sqrt{x+2}}$, el dominio máximo de f_2 es $\{x \in \mathbb{R} \mid x+2 > 0\} = (-2, +\infty)$ por lo tanto el dominio es $D_{f_2} = (-1, +\infty) \cap (-2, +\infty) = (-1, +\infty)$.

$$D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, +\infty) = \mathbb{R}$$

b) Hallar la relación que existe entre los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ si la función es continua en $x = -1$.

Definición de función continua en $x = -1$

- $-1 \in D_f$ y $f(-1) = (-1+a)^2 = (a-1)^2$.
- Existencia del límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-1-h) = \lim_{h \rightarrow 0} (-1-h+a)^2 = (a-1)^2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(-1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(-1+h)}{\sqrt{-1+h+2}} = \frac{-b}{1} = -b \\ \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &\iff (a-1)^2 = -b \end{aligned}$$

$$\text{La función es continua en } x = -1 \text{ si se cumple } (a-1)^2 + b = 0$$

c) Demostrar que si $b > 0$ entonces la función en $x = -1$ presenta una discontinuidad de salto $\forall a \in \mathbb{R}$.

Si $b > 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -b$ es siempre **NEGATIVO** y el límite por la derecha es igual a **$(a-1)^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$** , el límite global NO EXISTE, la función presenta en $x = -1$ una discontinuidad de salto (existen los límites laterales son finitos pero distintos).

② Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \sin^2 x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} + 2a \cos x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sqrt[3]{x+b} - 2 & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$

a) Hallar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

- Dominio de la función: $D_f = (-\infty, 0] \cup (0, \pi) \cup [\pi, +\infty) = \mathbb{R}$, las tres funciones a trozos son funciones de dominio máximo los reales.
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}$ la función es continua por ser suma, producto y composición de funciones continuas.
- En $\boxed{x=0}$ será continua si $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$ (definición de continuidad).

Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0-h) = \lim_{h \rightarrow 0} (3h^2 + \sin^2 h + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt[3]{h} + 2a \cos h) = 2a$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2 \iff 2 = 2a \implies \boxed{\boxed{a=1}}$$

La función es continua en $x = 0$ si $\boxed{\boxed{a=1}}$.

- En $\boxed{x=\pi}$ será continua si $\exists \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = \sqrt[3]{\pi+b} - 2$ (definición de continuidad).

Límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\pi-h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt[3]{\pi-h} + 2 \cos(\pi-h)) = \sqrt[3]{\pi} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\pi+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt[3]{\pi+h+b} - 2) = \sqrt[3]{\pi+b} - 2$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = \sqrt[3]{\pi+b} - 2 \iff \sqrt[3]{\pi} - 2 = \sqrt[3]{\pi+b} - 2 \implies \boxed{\boxed{b=0}}$$

La función es continua en $x = \pi$ si $\boxed{\boxed{b=0}}$.

La función es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ si $a = 1$ y $b = 0$

b) Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)$ y definir la función derivada.

Si $a \neq 1$ la función no es continua en $x = 0$ y si $b \neq 0$ la función no es continua en $x = \pi$, en ambos casos la función NO es derivable en $x = 0$ y en $x = \pi$.

La función es continua para los valores obtenidos en el apartado anterior:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \sin^2 x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} + 2 \cos x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sqrt[3]{x} - 2 & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$$

Si la función es continua en $x = a$ entonces es derivable en $x = a$ si las pendientes de las tangentes por la derecha y la izquierda son iguales:

$$m_{T^-} = m_{T^+} \iff f'(a^-) = f'(a^+)$$

Definimos la función derivable excepto en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 2 \sin x \cos x & \text{si } x < 0 \\ \text{???} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2 \sin x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \text{???} & \text{si } x = \pi \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

- En $x = 0$ la función es continua y las pendientes laterales son: $\begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = \frac{1}{0} \end{cases} \implies \nexists f'(0^+)$

La función NO es derivable en $x = 0$.

- En $x = \pi$ la función es continua y las pendientes laterales son: $\begin{cases} f'(\pi^-) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}} \\ f'(\pi^+) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}} \end{cases}$

La función SÍ es derivable en $x = \pi$ y $f'(\pi) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}}$.

$$\text{La función derivada es } f'(x) = \begin{cases} 6x + \sin(2x) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2 \sin x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{\pi^2}} & \text{si } x = \pi \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & \text{si } x > \pi \end{cases} \quad \text{y su dominio } D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

③ **Demostreu** que la funció polinòmica $f(x) = x^3 - 6x + \sqrt{2}$ no pot tenir dues arrels reals en l'interval $[0, 1]$. Quantes arrels reals té a $[0, 1]$? Raoneu la resposta.

La función es polinómica, continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$

- La función es continua.
- $f(0) = \sqrt{2} > 0$ y $f(1) = 1 - 6 + \sqrt{2} = -5 + \sqrt{2} < 0$.

Se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano por lo tanto:

$$\exists c \in (0, 1) \text{ tal que } f(c) = 0$$

En realidad el teorema de Bolzano más el teorema de Rolle permite afirmar que el número de ceros es IMPAR.

$$\text{La función NO puede tener DOS raíces en } [0, 1]$$

Ceros de la función derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2} \notin (0, 1)$$

La derivada NO tiene ninguna raíz en el intervalo de estudio, como máximo la función tiene UN cero en $(0, 1)$, es decir, el cero que la tesis del teorema de Bolzano nos afirma.

La función tiene una ÚNICA raíz en $[0, 1]$

- ④ Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene sólo una solución real.

La ecuación es equivalente a $e^{-x} + 2 - x = 0$. Definimos la función $f(x) = e^{-x} + 2 - x$ de dominio $\mathbb{R}$, continua y derivable en $\mathbb{R}$ (composición y suma de funciones continuas y derivables).

Tenemos que demostrar que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $e^c + 2 - c = 0 \iff e^c + 2 = c$.

Existencia. Teorema de Bolzano Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

- La función es continua en $\mathbb{R}$.
- Imágenes: $f(0) = e^0 + 2 - 0 = 1 + 2 > 0$; $f(1) = e^{-1} + 2 - 1 = \frac{1}{e} + 1 > 0$; $f(2) = e^{-2} + 2 - 2 = \frac{1}{e^2} > 0$

$$f(3) = e^{-3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1 - e^3}{e^3} < 0$$

- En el intervalo cerrado $[2, 3]$ se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, continua y

$f(2) \cdot f(3) < 0$ entonces existe, al menos, un cero (raíz) de la función en $(2, 3)$.

Unicidad. Consecuencias del Teorema de Rolle Si la función es derivable y su derivada NO tiene ceros reales entonces la función, como MÁXIMO, tiene un cero.

- Función derivada: $f'(x) = -e^{-x} - 1$.
- Cero(s) de la derivada: $-(e^{-x} + 1) = 0 \iff e^x = -1$. La función exponencial es estrictamente positiva. La función derivada NO tiene ceros reales.

La ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene una única solución c y $c \in (2, 3)$.

- ⑤ Sea la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$:

- a) Calcular los puntos de la gráfica de la función si la tangente es paralela al eje de abscisas.
- b) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Calcular los puntos de la gráfica de la función si la tangente es paralela al eje de abscisas.

El dominio máximo de la función es $\mathbb{R}$ y es continua y derivable en todos los reales (composición y producto de funciones continuas y derivables).

- Interpretación geométrica de la derivada:

La derivada de una función en un punto, si existe, es la pendiente de la tangente geométrica a la gráfica de la función en dicho punto.

Si la recta tangente es paralela al eje de abscisas (condición de paralelismo) la pendiente es CERO, $m_T = f'(x) = 0$.

- Derivada de la función: $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2 - 3)(-e^{-x}) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ (*)
Igualando a cero, $(-x^2 + 2x + 3)e^{-x} = 0$ y $e^{-x} > 0$ por lo tanto $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Los puntos son: $P(-1, f(-1)) \implies P(-1, -2e)$ y $Q(3, f(3)) \implies Q(3, 6e^{-3})$

b) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

■ Punto de tangencia $T(0, f(0)) \Rightarrow T(0, -3)$.

■ Ecuación de la recta tangente (punto-pendiente): $y - f(0) = m_T(x - 0)$ siendo $m_T = f'(0) \stackrel{(*)}{=} 3$,
sustituyendo

$$y + 3 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x - 3$$

⑥ Estudiar derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^3 + 1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en todo su dominio, dando expresiones de la derivada donde exista.

Dominio:

Las funciones $f_1(x) = \sin^2 x$ y $f_3(x) = e^{x^2 - 1}$ tienen de dominio $\mathbb{R}$.

La función $f_2(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ tiene de dominio $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 1 \geq 0\}$. La solución de la ecuación $x^3 + 1 = 0$ es $x = -1$ y la solución de la inecuación es $[-1, +\infty) \Rightarrow D_{f_2} = [-1, +\infty) \cap (0, 1) = (0, 1)$

El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$

Continuidad:

Si $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, la función es continua por ser composición de funciones continuas.

Continuidad en $x = 0$, $f(0) = \sin^2 0 = 0$. Límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = \sin^2 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Los límites laterales son diferentes entonces $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

La función NO es continua en $x = 0$

Continuidad en $x = 1$, $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$. Límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - 1} = 0 \end{aligned}$$

Los límites laterales son diferentes entonces $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

La función NO es continua en $x = 1$

Derivabilidad de la función

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ la función es derivable.

En $x = 0$ y $x = 1$, la función NO es continua por lo tanto NO es derivable.

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cos x = \sin(2x) & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2xe^{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- ⑦ Dada la función $f(x) = \cos^2(3x)$, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{12}$.

El dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y es continua y derivable en todos los reales.

Punto de tangencia: $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos^2\left(3\frac{\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Punto de tangencia $P\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$

Derivada de la función. Pendiente de la tangente.

$$f'(x) = -2 \cos(3x) \cdot \sin(3x) \cdot 3 \stackrel{(1)}{=} -3 \sin(6x)$$

Por la interpretación geométrica de la derivada: $m_T = f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$

Ecuación de la tangente y de la normal. La normal es la PERPENDICULAR a la tangente entonces $m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = \frac{1}{3}$. El haz de rectas que pasan por el punto P tiene de ecuación, $y - y_P = m(x - x_P)$

$$\begin{cases} T \equiv y - \frac{1}{2} = -3\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow y = -3x + \frac{\pi+2}{4} \\ N \equiv y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{18-\pi}{36} \end{cases}$$

Razonamientos

(1) Fórmula del ángulo doble: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

- ⑧ Es considera la funció $f(x) = x|x|$. Definiu les funcions i els dominis de $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$. Representeu-les gràficament.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \text{ El dominio de la función es } \mathbb{R} \text{ y es continua en todos los reales.} \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ \text{????} & \text{si } x = 0. \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por ser f continua en $x = 0$ será derivable si las pendientes laterales son iguales: $\begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$ entonces

$\exists f'(0) = 0$. La función primera derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Función segunda derivada:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ ??? & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{La primera derivada es continua en } x = 0, \text{ efectivamente:}$$

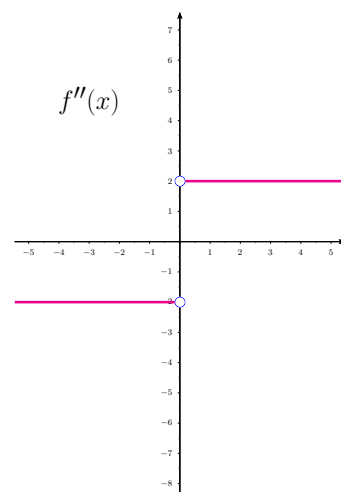
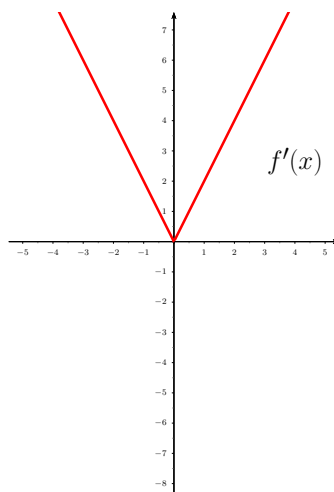
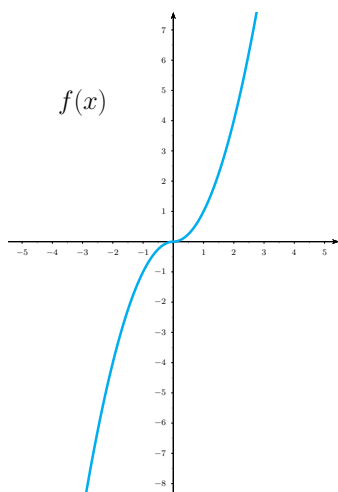
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0 \end{aligned} \quad \implies \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$$

¿Existe $f''(0)$? Por ser continua, las pendientes de la primera derivada deben ser iguales:

$$\begin{cases} f''(0^-) = -2 \\ f''(0^+) = 2 \end{cases} \quad \text{entonces } \nexists f''(0) \text{ y el dominio es } D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ La función segunda derivada es:}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Gráficas:



⑨ Considereu les dues funcions $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ i $g(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 3x + 5$.

a) Escriuiu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$. Escriuiu també l'equació de la recta tangent a la gràfica de $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

Dominios: Los dominios máximos de las funciones son: $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases}$. Las funciones son derivables en todo su dominio.

Teoría: la derivada de una función en un punto, si existe, es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto

Función f : El punto de abscisa $x = 0$ tiene de coordenadas $P(0, f(0)) \implies P(0, -1)$, la recta tangente es $y - (-1) = m_T(x - 0)$ siendo $m_T = f'(0)$.

Derivando la función: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \implies m_T = f'(0) = 1$.

La ecuación de la recta tangente $y + 1 = x \implies x - y - 1 = 0$.

Función g : El punto de abscisa $x = 0$ tiene de coordenadas $Q(0, g(0)) \implies Q(0, 3)$, la recta tangente es $y - (3) = m_T(x - 0)$ siendo $m_T = g'(0)$.

Derivando la función: $g'(x) = x^2 - 8x + 3 \implies m_T = f'(0) = 3$.

La ecuación de la recta tangente $y - 5 = 3x \implies 3x - y + 5 = 0$.

Las ecuaciones de las rectas tangentes a f y g son, respectivamente, $x - y - 1 = 0$ y $3x - y + 5 = 0$

- b) Calculeu els valors de λ per als quals la tangent a la gràfica de $f(x)$ i la tangent a la gràfica de $g(x)$ en els punts d'abscissa $x = \lambda$ són perpendiculars. Per a cada un d'aquests valors de λ calculeu el punt d'intersecció de les dues tangents.

Los puntos de tangencia son, respectivamente, $P(\lambda, f(\lambda))$ y $Q(\lambda, g(\lambda))$. Si las tangentes son perpendiculares se cumple que el producto de sus pendientes es igual a menos uno, $m_T \cdot m_{T'} = -1$.

Interpretación geométrica de la derivada: $f'(\lambda) \cdot g'(\lambda) = -1$, sustituyendo en las funciones derivadas:

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2} \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 3) = -1 \implies \lambda^2 - 8\lambda + 3 = -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \implies \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Las tangentes son perpendiculares para $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$

Ecuaciones de las tangentes:

$$\text{Puntos de tangencia: } \begin{cases} P\left(1, -\frac{1}{2}\right) \text{ y } Q\left(1, \frac{13}{3}\right) \text{ y las pendientes: } m_P = f'(1) = \frac{1}{4}; m_Q = g'(1) = -4 \\ P'\left(2, -\frac{1}{3}\right) \text{ y } Q'\left(2, \frac{11}{3}\right) \text{ y las pendientes: } m_{P'} = f'(2) = \frac{1}{9}; m_{Q'} = g'(2) = -9 \end{cases}$$

Ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_P \equiv y + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4}(x - 1) \implies y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} & T_{P'} \equiv y + \frac{1}{3} &= \frac{1}{9}(x - 2) \implies y = \frac{1}{9}x - \frac{5}{9} \\ T_Q \equiv y - \frac{13}{3} &= -4(x - 1) \implies y = -4x + \frac{25}{3} & T_{Q'} \equiv y - \frac{11}{3} &= -9(x - 2) \implies y = -9x + \frac{47}{3} \end{aligned}$$

Punto de corte de las tangentes: Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \\ y &= -4x + \frac{25}{3} \end{aligned} \right\} \implies \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = -4x + \frac{25}{3} \implies 51x = 109 \implies x = \frac{109}{51}$$

$$\text{sustituyendo en la primera ecuación: } y = \frac{1}{4} \cdot \frac{109}{51} - \frac{3}{4} \implies y = -\frac{11}{51}$$

El punto de intersección de las dos tangentes es

$$M\left(\frac{109}{51}, -\frac{11}{51}\right).$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{9}x - \frac{5}{9} \\ y &= -9x + \frac{47}{3} \end{aligned} \right\} \implies \frac{1}{9}x - \frac{5}{9} = -9x + \frac{47}{3} \implies 82x = 146 \implies x = \frac{73}{41}$$

$$\text{sustituyendo en la primera ecuación: } y = \frac{1}{9} \cdot \frac{73}{41} - \frac{5}{9} \implies y = -\frac{44}{123}$$

El punto de intersección de las dos tangentes es

$$N\left(\frac{73}{41}, -\frac{44}{123}\right).$$

$$\textcircled{10} \text{ Sea la función definida a trozos: } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x - 14}{x^2 + 2x} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{x+1}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Hallar, razonadamente, el dominio máximo de la función.

La función $f(x)$ está definida a trozos:

- Si $x < 0$, la función es racional y $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \wedge x^2 + 2x \neq 0\}$. Resolviendo la ecuación de segundo grado: $x^2 + 2x = x(x + 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$, es decir, $D_{f_1} = (-\infty, 0) \setminus \{-2\}$
- Si $x = 0$ entonces $f(0) = a \implies 0 \in D_f$.
- Si $x > 0$, la función es exponencial de un polinomio: $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty)$

El dominio de la función es:

$$D_f = D_{f_1} \cup \{0\} \cup D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad (1.1)$$

b) Estudiar la continuidad y clasificar los puntos de discontinuidad.

La función es continua en su dominio máximo, excepto en $x = 0$, por ser cociente y composición de funciones continuas.

- En $x = -2 \notin D_f$ la función es discontinua.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 3x - 14}{x^2 + 2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{IND}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x-7)(x+2)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-7}{x} = \frac{11}{2}$$

La función presenta en $x = -2$ una **discontinuidad evitable**.

- En $x = 0 \in D_f$ y $f(0) = a$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(0-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(0-h)-7}{-h} = \frac{-7}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{h+1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Un límite lateral es infinito, la función presenta una **discontinuidad asintótica** en $x = 0$.

c) ¿Existe algún valor de a tal que la función sea continua en $x = 0$?

Por ser discontinua asintótica en $x = 0$, no existe ningún valor de a para ser continua en $x = 0$.

d) Hallar las tangentes a la función en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$

- En $x = -1$ y $f(-1) = \frac{2+3-14}{1-2} = 9$, el punto de tangencia es $P(-1, 9)$ y la recta tangente tiene de ecuación: $y - 9 = m_T(x - (-1))$. Por la interpretación geométrica de la derivada, $m_T = f'(-1)$.

Derivada de la función si $x < 0$: $f'(x) = \frac{7}{x^2}$ y $f'(-1) = 7$:

$$\text{Ecuación de la recta tangente: } y - 9 = 7(x + 1) \implies 7x - y + 16 = 0$$

- En $x = 3$ y $f(3) = e^{\frac{3+1}{2}} = e^2$, el punto de tangencia es $Q(3, e^2)$ y la recta tangente tiene de ecuación: $y - e^2 = m_T(x - 3)$. Por la interpretación geométrica de la derivada, $m_T = f'(3)$.

Derivada de la función si $x > 0$: $f'(x) = e^{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$ y $f'(3) = \frac{e^2}{2}$:

$$\text{Ecuación de la recta tangente: } y - e^2 = \frac{e^2}{2}(x - 3) \implies e^2x - 2y - e^2 = 0$$

- ⑪ Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin(x) - xe^x}{x^2}$ es finito, calcular el valor de a y el del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin(x) - xe^x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôp}}{\lim_{x \rightarrow 0}}} \frac{a \cos x - (e^x + xe^x)}{2x} = \frac{a - 1}{0}$$

El enunciado afirma que el límite es finito, sólo se verificará si $\boxed{a - 1 = 0 \iff a = 1}$ entonces la indeterminación es $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - xe^x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôp}}{\lim_{x \rightarrow 0}}} \frac{\cos x - (e^x + xe^x)}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôp}}{\lim_{x \rightarrow 0}}} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - (e^x + e^x + xe^x)}{1} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

El límite es finito si $\boxed{a = 1}$ y el límite es:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - xe^x}{x^2} = -1}$$

- ⑫ Estudiar la monotonía de la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.

Dominio máximo: La función es producto de funciones de dominio $\mathbb{R} \implies D_f = \mathbb{R}$.

Continuidad y derivabilidad: La función es composición y producto de funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, por lo tanto, es continua y derivable en $D_f = \mathbb{R}$

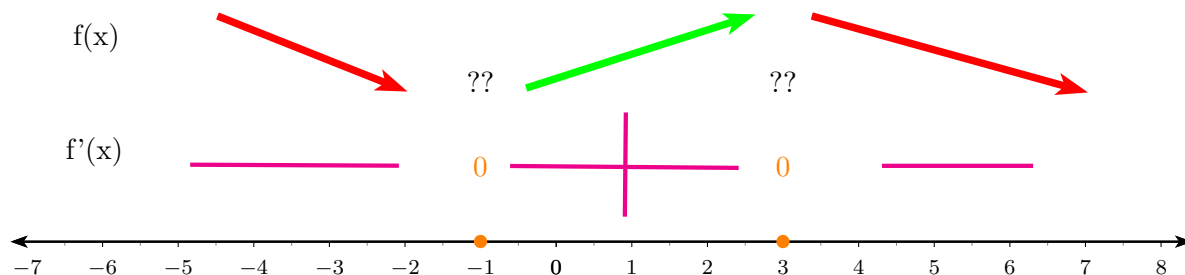
Teorema: Si la función es derivable la monotonía de la función depende del signo de la función derivada.

- Función derivada: $f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 3)e^{-x} = (2x - x^2 + 3)e^{-x}$.
- Ceros de la derivada (pendiente paralela al eje de abscisas):

$$f'(x) = 0 \iff (2x - x^2 + 3)e^{-x} = 0 \stackrel{e^{-x} > 0}{\iff} 2x - x^2 + 3 = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

- Signo de la derivada $f'(x) = -(x + 1)(x - 3)e^{-x}$:



Monotonía:

- Si $x \in (-1, 3)$ entonces la función es estrictamente creciente ($f'(x) > 0$)
- Si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ entonces la función es estrictamente decreciente ($f'(x) < 0$)

- Si $x = -1$ o $x = 3$ entonces el teorema no decide ($f'(x) = 0$), hay que realizar un estudio local

⑬ Calcular a, b y c de la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que la pendiente de la tangente es mínima en $x = 3$ y en el punto $(1, 0)$ alcanza un extremo relativo.

La función por ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

- La pendiente de la tangente es mínima. La pendiente de la tangente es la primera derivada de la función, si la pendiente alcanza un extremo local (mínimo) significa que la derivada de la derivada, la segunda derivada, debe anularse en $x = 3$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a. \quad f''(3) = 0 \implies 18 + 2a = 0 \implies \boxed{a = -9}$$

- En el punto $(1, 0)$ la función alcanza un extremo local. Condición necesaria de extremo local y $f(1) = 0$.

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \implies b = -3 - 2a \implies \boxed{b = 15}$$

$$f(1) = 0 \implies \boxed{c = -7}$$

La función que cumple las tres condiciones es: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

⑭ a) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \cos(\pi x)\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

b) Razonar, qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = (2 + \cos(\pi x))^{\frac{x}{x-1}}$ en $x = 1$.

a) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \cos(\pi x)\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \cos(\pi x)\right)^{\frac{x}{x-1}} = (2 + \cos \pi)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty, \text{ indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \cos(\pi x)\right)^{\frac{x}{x-1}} = L \stackrel{(1)}{\implies} \ln L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \cdot \ln(2 + \cos(\pi x)) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \frac{\ln(2 + \cos(\pi x))}{x-1} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 + \cos(\pi x))}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'Hôp}}{\implies}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \cdot \sin(\pi x)}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{Si } \ln L = 0 \implies L = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \cos(\pi x)\right)^{\frac{x}{x-1}} = 1}$$

Razonamientos

- (1) El logaritmo neperiano es una función inyectiva. Aplicando logaritmos neperianos a los dos miembros del límite y las propiedades de los logaritmos.

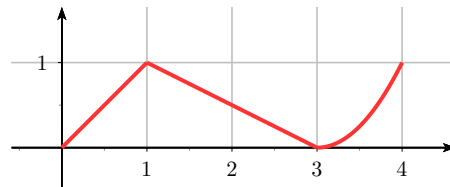
(2) El límite de un producto de funciones que tienen límite es el producto de los límites y $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

b) Razonar, qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = (2 + \cos(\pi x))^{\frac{x}{x-1}}$ en $x = 1$.

La función no está definida en $x = 1$, $1 \notin D_f$ y $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. La función presenta en $x = 1$ una **discontinuidad evitable**.

⑮ De una función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en su dominio y $f(1) = 3$. La gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.

- Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
- Razonar, si existe, algún punto donde la función no sea derivable.
- ¿Es posible que existan tangentes a la función que sean perpendiculares a la recta de ecuación $r \equiv 5x + 3y - 15 = 0$? En caso afirmativo, calcular el número de tangentes que se pueden trazar.
- Razonar en qué puntos no existe la segunda derivada de la función.
- Definir la función segunda derivada, $f''(x)$, en el intervalo $(0, 3)$.



a) Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

La recta tangente en el punto $T(1, 3)$ tiene de ecuación $y - 3 = m_T(x - 1)$ siendo $m_T = f'(1)$, en la gráfica la imagen de 1 es 1. La recta tangente es $y - 3 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{x - y + 2 = 0}$

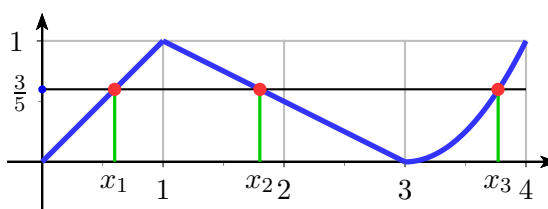
b) Razonar, si existe, algún punto donde la función no sea derivable.

La función es derivable $\forall x \in (0, 4)$: $\begin{cases} \text{En } x = 1 : f'(1^-) = 1 \text{ y } f'(1^+) = 1 \Rightarrow \exists f'(1) = 1 \\ \text{En } x = 3 : f'(3^-) = 0 \text{ y } f'(3^+) = 0 \Rightarrow \exists f'(3) = 0 \end{cases}$.

c) ¿Es posible que existan tangentes a la función que sean perpendiculares a la recta de ecuación $r \equiv 5x + 3y - 15 = 0$? En caso afirmativo, calcular el número de tangentes que se pueden trazar.

La pendiente de la recta r es: $3y = -5x + 15 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 5 \Rightarrow m_r = -\frac{5}{3}$. Si la tangente es perpendicular a la recta r entonces $m_T \cdot m_r = -1 \Rightarrow \boxed{m_T = \frac{3}{5}}$.

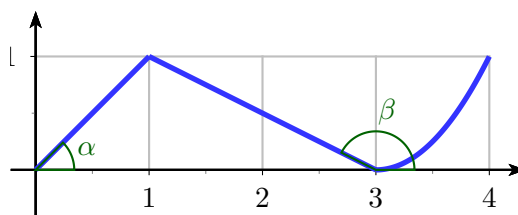
Las antiimágenes, si existen, de $\frac{3}{5}$ de la función derivada son las abscisas de los puntos donde la función tiene tangentes perpendiculares a la recta r .



La función en los puntos de abscisa x_1, x_2 y x_3 la tangente es perpendicular a la recta dada.

d) Razonar en qué puntos no existe la segunda derivada de la función.

Las pendientes de las tangentes geométricas a la función $f'(x)$ es el valor de la segunda derivada de la función f .



En los puntos de abscisa 1 y 3 las tangentes por la izquierda y la derecha son distintas

$$\begin{cases} f''(1^-) = \tan \alpha \\ f''(1^+) = \tan \beta \end{cases} \quad \begin{cases} f''(3^-) = \tan \beta \\ f''(3^+) = \tan 0^\circ = 0 \end{cases}$$

entonces ni $f''(1)$ ni $f''(3)$ están definidas.

e) Definir la función segunda derivada, $f''(x)$, en el intervalo $(0, 3)$.

$$\begin{cases} x \in (0, 1) \text{ entonces } \tan \alpha = m_T = f''(x) = \frac{1}{1} = 1 \\ x \in (1, 3) \text{ entonces } \tan \beta = m_T = f''(x) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1.1.1. Gráficas de funciones

① Sea $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$, hallar los parámetros a, b, c y d , si:

- La recta $x = 5$ es la asíntota vertical de la función.
- La recta $y = 2x + 3$ es la asíntota oblicua de la función.
- La pendiente de la tangente en el punto de abscisa cero es igual a $\frac{6}{5}$

La recta $x = 5$ es la asíntota vertical de la función. Si es asíntota vertical debe cumplir la definición de AV (discontinuidad asintótica):

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{ax^2 + bx + c}{x + d} = \frac{25a + 5b + c}{5 + d} = \infty \iff \begin{cases} 25a + 5b + c \neq 0 \\ 5 + d = 0 \implies d = -5 \end{cases}$$

$$\boxed{d = -5 \text{ y } 25a + 5b + c \neq 0}$$

La recta $y = 2x + 3$ es la asíntota oblicua de la función.

- Primer procedimiento. El grado del polinomio del numerador, $ax^2 + bx + c$ debe ser una unidad superior al grado del polinomio del denominador, $x - 5$. Entonces $\boxed{a \neq 0}$ y el cociente de la división es la asíntota de la función, $y = 2x + 3$.

$$\frac{\begin{array}{r} ax^2 + bx + c \\ -ax^2 + 5ax \\ \hline (5a+b)x + c \\ -(5a+b)x + 5(5a+b) \\ \hline 5(5a+b) + c \end{array}}{\quad} \quad \frac{x-5}{ax+(5a+b)} \quad ax + (5a+b) = 2x + 3 \iff \begin{cases} a = 2 \\ 5a + b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$$

- Segundo procedimiento. Fórmulas:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x(x-5)} \stackrel{\infty}{=} \boxed{a} \text{ la pendiente de la AO es } 2 \implies \boxed{a = 2} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + c}{x-5} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + bx + c - 2x^2 + 10x}{x-5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(10+b)x + c}{x-5} \stackrel{\infty}{=} \boxed{10+b} \text{ la ordenada en el origen de la AO es } 3 \implies \\ 10 + b &= 3 \implies \boxed{b = -7} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 2 \text{ y } b = -7}$$

La pendiente de la tangente en el punto de abscisa cero es igual a $\frac{6}{5}$. La función con los valores obtenidos en los apartados anteriores es $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + c}{x-5}$. Por la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: $m_T = f'(x=0) = \frac{6}{5}$.

$$f'(x) = \frac{(4x-7)(x-5) - (2x^2 - 7x + c)}{(x-5)^2} \implies f'(0) = \frac{35-c}{25} = \frac{6}{5} \implies \boxed{c = 5}$$

$$c = 5 \text{ y la función es } f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-5}$$

② Estudiar y dibujar la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 4}$

- Dominio: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
- No presenta simetrías.
- Cortes con los ejes:

Eje de ordenadas: $f(0) = 0 \implies (0, 0)$

Eje de abscisas: $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 4} = 0 \implies x^3 + x^2 - 6x = 0 \implies x \cdot (x^2 + x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \implies (0, 0) \\ x^2 + x - 6 = 0 \implies \begin{cases} x = -3 \implies (-3, 0) \\ \boxed{x = 2 \notin D_f} \end{cases} \end{cases}$$

- Continuidad. La función es continua en su dominio (cociente de funciones continuas).

- Asíntotas:

$$\text{A. vertical} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-2-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2-h)(-2-h-2)(-2-h+3)}{(-2-h-2)(-2-h+2)} = \frac{+8}{+0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(-2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)(-2+h-2)(-2+h+3)}{(-2+h-2)(-2+h+2)} = \frac{+8}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x-2) \cdot (x+3)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función.

La función presenta una **DISCONTINUIDAD EVITABLE** en $x = 2$.

La gráfica de la función $f(x)$ es la misma que $h(x) = \frac{x(x+3)}{x+2}$ excepto en el punto $P\left(2, \frac{5}{2}\right)$ que presenta un *agujero*.

$$\text{A. horizontal: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\text{A. oblicua: } h(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+2} = x + 1 + \frac{-2}{x+2}$$

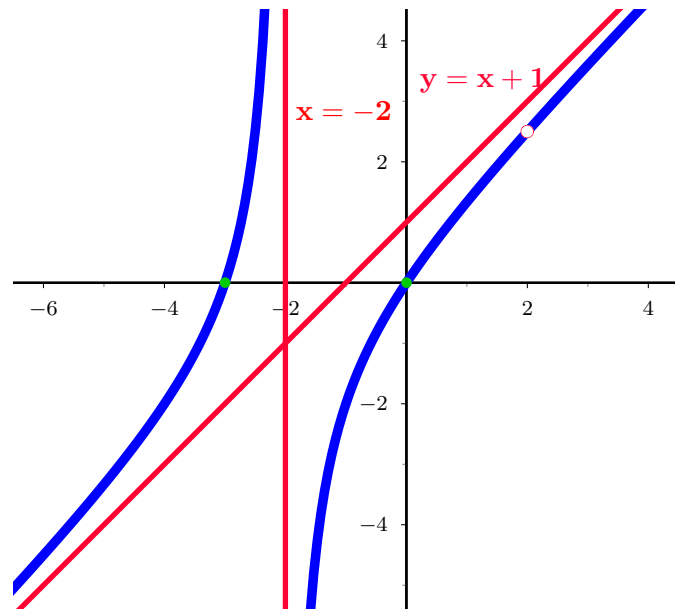
La recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua de la función $f(x)$.

- Estudio de la primera derivada:

$$h'(x) = 1 + \frac{2}{(x+2)^2} > 0 \implies \text{No presenta puntos candidatos a extremos locales.}$$

La derivada $h'(x) > 0 \forall x \in D$ por lo tanto la función es estrictamente creciente en su dominio máximo.

- Gráfica de la función:



③ Estudiar y dibujar la gráfica de la función: $g(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

- Dominio: $D_f = \mathbb{R}$
- No presenta simetrías.

- Cortes con los ejes: $\begin{cases} \text{Eje de ordenadas: } f(0) = 1 \implies (0, 1) \\ \text{Eje de abscisas: } (x-1)^2 \cdot e^{-x} = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \implies (1, 0) \text{ doble} \end{cases}$
- La función es continua en $\mathbb{R}$ (producto de funciones continuas).
- Asíntotas:

Asíntotas verticales. La función es continua en $\mathbb{R}$, no presenta asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)^2 \cdot e^{-x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 \cdot e^{-x} \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'Hôp}}{=}} \frac{2(x-1)}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'Hôp}}{=}} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

La recta $\boxed{y = 0}$ es asíntota horizontal cuando $\boxed{x \rightarrow +\infty}$.

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x} \cdot e^{-x} \right) = (-\infty) \cdot (+\infty) = \infty$$

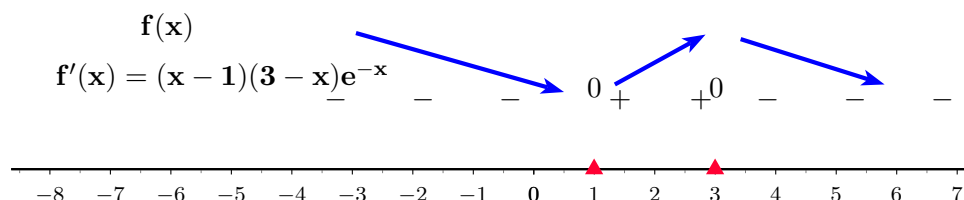
Rama parabólica en la dirección del eje de ordenadas cuando $\boxed{x \rightarrow -\infty}$.

- Estudio de la primera derivada.

$$f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x} = (x-1)(3-x)e^{-x} = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Dos puntos candidatos a extremos locales de la función.

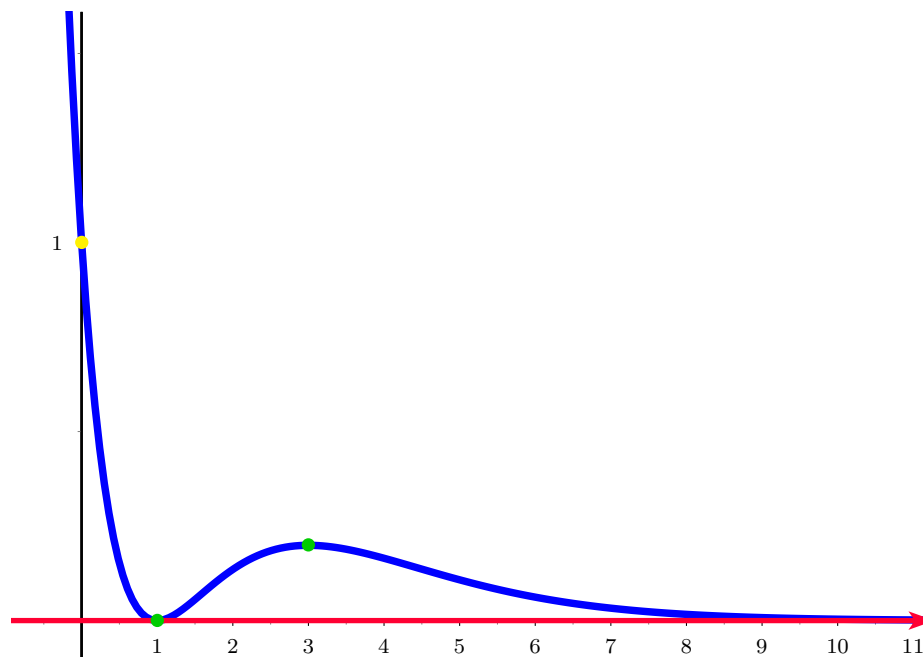
Estudio del signo de la primera derivada:



La función es creciente si $x \in (1, 3)$ y decreciente si $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

$$\text{Extremos locales: } \begin{cases} \text{Mínimo relativo: } (1, 0) \\ \text{Máximo relativo: } (3, f(3)) = (3, 4e^{-3}) \end{cases}$$

- Gráfica:



④ Estudiar y dibujar la gráfica de la función: $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2}$.

- Dominio máximo de la función: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- La función no presenta simetrías: $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.
- Cortes con los ejes:

$$\begin{cases} \text{Con el eje de ordenadas no tiene: } 0 \notin D_f \\ \text{Eje de abscisas, antiimagen(es) de cero } \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2} = 0 \implies 2x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \text{la ecuación de segundo grado no tiene soluciones reales.} \end{cases}$$

La función NO CORTA a los ejes de coordenadas.

- La función es continua en su dominio máximo (cociente de funciones continuas).
- ASÍNTOTAS.

Asíntotas verticales

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(0 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 2h + 1}{h^2} = \frac{1}{+0} = \boxed{+\infty} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 2h + 1}{h^2} = \frac{1}{+0} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

La recta $\boxed{x = 0}$ es asíntota vertical de la función y $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{2x + 1}{x^2} \right) = \boxed{2}$$

La recta $\boxed{y = 2}$ es la asíntota horizontal de la función.

Corte, si existe, entre la función y la asíntota horizontal. Solución del sistema:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2} \\ y = 2 \end{cases} \implies \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2} = 2 \implies 2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

En el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la gráfica de la función y la asíntota se cortan.

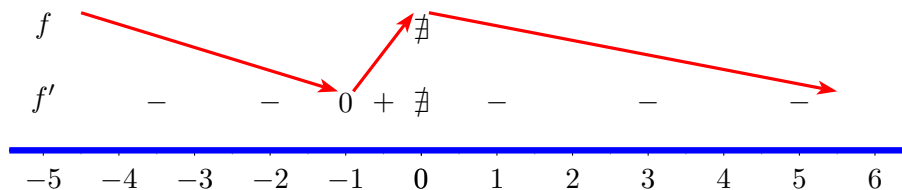
- Estudio de la primera derivada.

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{x^3}$, el dominio máximo es igual al dominio de la función.

Condición necesaria de extremo local. Puntos críticos La pendiente de la tangente es cero.

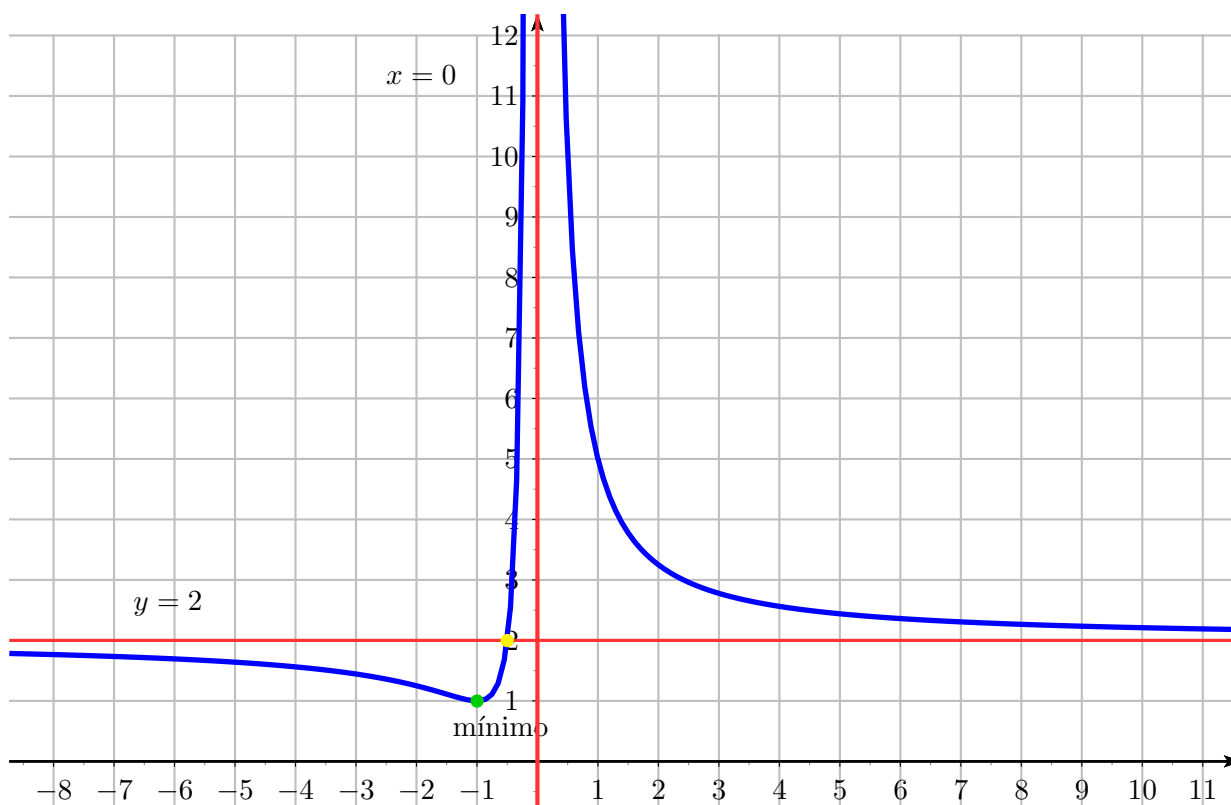
$$\frac{-2(x+1)}{x^3} = 0 \implies x+1=0 \implies \boxed{x=-1 \in D_f}$$

Condición suficiente y monotonía de la función. Estudio del signo.



- La función es decreciente si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.
- La función es creciente si $x \in (-1, 0)$.
- La función derivada cambia de signo en un entorno de $x = -1$, entonces la función alcanza un un mínimo relativo (local) en $(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

- Gráfica de la función:



⑤ Estudiar y dibujar la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- Dominio de la función: $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge \ln x \neq 0\} = (0, +\infty) \setminus \{1\}$
- La función es continua en su dominio por cociente de funciones continuas.
- No corta a los ejes: $0 \notin D_f$.
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0. \text{ Discontinuidad evitable en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h}{\ln(1-h)} = \frac{1}{-0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h}{\ln(1+h)} = \frac{1}{+0} = \boxed{+\infty}$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función.

- Asíntota Horizontal:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \stackrel{\infty}{=} +\infty$. La función del numerador *tiende más rápido* al infinito que la del denominador.

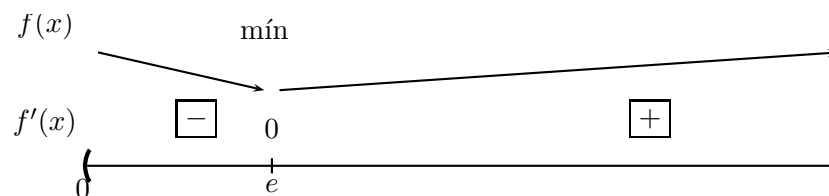
- Asíntota oblicua: La recta $y = mx + n$ siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

La función presenta **RAMA PARABÓLICA** en la dirección del **eje de abscisas**.

- Estudio de la primera derivada: $f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Dominio de la derivada: $D_{f'} = D_f$.

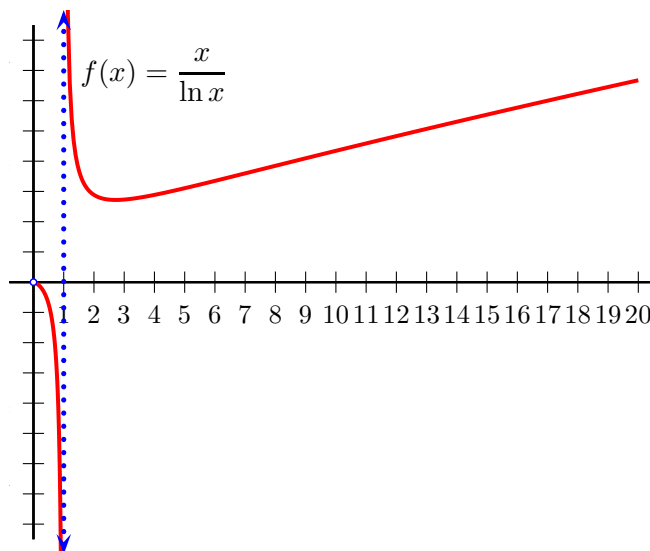
Puntos críticos (tangente horizontal): $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \boxed{x = e}$



La derivada cambia de signo en un entorno del punto $x = e$, de negativa a positiva, la función alcanza un **mínimo relativo** o local en $(e, f(e)) = (e, e)$.

Monotonía de la función: $\begin{cases} \text{Si } x \in (0, e) \text{ la primera derivada es negativa, } f'(x) < 0. \text{ La función es decreciente si} \\ \text{Si } x \in (e, +\infty) \text{ la primera derivada es positiva, } f'(x) > 0. \text{ La función es creciente si } x \end{cases}$

- Gráfica de la función:



⑥ Estudiar y dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$

- Dominio de la función: $e^x > 0$ por lo tanto $D_f = \mathbb{R}$. La función es continua por ser cociente de funciones continuas.
- Cortes con los ejes:
Eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{e^x} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \implies \begin{cases} (-1, 0) \\ (1, 0) \end{cases}$$

Eje de ordenadas: $f(x = 0) = \frac{0^2 - 1}{e^0} = -1 \implies (0, -1)$

- Asíntotas y ramas parabólicas.

- Asíntotas verticales no tiene por se una función continua $\forall x \in D_f$.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} \stackrel{\infty}{\underset{\text{L'Hôp}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\infty}{\underset{\text{L'Hôp}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

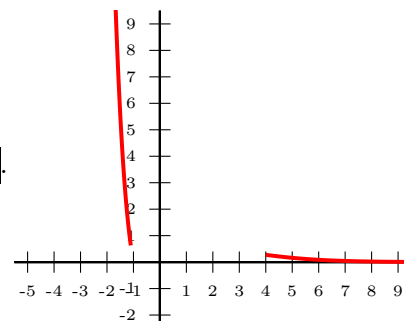
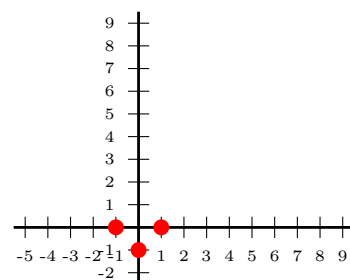
la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal si $x \rightarrow +\infty$.

- Asíntota oblicua y/o rama parabólica.

Ecuación de la asíntota oblicua si $x \rightarrow -\infty$ $y = mx + n$ donde:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x e^x} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$ la función presenta una **rama parabólica en la dirección del eje de ordenadas**.



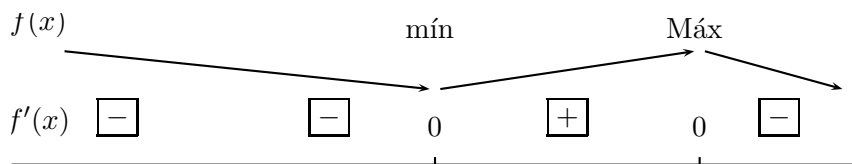
- Estudio de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2 - 1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-x^2 + 2x + 1)}{e^{2x}} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x}$$

Puntos críticos (candidatos a extremos locales o relativos), $f'(x) = 0$

$$\frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x} = 0 \implies -x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$



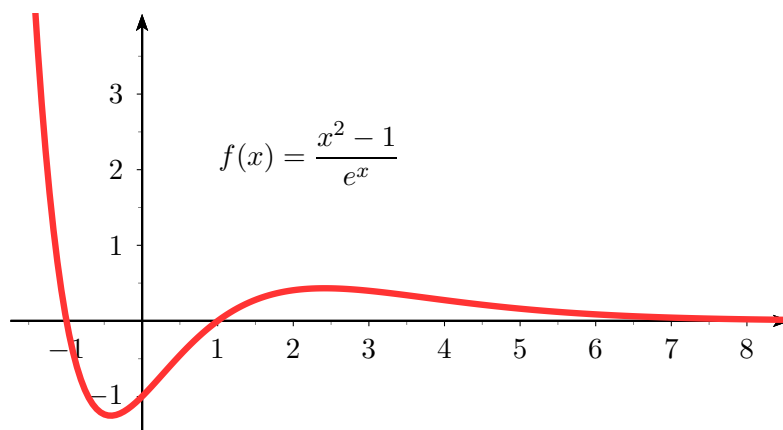
Monotonía de la función:

- Si $x \in (0, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$, la primera derivada es negativa, $f'(x) < 0$. La función es decreciente si $x \in (0, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$.
- Si $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ la primera derivada es positiva, $f'(x) > 0$. La función es creciente si $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Extremos:

- La derivada cambia de signo en un entorno del punto $x = 1 - \sqrt{2}$, de negativa a positiva, la función alcanza un **mínimo relativo** o local en $\text{mínimo}(1 - \sqrt{2}, f(1 - \sqrt{2})) = (-0,4142, -1,2536)$.
- La derivada cambia de signo en un entorno del punto $x = 1 + \sqrt{2}$, de positiva a negativa, la función alcanza un **máximo relativo** o local en $\text{máximo}(1 + \sqrt{2}, f(1 + \sqrt{2})) = (2,4142, 0,4318)$.

- Gráfica de la función:



1.1.2. Máximos y mínimos

- ① Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

a) ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?

b) ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

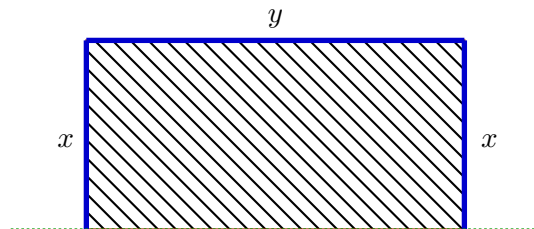
Las incógnitas son las dimensiones de los postes, x , y el larguero, y , en metros.

La función a optimizar, el área del rectángulo: $S(x, y) = xy$ máxima.

La relación entre las variables, ligadura, longitud de la barra de hierro: $2x + y = 10$, despejando:

$$y = 10 - 2x$$

y $x \in [0, 5]$. Si $x = 0$ ó $x = 5$ el área es cero. No se puede construir ninguna portería.



$$S(x, y) = x \cdot y \implies S(x) = x \cdot (10 - 2x) \implies S(x) = 10x - 2x^2$$

$$\text{Punto crítico de la función: } S'(x) = 10 - 4x = 0 \implies x = \frac{5}{2} \text{ m}$$

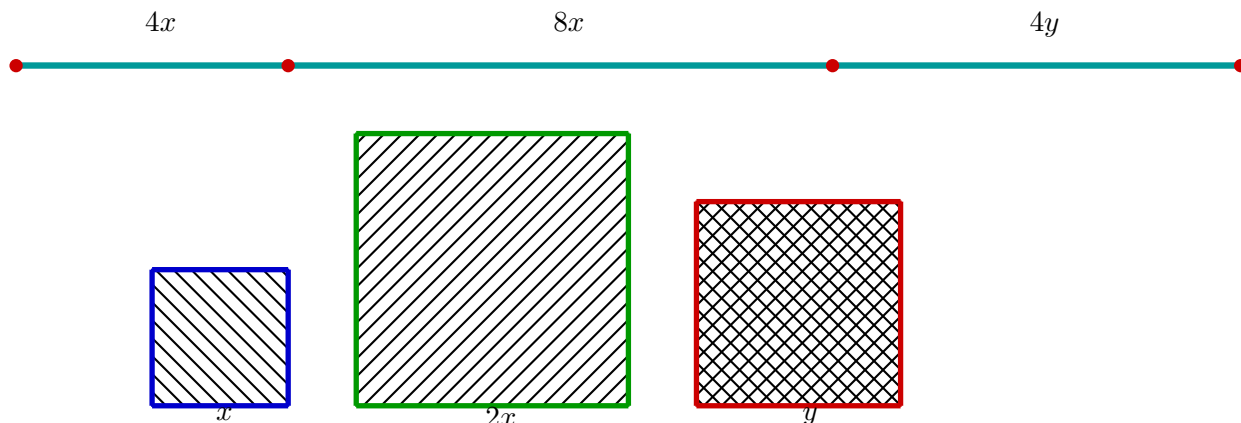
La función $S(x)$ es cuadrática con el coeficiente cuadrático, $a < 0$, negativo, la función alcanza un máximo. Por el teorema de Weirstrass, es absoluto.

Los postes miden 2,5 m y el larguero, 5 m. El área de la portería es: $S(x, y) = \frac{25}{2} \text{ m}^2$

- ② Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 metros. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

El hilo metálico lo dividimos en tres trozos: $4x$ para el primer cuadrado, el doble, $8x$, para el segundo cuadrado y $4y$ para el tercer cuadrado, de tal forma que la ligadura entre las variables es:

$$4x + 8x + 4y = 140 \text{ m}$$



Función a optimizar, suma de las áreas sea mínima: $S(x, y) = x^2 + (2x)^2 + y^2 = 5x^2 + y^2$

De la ligadura entre las variables despejamos la incógnita y : $y = 35 - 3x$ y $x \in \left[0, \frac{35}{3}\right]$.

$$S(x) = 5x^2 + (35 - 3x)^2 \implies S'(x) = 10x + 2(35 - 3x)(-3) = 0 \implies 2x(105 - 14x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{15}{2} \end{cases}$$

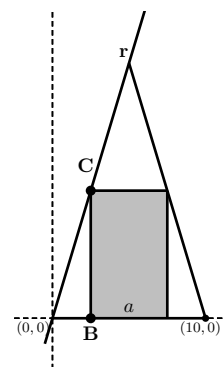
x	$S(x)$
0	$35^2 = 1225$
$\frac{15}{2}$	437,5
$\frac{35}{3}$	680,56

Candidatos a extremos absolutos: $\frac{15}{2}$. El mínimo absoluto se alcanza para $x = \frac{15}{2}$.

Longitud de cada trozo de hilo: $\begin{cases} 4x = 30 \text{ m} \\ 8x = 60 \text{ m} \\ 4y = 50 \text{ m} \end{cases}$

③ El triángulo isósceles, descrito en la figura, mide **10 cm** de base y **20 cm** de altura.

- ¿Cuál es la ecuación de la recta r señalada en la figura que contiene el lado del triángulo?
- Dado el rectángulo inscrito cuya base mide a , calcula las coordenadas de los puntos B y C en función de a .
- Halla el valor de a que hace máxima el área del rectángulo.



- Las propiedades de un triángulo isósceles permiten razonar que las coordenadas del vértice superior son $P(5, 20)$. La recta r está determinada por el origen y el punto anterior, $y = m \cdot x$. La pendiente de la recta $m = \tan \alpha = \frac{20}{5} = 4$.

La ecuación de la recta es $y = 4x$

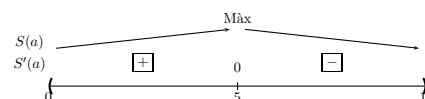
- El punto B está situado en el eje de abscisas, la base del rectángulo inscrito mide a y el punto medio de la base del triángulo isósceles tiene de coordenadas $(5, 0)$, por lo tanto $B\left(5 - \frac{a}{2}, 0\right)$.

La abscisas del punto C es la del punto B y como pertenece a la recta r su ordenada es $y = 4\left(5 - \frac{a}{2}\right) = 20 - 2a$.

El punto $C\left(5 - \frac{a}{2}, 20 - 2a\right)$

- $S = a \cdot (20 - 2a) = 20a - 2a^2$ donde $0 < a < 10$. La condición necesaria de punto crítico es: $S'(a) = 20 - 4a = 0 \implies a = 5$

Para $a = 5$ la superficie del triángulo es máxima



④ La demanda de un bien en función de su precio viene dada por $D(p) = \frac{30p + 10}{p}$

- Demostrar que al aumentar el precio disminuye la demanda.
- Suponiendo que el precio aumenta indefinidamente, decir qué ocurrirá con la demanda.
- Escribir los ingresos de una empresa en función del precio suponiendo que dicha empresa es la única que produce este bien.
- Calcular el precio para que la empresa del apartado anterior maximice sus beneficios sabiendo que los costes vienen dados por $C(p) = \frac{p^2}{4}$.
- Hallar el beneficio máximo.

a) El dominio de la función demanda es: $D = (0, +\infty)$.

La respuesta a la pregunta nos la da el estudio de la monotonía de la función en su dominio.

$$D(p) = 30 + \frac{10}{p} \implies D'(p) = -\frac{10}{p^2} \implies \forall p \in (0, +\infty), D'(p) < 0$$

La función es estrictamente decreciente.

AL aumentar el precio, p , la demanda, $D(p)$, disminuye

b) Si $p \rightarrow +\infty$ entonces $\lim_{p \rightarrow +\infty} D(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(30 + \frac{10}{p}\right) = 30$.

La asíntota horizontal tiene de ecuación $y = 30$. Interpretación:

La demanda tiende a 30 unidades del bien si el precio aumenta indefinidamente.

c) $I(p) = p \cdot D(p) = 30p + 10$ unidades monetarias (u.m.)

d) Los beneficios de la empresa viene expresadas por la función: $B(p) = I(p) - C(p) = 30p + 10 - \frac{p^2}{4}$

La derivada de la función beneficios es: $B'(p) = 30 - \frac{p}{2} = 0 \implies p = 60$ unidades

La gráfica de la función $B(p)$ es una parábola y su coeficiente cuadrático es negativo, la función beneficios alcanza un máximo absoluto para $p = 60$.

e) Sustituyendo:

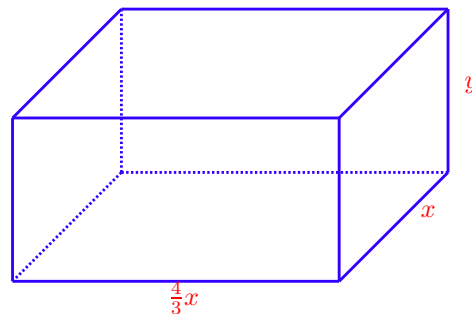
$$B(p = 60) = 30 \cdot 60 + 10 - \frac{3600}{4} = 910 \text{ u.m.}$$

⑤ Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo rectangular de 100m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2 , 300 €/m^2 y 256 €/m^2 . Determinar razonadamente:

- El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste.
- Dicho coste mínimo.

Incógnitas del problema:

$$\begin{cases} \text{ancho del suelo: } x \text{ m} \Rightarrow \text{largo del suelo: } \frac{4}{3}x \text{ m} \\ \text{altura de la bodega: } y \text{ m} \end{cases}$$



Función a optimizar. Coste de la obra:

$$C(x, y) = (300 + 225) \cdot S_{\text{base y techo}} + 256 \cdot S_{\text{lateral de la bodega}} = 525 \cdot \frac{4}{3}x^2 + 256 \cdot \frac{14}{3} \cdot x \cdot y$$

Relación entre las variables, volumen de la bodega: 100 m^3

$$\frac{4}{3}x^2y = 100 \Rightarrow \boxed{y = \frac{75}{x^2}} \text{ y } \boxed{x \in (0, +\infty)}$$

Función a optimizar en una variable, sustituyendo y en la función:

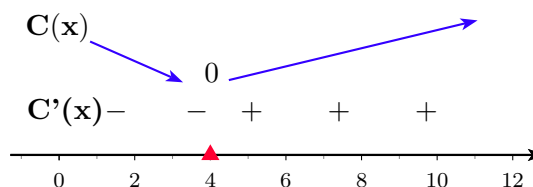
$$C(x) = 700x^2 + \frac{14 \cdot 256}{3} \cdot x \cdot \frac{75}{x^2} = 700x^2 + \frac{14 \cdot 256 \cdot 25}{x}$$

$$C'(x) = 1400x - \frac{14 \cdot 256 \cdot 25}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{14 \cdot 256 \cdot 25}{14 \cdot 4 \cdot 25} = 64 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{64} = 4}$$

Razonamiento de extremo absoluto:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = +\infty$, la función NO ALCANZA MÁXIMO ABSOLUTO.

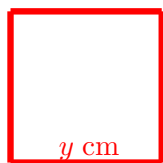
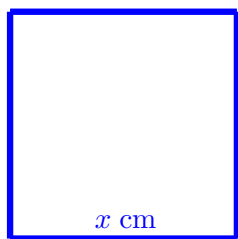
- Si $x = 4$ entonces la función alcanza un mínimo relativo que es el absoluto de la función.



Las medidas de la bodega deben ser $\frac{16}{3} \times 4 \times \frac{75}{16}$ metros

El precio mínimo: $C(x = 4) = 700 \cdot 16 + \frac{3584 \cdot 75}{4} = 78,400$ euros

- ⑥ Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?



Incógnitas: $\begin{cases} \text{Lado del cuadrado de material } 2\text{€/cm}^2 : x \text{ cm} \\ \text{Lado del cuadrado de material } 3\text{€/cm}^2 : y \text{ cm} \end{cases}$

Función a optimizar (mínimo coste): $C(x, y) = 2x \cdot 2 + 3y^2 \text{ €}$.

Restricción entre las variables: $4x + 4y = 100 \text{ cm}$ ($1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$)

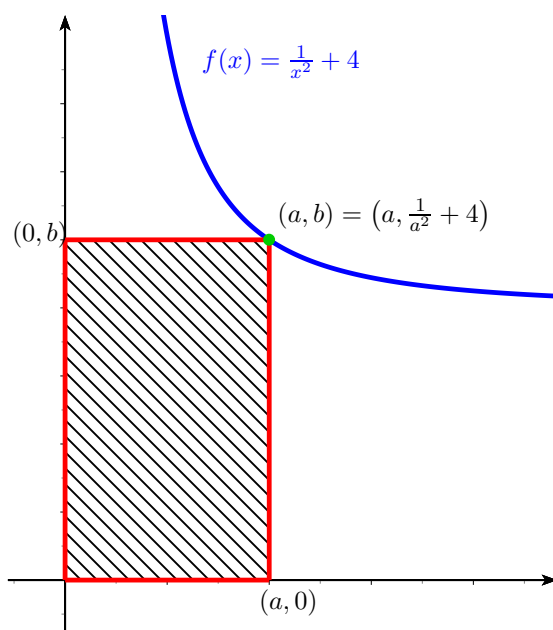
Despejando: $y = 25 - x \Rightarrow x \in [0, 25]$

Función a optimizar: $C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2$. La función es una parábola con el coeficiente cuadrático positivo, alcanza **un mínimo absoluto en el vértice**.

Función derivada: $C'(x) = 4x - 6(25 - x) \Rightarrow 5x = 75 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 25 - 15 = 10$

Los lados de los cuadrados deben medir, 15 cm el del material de 2 €/cm² y 10 cm el de 3 €/cm²

- ⑦ Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$, de modo que el punto (a,b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de la ecuación $y = \frac{1}{x^2} + 4$. De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima.



La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + 4$ es la gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{x^2}$ **trasladada cuatro unidades** en sentido positivo del eje de ordenadas.

Incógnitas: $a > 0$ y $b = f(a) = \frac{1}{a^2} + 4 > 0$ y $a \in (0, +\infty)$.

Función a optimizar, superficie del rectángulo: $S(a, b) = a \cdot b$.

Sustituyendo: $S(a) = a \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 4\right) = 4a + \frac{1}{a}$.

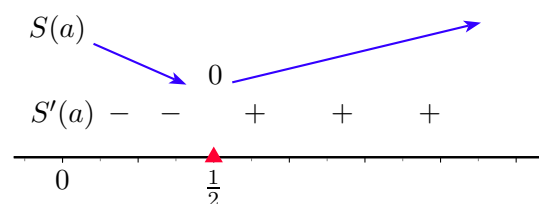
Derivando: $S'(a) = 4 - \frac{1}{a^2} = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$.

La función área no alcanza máximo absoluto: $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} S(a) = +\infty$.

Estudio del signo de la primera derivada:

Si $a = \frac{1}{2}$ entonces la función alcanza un mínimo relativo que es el absoluto de la función.

Si $a = \frac{1}{2}$ entonces $b = 8$.



El rectángulo de área mínima tiene de dimensiones $\frac{1}{2} \times 8$

- ⑧ Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por alarmas de dos tipos, A ó B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. Estudiar cuantas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

Incógnitas: $\begin{cases} \text{Alarmas del tipo A: } x \\ \text{Alarmas del tipo B: } y \end{cases}$.

Función a optimizar, la seguridad de la empresa: $f(x, y) = \frac{1}{10}(x \cdot y^2)$.

Restricción entre las variables: $x + y = 9 \Rightarrow x = 9 - y$ y $0 \leq y \leq 9$.

Sustituyendo en la función a optimizar: $f(y) = \frac{1}{10}(9 - y) \cdot y^2$.

Derivando (punto crítico): $f'(y) = \frac{1}{10}(18y - 3y^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 6 \end{cases}$.

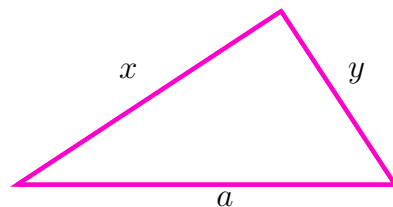
Discusión de la solución, teorema de Weierstrass:

$y \in [0, 9]$	$f(y) = \frac{1}{10}(9y^2 - y^3)$
0	0
6	$\frac{54}{5} \Rightarrow \text{máximo}$
9	0

La empresa debe instalar 3 alarmas del tipo A y 6 del tipo B.

- ⑨ Los catetos de un triángulo rectángulo suman 10 m. Calcular la hipotenusa del que tiene mayor superficie.

- Variables del problema: los catetos, x e y m, del triángulo rectángulo.
- Función a optimizar: la superficie del triángulo rectángulo debe ser máxima: $S(x, y) = \frac{1}{2}x \cdot y$
- Relación entre las variables (ligadura): $x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y$ siendo $y \in (0, 10)$

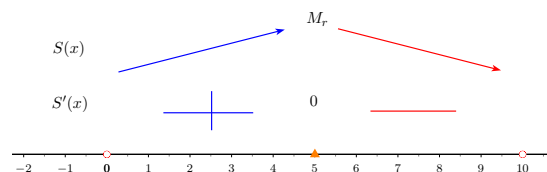


- Sustituyendo en la función a optimizar: $S(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$, la función es derivable por ser polinómica.
- Condición necesaria de extremo local para funciones derivables:

$$S'(x) = \frac{1}{2}(10 - 2x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

- Condición suficiente de extremo local, cambio de signo de la primera derivada en un entorno de $x = 5$:

$$\left. \begin{array}{l} S'(5-h) > 0 \\ S'(5+h) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{en } x = 5 \text{ el área es MÁXIMA}$$



El máximo es absoluto teniendo en cuenta que la monotonía de la función $S(x)$ en el intervalo $(0, 5)$. Los catetos del triángulo rectángulo miden ambos 5 metros (triángulo rectángulo isósceles).

- Hipotenusa del triángulo (teorema de Pitágoras): $a^2 = x^2 + y^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow a = +\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

La hipotenusa del triángulo rectángulo de área máxima mide $5\sqrt{2}$ metros.

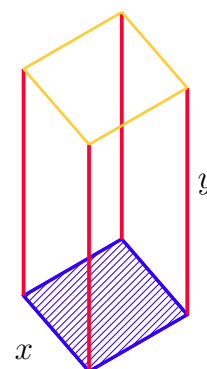
- ⑩ Se necesita construir un depósito de acero de 500 m^3 , de forma rectangular con base cuadrada y sin tapa. Hallar las dimensiones del depósito para que su coste de producción sea mínimo.

- Variables del problema: arista básica, $\square$, x m y arista lateral, y m.
- Función a optimizar: la superficie lateral del prisma más la de la base debe ser mínima:

$$S(x, y) = S_{\text{lateral}} + S_{\square} = P_{\square} \cdot y + x^2 = 4xy + x^2$$

- Relación entre las variables (ligadura), volumen del depósito:

$$V = S_{\text{base}} \cdot \text{altura} = x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}, x \in (0, +\infty) \quad (1)$$



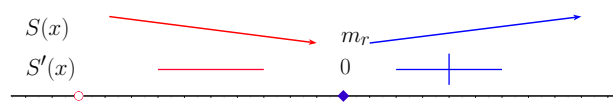
- Sustituyendo: $S(x) = 4x \frac{500}{x^2} + x^2 = \frac{2000}{x} + x^2$.

- Condición necesaria de extremo local para funciones derivables:

$$S'(x) = -\frac{2000}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow \frac{1000}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

- Condición suficiente de extremo local, cambio de signo de la primera derivada en un entorno de $x = 10$:

$$\left. \begin{array}{l} S'(10-h) < 0 \\ S'(10+h) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{en } x = 10 \text{ el área es MÍNIMA}$$



El mínimo es absoluto teniendo en cuenta que la monotonía de la función $S(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

Sustituyendo en (1): $y = \frac{500}{100} = 5$ metros.

El lado del cuadrado mide 10 m y la altura del depósito, 5 metros

- ⑪ La energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece ($f(x)$ representa la energía producida a las x horas de haber amanecido):

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{1024}{x^2} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.
- ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿cuánto produce en ese momento?

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

El dominio de la función es $D_f = [0, 12]$. Si $x \in [0, 12] \setminus \{8\}$ la función es continua por ser polinómica o cociente de funciones continuas.

En $x = 8$ será continua si $\exists \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8) = 80 - 64 = 16$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} (10x - x^2) = 16 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1024}{x^2} = \frac{2^{10}}{2^6} = 2^4 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 16 = f(8)$$

La función es continua en su dominio $[0, 12]$.

La función es derivable en $(0, 12) \setminus \{8\}$, polinómica y función racional derivable.

En $x = 8$, la continuidad es continua en $x = 8$, será derivable si la pendiente por la derecha y la izquierda es igual.

$$f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 < x < 8 \\ ?? & \text{si } x = 8 \\ -\frac{2048}{x^3} & \text{si } 8 < x < 12 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} f'(8^-) = 10 - 16 = -6 \\ f'(8^+) = -\frac{2^{11}}{2^9} = -2^2 = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nexists f'(8)}$$

La función NO es derivable en $x = 8$ y $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 < x < 8 \\ \frac{2048}{x^3} & \text{si } 8 < x < 12 \end{cases}$

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿cuánto produce en ese momento?

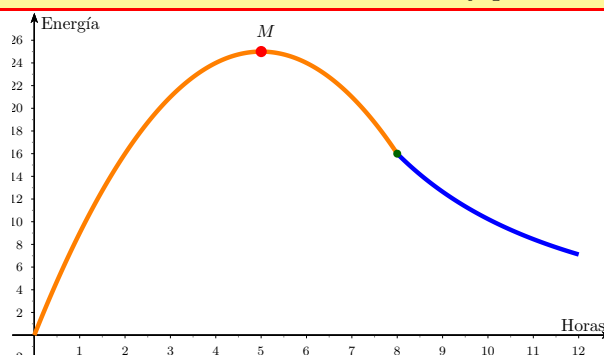
Candidatos a extremos absolutos son los extremos del intervalo, $x = 8$ por pertenecer al dominio de la función pero no al de la derivada y los puntos donde $f'(x) = 0$.

Si $0 < x < 8$, $f'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5 \in (0, 8)$.

Si $8 < x < 12$, $f'(x) = -\frac{2048}{x^3} = 0$ NO TIENE SOLUCIÓN, no hay candidato a extremo local.

La producción es máxima a las cinco horas y produce 25 unidades

x	$f(x)$
0	0
5	25
8	16
12	$\frac{64}{9} = 7, \hat{1}$

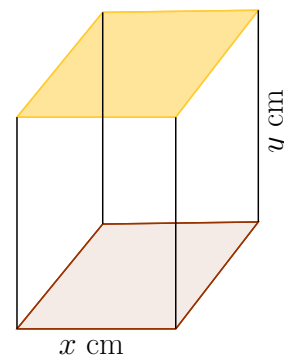


⑫ Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta $1\text{€}/\text{cm}^2$ y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

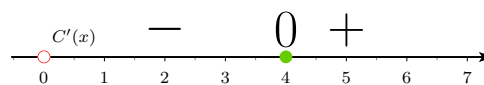
- Variables: lado del cuadrado de la base x cm y la altura de la caja, y cm.
- Función a optimizar: coste del material empleado en la construcción debe ser mínimo.

$$C(x, y) = (S_{\text{lateral}} + S_{\square}) \cdot 1 + S_{\square} \cdot 1,5 = 4xy + x^2 + 1,5x^2 = 2,5x^2 + 4xy \in$$

- Relación entre las variables (ligadura): volumen $V = x^2y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$.
- Sustituyendo en la función $C(x) = 2,5x^2 + 4x \frac{80}{x^2} = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$, $x \in (0, +\infty)$:

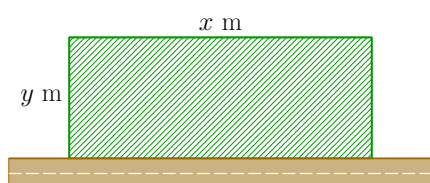


- Condición necesaria de extremo local: $C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$
- Condición suficiente: La función coste, $C(x)$, alcanza en $x = 4$ un mínimo relativo, que es mínimo absoluto. La función decrece y después crece.
- Sustituyendo el valor de $x = 4$ en la restricción: $y = \frac{80}{16} = 5$ cm.



Las dimensiones de la caja con el coste mínimo son 4 cm lado de la base y 5 cm de altura

- ⑬ Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 110 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?



- Función a optimizar: $S(x, y) = x \cdot y$ m² MÁXIMO.
- Relación entre las variables: presupuesto de 3000 euros:

$$10(x + 2y) + 110x = 3000 \Rightarrow y = \frac{300 - 12x}{2} = 150 - 6x$$
- Dominio de la función: $x \in (0, 25)$
- Sustituyendo en la función: $S(x) = x(150 - 6x) = 150x - 6x^2$
- Punto crítico: $S'(x) = 150 - 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{150}{12} = 12,5$ m
- La función $S(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 12,5$ por ser una función cuadrática con el coeficiente cuadrático, $a = -6 < 0$, negativo.
- Si $x = 12,5$ entonces $y = 150 - 75 = 75$ m.

El rectángulo tiene de dimensiones 12,5m de base y 75m de altura.

- ⑭ El precio de coste unitario de un cierto producto es de 120 €. Si se vende a 150 € la unidad, lo compran 500 clientes. Por cada 10 € de aumento en el precio, las ventas disminuyen en 20 clientes.
- Hallar la función mediante la cual se obtienen los beneficios.
 - Calcular a qué precio p unitario debemos vender el producto para obtener un beneficio máximo.
 - En el caso anterior, calcular el número de unidades que se venden y calcular el beneficio máximo.

a) Sea $x \in \mathbb{N}$ el factor que multiplica a 10 €:

Precio de venta unitario: $150 + 10 \cdot x$ €.

Número de artículos vendidos: $500 - 20 \cdot x$.

Coste total de la fabricación: $C(x) = 120 \cdot (500 - 20x)$ €.

Ingresos por las ventas: $I(x) = (500 - 20x) \cdot (150 + 10x)$ €.

Función beneficio:

$$B(x) = I(x) - C(x) = (500 - 20x)(150 + 10x) - 120(500 - 20x) = (500 - 20x) \cdot (30 + 10x) \text{ €}$$

b) La función beneficio es cuadrática y el coeficiente cuadrático es NEGATIVO, la función alcanza un máximo.

$$B'(x) = -20 \cdot (30 + 10x) + (500 - 20x) \cdot 10 = 0 \iff 50 - 2x = 2(3 + x) \implies 4x = 44 \implies x = 11$$

El precio unitario para obtener beneficios máximos es: $p = 150 + 10 \cdot 11 = 260$ euros.

- c) ■ Número de unidades vendidas: $500 - 20 \cdot 11 = 280$ unidades.
 ■ Beneficio obtenido: $B(x = 11) = 280 \cdot 140 = 39200$ €.

⑮ Entre 2000 y 5000 revoluciones por minuto, la potencia de un motor viene dada aproximadamente por la siguiente función. $P(x)$ es la potencia en caballos de vapor para x miles de revoluciones por minuto:

$$P(x) = -12x^3 + 90x^2 - 144x + 84, \quad 2 \leq x \leq 5$$

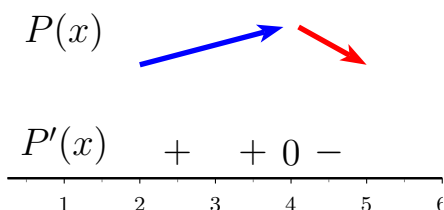
- a) ¿Crece siempre la potencia cuando las revoluciones del motor aumentan?
 b) Dibuja la gráfica de la función. ¿A qué revoluciones se alcanza la mayor potencia?
 c) ¿Tiene la curva de potencia algún punto de inflexión?

(a) ¿Crece siempre la potencia cuando las revoluciones del motor aumentan?

Estudio del signo de la primera derivada:

$$P'(x) = -36x^2 + 180x - 144 \text{ entonces } P'(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \notin [2, 5] \end{cases} \quad \text{entonces: } P'(x) = -36(x - 1)(x - 4)$$



La potencia es creciente si $x \in (2, 4)$.

La potencia es decreciente si $x \in (4, 5)$

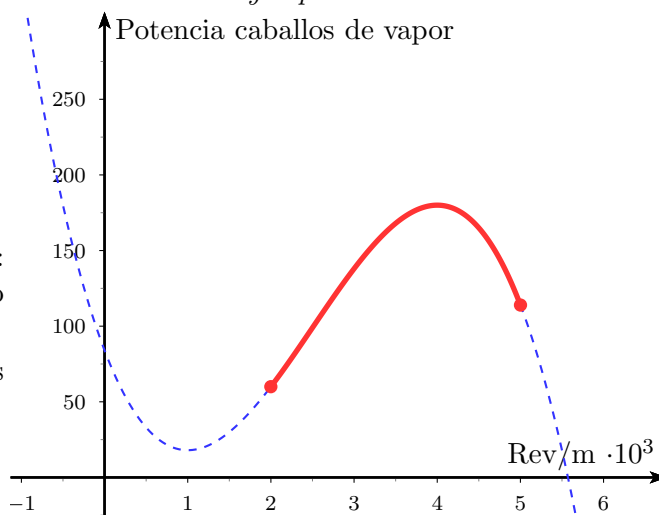
Conclusión: la potencia del motor no siempre es creciente.

(b) *Dibuja la gráfica de la función. ¿A qué revoluciones se alcanza la mayor potencia?*

$$\begin{cases} (0, 84) \\ (2, 60) \\ (5, 114) \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty.$$

Teniendo en cuenta el apartado anterior: $M_r(4, P(4)) = (4, 180)$. Es máximo absoluto en el intervalo $[2, 5]$.

La máxima potencia la alcanza a 4000 revoluciones por minuto.



(c) *¿Tiene la curva de potencia algún punto de inflexión?*

Estudio de la segunda derivada: $P''(x) = -36(2x - 5) = 0 \iff x = \frac{5}{2} \in (2, 5)$ y la función segunda derivada cambia de signo. La función alcanza un punto de inflexión en $\left(\frac{5}{2}, 99\right)$. A 2500 revoluciones por minuto la potencia del motor alcanza el punto de inflexión de crecimiento.