

Aplicaciones de la derivada. Curvatura y puntos de inflexión

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

1 de octubre de 2012

Definiciones

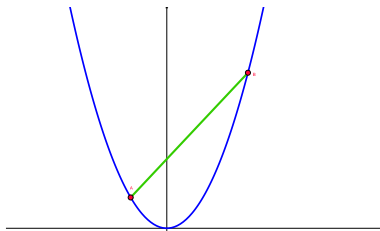
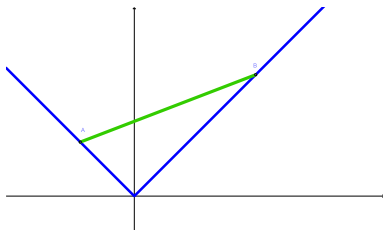
Definición (Cóncava $\cup$)

La función f es cóncava en el intervalo $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ todo punto del segmento AB , con $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por **encima** de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$

Definiciones

Definición (Cóncava $\cup$)

La función f es cóncava en el intervalo $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ todo punto del segmento AB , con $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por **encima** de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$

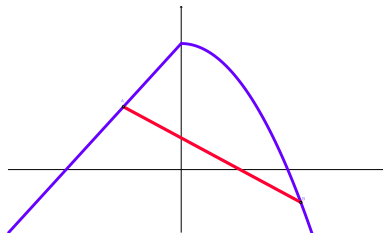
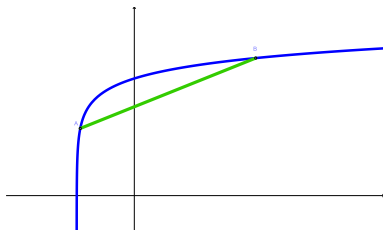


Definición (**Convexa** $\cap$)

La función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ todo punto del segmento AB , con $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por **debajo** de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$

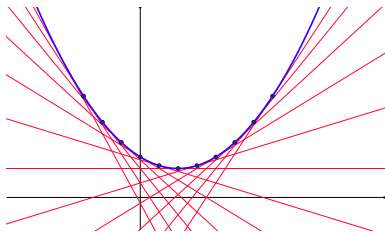
Definición (Convexa $\cap$)

La función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ todo punto del segmento AB , con $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por **debajo** de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$

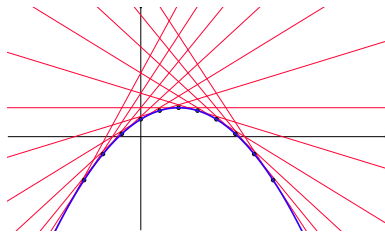


Consideremos que las funciones son, al menos, dos veces derivables.

Si la función es cóncava, $\cup$, entonces la gráfica de la función queda por **encima** de las tangentes.

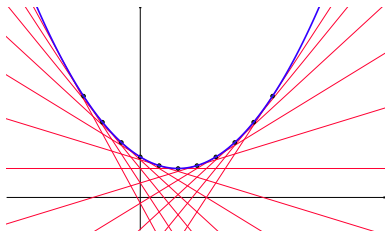


Si la función es convexa, $\cap$, entonces la gráfica de la función queda por **debajo** de las tangentes.

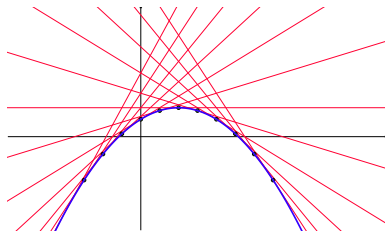


Consideremos que las funciones son, al menos, dos veces derivables.

Si la función es cóncava, $\cup$, entonces la gráfica de la función queda por **encima** de las tangentes.



Si la función es convexa, $\cap$, entonces la gráfica de la función queda por **debajo** de las tangentes.

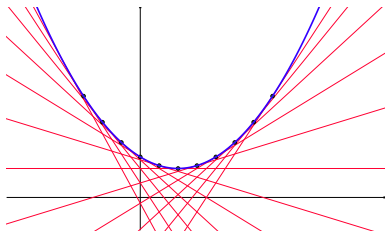


Interpretación de las tangentes

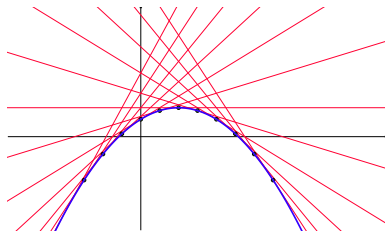
- Si las pendientes de las tangentes, f' , es **creciente**, entonces la función es cóncava.

Consideremos que las funciones son, al menos, dos veces derivables.

Si la función es cóncava, $\cup$, entonces la gráfica de la función queda por **encima** de las tangentes.



Si la función es convexa, $\cap$, entonces la gráfica de la función queda por **debajo** de las tangentes.



Interpretación de las tangentes

- Si las pendientes de las tangentes, f' , es **creciente**, entonces la función es cóncava.
- Si las pendientes de las tangentes, f' , es **decreciente**, entonces la función es convexa.

Criterio de la segunda derivada

Sea f una función derivable, al menos, dos veces en el intervalo I

- Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$ entonces la función es cóncava.

Criterio de la segunda derivada

Sea f una función derivable, al menos, dos veces en el intervalo I

- Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$ entonces la función es cóncava.
- Si $f''(x) < 0, \forall x \in I$ entonces la función es convexa.

Criterio de la segunda derivada

Sea f una función derivable, al menos, dos veces en el intervalo I

- Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$ entonces la función es cóncava.
- Si $f''(x) < 0, \forall x \in I$ entonces la función es convexa.
- Si $f''(x) = 0$ en algún punto de I , CASO DUDOSO, no decide el criterio de la segunda derivada.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.
- Derivada primera $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.
- Derivada primera $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
- Derivada segunda

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{doble} \\ x = 3 \end{cases}$$

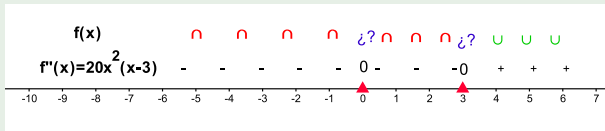
Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.
- Derivada primera $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
- Derivada segunda

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{doble} \\ x = 3 \end{cases}$$

- Signo de la segunda derivada (crecimiento y decrecimiento de la función primera derivada)



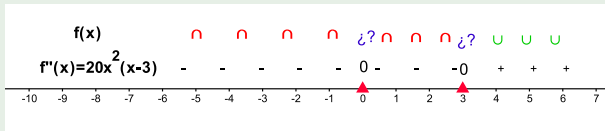
Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.
- Derivada primera $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
- Derivada segunda

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{doble} \\ x = 3 \end{cases}$$

- Signo de la segunda derivada (crecimiento y decrecimiento de la función primera derivada)



- La función f es cóncava, $\cup$, si $x \in (3, +\infty)$.

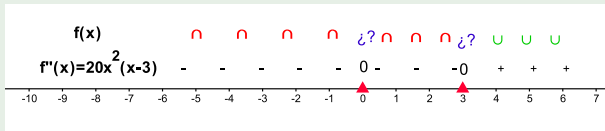
Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.
- Derivada primera $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
- Derivada segunda

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{doble} \\ x = 3 \end{cases}$$

- Signo de la segunda derivada (crecimiento y decrecimiento de la función primera derivada)



- La función f es cóncava, $\cup$, si $x \in (3, +\infty)$.
- La función f es convexa, $\cap$, si $x \in (-\infty, 3) \setminus \{0\}$.

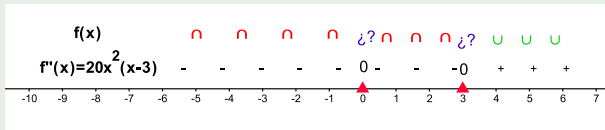
Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3$, estudiar la curvatura de la función.

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$.
- Derivada primera $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
- Derivada segunda

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & \text{doble} \\ x = 3 \end{cases}$$

- Signo de la segunda derivada (crecimiento y decrecimiento de la función primera derivada)



- La función f es cóncava, $\cap$, si $x \in (-\infty, 3) \setminus \{0\}$.
- La función f es convexa, $\cup$, si $x \in (3, +\infty)$.
- Si $x = 0$ y $x = 3$ el criterio no decide.

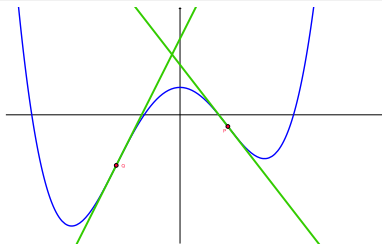
Definiciones

Definición (Punto de inflexión)

La función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $x_0 \in D_f$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN** si la función cambia de curvatura, es decir, pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Definición (Tangentes)

La función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza en $x_0 \in D_f$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN** si es derivable, $\exists f'$ y la tangente geométrica atraviesa la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$.



Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto de inflexión)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable, al menos, dos veces en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un punto de inflexión en x_0 entonces su segunda derivada es nula, $f''(x_0) = 0$.

Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto de inflexión)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable, al menos, dos veces en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un punto de inflexión en x_0 entonces su segunda derivada es nula, $f''(x_0) = 0$.

Interpretación del teorema

- Si la función es, al menos, dos veces derivable en un punto y la segunda derivada es cero, dicho punto es **CANDIDATO** a punto de inflexión.

Teoremas

Teorema (Condición necesaria de punto de inflexión)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ **derivable, al menos, dos veces en** $x_0 \in D_f$, Si la función alcanza un punto de inflexión en x_0 entonces su segunda derivada es nula, $f''(x_0) = 0$.

Interpretación del teorema

- Si la función es, al menos, dos veces derivable en un punto y la segunda derivada es cero, dicho punto es **CANDIDATO** a punto de inflexión.
- El recíproco del teorema, en general, **NO ES CIERTO**. La función $f(x) = x^4$ su segunda derivada en 0 es $f''(0) = 0$ y la función no tiene punto de inflexión en $(0, 0)$.

Teorema (Condición suficiente de punto de inflexión. Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

f derivable, al menos, dos veces en un entorno de x_0 y $f''(x_0) = 0$

Teorema (Condición suficiente de punto de inflexión. Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

f derivable, al menos, dos veces en un entorno de x_0 y $f''(x_0) = 0$

entonces si $\left\{ \begin{array}{c} f''(x_0 - h) < 0 \text{ y } f''(x_0 + h) > 0 \\ \text{ } \\ f''(x_0 - h) > 0 \text{ y } f''(x_0 + h) < 0 \end{array} \right\}$ la función alcanza
en $x = x_0$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN**.

Teorema (Condición suficiente de punto de inflexión. Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

f derivable, al menos, dos veces en un entorno de x_0 y $f''(x_0) = 0$

entonces si $\left\{ \begin{array}{c} f''(x_0 - h) < 0 \text{ y } f''(x_0 + h) > 0 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ f''(x_0 - h) > 0 \text{ y } f''(x_0 + h) < 0 \end{array} \right\}$ la función alcanza

en $x = x_0$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN**.

Teorema (Condición suficiente de punto de inflexión. Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

f derivable, al menos, dos veces en un entorno de x_0 y $f''(x_0) = 0$

entonces si $\left\{ \begin{array}{l} f''(x_0 - h) < 0 \text{ y } f''(x_0 + h) > 0 \\ \text{ o } \\ f''(x_0 - h) > 0 \text{ y } f''(x_0 + h) < 0 \end{array} \right\}$ la función alcanza

en $x = x_0$ un **PUNTO DE INFLEXIÓN**.

